Lineare Terme und lineare Gleichungen
(Version 28.11.2025)

Wie meine anderen Texte über einfache Terme soll auch dieser dafür werben, schon mit einfachen Termen Probleme zu lösen und damit nicht zu warten, bis das Umformen von möglichst vielen Arten von Termen eingeübt ist. Mit einfachen Termen meine ich in diesem Text lineare Terme mit bis zu drei Variablen und Zahlen als Koeffizienten, etwa $(2x + 3y - 4z)$ oder $(-7u + 5v + 6)$. Auch *lineare Gleichungen* mit solchen Termen kommen vor.
Ich kenne viele Menschen, die sich Geräte lieber durch Zugucken erklären lassen als Manuals zu lesen. Im Umgang mit einfachen Termen kann es auch funktionieren, sorgfältig formulierte Beispiele anzusehen und nachzumachen. In der Antike war das der einzige Weg, Rechenkünste zu vermitteln. Allerdings ist die inzwischen entwickelte Formelsprache ein großer Fortschritt gegenüber mit Worten ausgedrückten Zusammenhängen. Z.B. sind Textaufgaben (außer für junge Kinder) wesentlich schwieriger als mit Formeln formulierte Aufgaben.
Termumformungen verlaufen rezeptartiger und weniger vom Denken kontrolliert als verbale Argumentationen. Daher ist es nützlich, ungefähr zu *wissen*, was beim Umgang mit linearen Gleichungen passieren kann. Es gibt immer zwei Sonderfälle und den allgemeinen Fall, die man gar nicht oft genug aufzählen kann:
Der erste Sonderfall sind *allgemeingültige* Gleichungen. Sie geben bei *jeder* Ersetzung der Variablen durch Zahlen wahre Aussagen. Z.B. werden Rechengesetze als solche Gleichungen formuliert:

$$x + y = y + x \text{ oder } a(b + c) = ab + ac.$$

Der zweite Sonderfall sind *unlösbare* Gleichungen. Sie geben bei *jeder* Ersetzung der Variablen durch Zahlen falsche Aussagen, z.B. $0 = 1$. Sie können ohne mathematische Kenntnisse bemerkt werden, man kann sie höchstens übersehen. Etwa bei zwei Gleichungen mit zwei Variablen:

$$\texttt{(I)}\ \ x + y = 1,\ \texttt{(II)}\ \ 2x + 2y = 1\ \Rightarrow\ \texttt{(2I-II)}\ \ 0 = 0x + 0y = 1.$$

Im allgemeinen Fall gibt es etwas *auszurechnen*. Eine typische Umformung ist

$$\begin{array}{ll}
\texttt{(I)},\ \text{gegeben} & 7x + 5y = 13 \\
\texttt{(II)},\ \text{gegeben} & 4x + 3y = 10 \\
\texttt{(III)} = \frac{5}{3}\texttt{(II)} & \dfrac{20}{3}x + 5y = \dfrac{50}{3} = 13 + \dfrac{11}{3} \\
\texttt{(IV)} = \texttt{(I-III)} & \dfrac{21-20}{3}x + 0\,y = -\dfrac{11}{3},\quad x = -11, y = 18
\end{array}$$

Ist nur *eine* Gleichung `(I)` gegeben, so gibt es *unendlich viele* Lösungen. Uns interessieren zunächst ganzzahlige Lösungen. Zum Finden einer ersten Lösung prüft man, ob die Differenz zwischen {Vielfachen von 7} und 13 (in Formeln $7 \cdot n - 13$) durch 5 teilbar ist: $7 \cdot 4 - 13 = 5 \cdot 3$, also $x = 4, y = -3$. Dann addiert man alle Lösungen von $7x + 5y = 0$, also die Paare $(5k, -7k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Man erhält alle Lösungen in der Form $(x, y) = (4 + 5k, -3 - 7k)$, $k \in \mathbb{Z}$. — Alle reellen Lösungen erhält man mit $k \in \mathbb{R}$.

Ich finde, diesen Umgang mit linearen Gleichungen können auch solche Schülerinnen und Schüler lernen, die später am symbolischen Rechnen mit komplizierteren Termen (Brüche, höhere Potenzen) scheitern. Dazu sollte der erste Kontakt mit einfachen linearen Gleichungen frühzeitig erfolgen, jedenfalls nicht erst nach einer langen Übungsphase mit komplizierteren Termen. (Vergleiche dazu den Text T1.)
Schon die Babylonier haben Aufgaben zu linearen Gleichungen gelöst. Bis zur Entwicklung unserer heutigen Formelsprache wurden alle Aufgaben als Textaufgaben formuliert und konnten nur mit verbaler Argumentation gelöst werden. Heute werden Textaufgaben zuerst in die Formelsprache übersetzt und dann nach eingeübten Rezepten gelöst. Ein berühmtes Beispiel, das in der Formelsprache nur eine Variable benötigt, steht auf dem Grabstein des Mathematikers *Diophant* (vielleicht um 250 n.Chr.). Ich zitiere aus Wikipedia:

Hier das Grabmal deckt Diophantos - ein Wunder zu schauen:
Durch des Entschlafenen Kunst lehrt dich sein Alter der Stein.
Knabe zu bleiben verlieh ein Sechstel des Lebens ein Gott ihm;
Fügend das Zwölftel hinzu, ließ er ihm Sprossen die Wang;
Steckte ihm darauf an nach dem Siebtel die Fackel der Hochzeit,
Und fünf Jahre nachher teilt' er ein Söhnlein ihm zu.
Weh, unglückliches Kind, so geliebt! Halb hatt' es des Vaters
Alter erreicht, da nahms Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen besänftigend
Langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an.

Das Gedicht beschreibt das ganze Leben des Diophant in Abschnitten, deren Länge entweder explizit in Anzahl von Jahren angegeben wird oder in Bruchteilen seines gesamten Lebens. Offenbar soll daraus das Alter des Diophant ermittelt werden. Die Beschreibung kann in eine Formel übersetzt werden, wenn man für das Alter des Diophant eine Variable benutzt. Leider ist die Meinung verbreitet, dass solche Variablen immer x heißen müßten. Die Variable könnte ebenso gut a wie *Alter* oder d wie *Diophant* heißen. Um x zu vermeiden, verwende ich y für *years.* Die Größe von y ist das gesuchte Alter des Diophant. Nun die Übersetzung des Textes in die Formelsprache:

Die Zeit als Knabe hat die Länge $\frac{y}{6}$ Jahre.
Bis ihm danach der Bart wuchs, dauert es $\frac{y}{12}$ Jahre.
Und nach weiteren $\frac{y}{7}$ Jahren heiratete er.
5 Jahre später wurde sein Sohn geboren.
Der Sohn wurde halb so alt wie der Vater, also $\frac{y}{2}$ Jahre.
Nach dem Tod des Sohnes lebte Diophant noch 4 Jahre.

Aus diesen Abschnitten setzt sich das *ganze* Leben zusammen. Daher bekommen wir folgende Gleichung die mit einfachen Zusammenfassungen gelöst wird:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y}{6} + \frac{y}{12} + \frac{y}{7} + 5 + \frac{y}{2} + 4. \\ &= \frac{3}{4}y + \frac{y}{7} + 9 = \frac{25}{28}y + 9, \text{ also } \frac{3}{28}y = 9, \text{ Antwort: } \underline{y = 84}. \end{aligned}$$

Das Lösen solcher Gleichungen besteht immer aus der Zusammenfassung der Terme, die die Variable enthalten und aus der Zusammenfassung der Konstanten. Als hauptsächliche Schwierigkeit wird die Übersetzung der Textaufgabe in eine Gleichung angesehen. Z.B. ist in der besprochenen Aufgabe für mich die zweitletzte Zeile unklar, weil mit dem *Alter des Vaters zum Zeitpunkt des Todes des Sohnes* das augenblickliche Alter des Vaters *oder* das an dessen Lebensende gemeint sein könnte. Bei der ersten Interpretation müsste es statt $\frac{y}{2}$ heißen $\frac{y-4}{2}$. Dann hätte die Aufgabe aber keine ganzzahlige Lösung und das ist bei alten Aufgaben selten. Wenn auch die Lebensabschnitte ganzzahlig sein sollen, dann ist 84 die kleinste Zahl, für die $\frac{y}{12}$ und $\frac{y}{7}$ ganzzahlig sind (nach Barth).
Ich wähle historische Aufgaben, um zu zeigen, was Lernende vor Entwicklung der modernen Formelsprache bewältigen mussten. Das soll zeigen, dass sich die Anstrengung lohnt, symbolisches Rechnen zu erlernen, also eine Abstraktionsstufe zu erreichen, die nötig ist, um den Umgang mit Variablen und Termen zu verstehen und lineare Gleichungen zu lösen.

Noch eine *Aufgabe*, die mit einer Variablen gelöst wird (Barth, Algebra 7, Seite 164):

> Die Zahl 1000 soll so in vier Summanden zerlegt werden, dass der zweite doppelt, der dritte dreimal und der vierte viermal so groß ist wie der erste.

Wir nennen die vier Summanden s_1, s_2, s_3, s_4 und entnehmen dem Aufgabentext, dass die letzten drei aus s_1 ausgerechnet werden können. Damit gelingt die Übersetzung in eine Gleichung mit der einen Variablen s_1:

$$1000 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s_1 + 2s_1 + 3s_1 + 4s_1 = 10s_1, \quad \text{also} \quad s_1 = 100$$

Antwort: $1000 = 100 + 200 + 300 + 400.$

Die nächste Aufgabe wird mit 2 Variablen gelöst (man findet viele historische Aufgaben bei Barth):

> Eine alte chinesische *Aufgabe*: In einem Stall sind Kaninchen und Fasanen; sie haben zusammen 35 Köpfe und 98 Füße. Wieviel Tiere jeder Art waren es?

Als Variable nehmen wir die Anzahl k der Kaninchen und die Anzahl f der Fasanen. Die Informationen der Aufgabe übersetzen sich in zwei Gleichungen `(I)` und `(II)`:

`(I)` Anzahl Köpfe:	$k + f = 35,$
`(II)` Anzahl Füße:	$4k + 2f = 98.$
`(II)-2(I)`:	$2k + 0f = 28, \quad \text{also} \quad k = 14.$
Antwort:	14 Kaninchen und 21 Fasanen.

In https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth Algebra 8, S.149 ist geschildert, wie sich die folgende aus China (475 n.Chr.) stammende Aufgabe über Asien und Europa ausgebreitet hat. In diesem Fall ist die Übersetzung der Aufgabe in eine Gleichung einfach, aber die Gleichung enthält 3 Variable. Die Besprechung soll zeigen, wie man damit umgeht.

Die "100-Vögel" Aufgabe der Antike, damals ohne Formeln bearbeitet

Gänse, Hennen und Küken sollen mit (ganzzahligen) Talern bezahlt werden.
Kosten:
1 Gans: 5 Taler, 1 Henne: 3 Taler, 3 Küken: 1 Taler.
Aufgabe:

Genau 100 Tiere sollen für 100 Taler gekauft werden.

Wichtig, Verabredung der Variablen:
Für Gänse(G) ausgegebene Taler: x, Anzahl der Gänse: $u = \frac{x}{5}$,
Für Hennen(H) ausgegebene Taler: y, Anzahl der Hennen: $v = \frac{y}{3}$,
Für Küken(K) ausgegebene Taler: z, Anzahl der Küken: $3z$,

Wir formulieren zuerst eine *einfachere Aufgabe*:
Man soll bei gegebenen x, y immer z so wählen, dass die Anzahl der Tiere gleich der Anzahl der Taler ist. Das liefert das Gleichheitszeichen in der modernen Notation:

$$\text{Ausgegebene Taler} = x + y + z = \frac{x}{5} + \frac{y}{3} + 3z = \text{Zahl der gekauften Tiere.}$$

Da ganzzahlige Lösungen gesucht sind, vermeide Brüche durch die Substitution:

$$x = 5u, \;\; y = 3v \quad \text{also} \quad \underline{5u + 3v + z = u + v + 3z}.$$

Bestimme hiermit $z = z(u, v)$, sodass die Gleichheit *Taler* = *Tierzahl* immer gilt:

$$(5u - u) + (3v - v) = 3z - z, \quad \underline{z(u, v) := 2u + v}.$$

Kontrolle: Anzahl $= 5u + 3v + z(u, v) =^{ok} u + v + 3z(u, v) = 7u + 4v$.

Kleinste Lösung: Für 4 Taler bekommt man 4 Tiere, $0 \cdot G + 1 \cdot H + 3 \cdot K$.

Gewünscht wird $7u + 4v = 100$, also muss $0 < u$ durch 4 teilbar sein:

$$u = 4, 8, 12, 16 \;\Rightarrow\; 7u = 28, 56, 84, (102),$$

$$\Rightarrow\; v = \frac{100 - 7u}{4} = 18, 11, 4, -.$$

Ergebnis Taler: $x =20, 40, 60$, $y = 54, 33, 12$, $z = 26, 27, 28$
Anzahl Tiere: $u = \frac{x}{5} = 4, 8, 12$, $v = \frac{y}{3} = 18, 11, 4$, $3z = 78, 81, 84$
Antwort: Man kann also für 100 Taler so 100 Tiere kaufen:

4 Gänse, 18 Hennen und 78 Küken oder

8 Gänse, 11 Hennen und 81 Küken oder

12 Gänse, 4 Hennen und 84 Küken. (Beachte die regelmäßigen Unterschiede)

Schlussbeobachtung: Statt 100 kann man durch 4 teilbare Zahlen $n \geq 32$ erreichen.
4 Gänse und 3 Küken kosten so viel wie 7 Hennen, nämlich 21 Taler ($7u = 4v$).
Beginne mit $\frac{n}{4} = k > 7$ mal der kleinsten Lösung, also $0 \cdot G + k \cdot H + 3k \cdot K$, dann addiere (wiederholt): $4 \cdot G - 7 \cdot H + 3 \cdot K$ dazu: $4 \cdot G + (k-7) \cdot H + (3k+3) \cdot K$ usw..
Andere Anfangslösungen liefern andere n, etwa $k \cdot G + 0 \cdot H + 6k \cdot K$, gibt $n = 7k$.

Variation der antiken Aufgabe

Um die Überlegungen zu zeigen, die beim Lösen linearer Gleichungen auftreten können, möchte ich die antike Aufgabe etwas variieren. Statt 100 wähle ich andere Anzahlen von Münzen und Tieren.

(I) $$5u + 3v + z = 20$$

(II) $$u + v + 3z = 30$$

In geometrischen Aufgaben ist man oft an nicht negativen Lösungen (z.B. Längen) interessiert, dann liefert die erste Gleichung Ungleichung für u, v, die zweite für z:

$$0 \le u \le 4, \quad 0 \le v \le \frac{20}{3}, \quad 0 \le z \le 10.$$

In antiken Aufgaben wird meistens nach positiven ganzzahligen Lösungen gefragt. Man hat dann von vorn herein nur *endlich viele* Möglichkeiten:

$$u = 1, 2, 3, 4 \quad v = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad z = 1, \ldots, 10.$$

Das rechnerische Vorgehen ist dann immer,

> *ein Vielfaches einer Gleichung von der anderen Gleichung zu subtrahieren, so dass eine Variable den Koeffizienten* 0 *bekommt.*

Wir haben drei Möglichkeiten:

3(I)-(ii) $\quad 14u + 8v = 60 - 30$ oder $7u + 4v = 15$

5(II)-(I) $\quad 2v + 14z = 130$ oder $v + 7z = 65$

3(II)-(I) $\quad -2u + 8z = 70$ oder $-u + 4z = 35$

Wenn man an positiven Lösungen interessiert ist, ist die dritte Möglichkeit nicht gut, weil sie beliebig große Lösungen erlaubt. Die erste Möglichkeit liefert bessere Einschränkungen an u, v, als wir oben erhalten haben:

reell $\quad 0 \le u \le \frac{15}{7}, \quad 0 \le v \le \frac{15}{4},$

ganzzahlig $\quad u = 1, 2, \quad v = 1, 2, 3.$

Deshalb benutzen wir die erste der drei Gleichungen: $7u + 4v = 15$. Im ganzzahligen Fall findet man (wegen $u = 1, 2$) aus

$$v = \frac{1}{4}(15 - 7u) \text{ nur die Lösung } u = 1,\ v = 2,\ z = 20 - 5u - 3v = 9.$$

Im reellen Fall findet man für alle u mit $0 \le u \le \frac{15}{7}$ die nicht negativen Lösungen

$$u, \quad v = \frac{1}{4}(15 - 7u) \ge 0, \quad z = 20 - 5u - 3v = \frac{1}{4}(35 + u) \ge 0.$$

Ohne die Einschränkung an u geben diese Formeln alle (auch negativen) Lösungen.

Man erkennt an dieser Behandlung, dass *nicht* für alle ganzzahligen rechten Seiten der Gleichungen (I),(II) auch ganzzahlige (oder nicht-negative) Lösungen existieren.

Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

Textaufgaben, die ganzzahlige Lösungen von drei Gleichungen mit drei Unbekannten suchen, sind selten. Solche Gleichungen – mit Interesse an reellen Lösungen – treten z.B. bei der Bestimmung der Koeffizienten von Polynomen auf. Das Lösen linearer Gleichungen ist wohl das häufigste problemlösende Werkzeug der Mathematik – meistens ohne die Betonung ganzzahliger Lösungen wie in den Aufgaben aus der Antike. Zunächst ein Beispiel eines unlösbaren Gleichungssystems:

`(I)`	$5u + 3v + z = 20$
`(II)`	$u + v + 3z = 30$
`(III)`	$6u + 4v + 4z = 40$
denn `(I)+(II)-(III)`	$0u + 0v + 0z = 10$

Andererseits, wenn die dritte Gleichung Linearkombination der beiden anderen ist, so ist sie immer erfüllt, wenn man aus den ersten beiden Gleichungen (wie eben vorgeführt) unendlich viele Lösungen ausrechnet. Beispiel:

`(I)`	$5u + 3v + z = 20$
`(II)`	$u + v + 3z = 30$
`(III)`	$6u + 4v + 4z = 50$
`(I)+(II)-(III)` gilt immer	$0u + 0v + 0z = 0$

Wenn die drei linken Seiten sich *nicht* zu dem Null-Term $0u + 0v + 0z$ kombinieren lassen, dann hat das System immer genau eine Lösung. Indem man das Verfahren des vorhergehenden Beispiels zweimal anwendet, bekommt man zunächst zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die man dann wie auf Seite 3 löst. Beispiel:

`(I)`	$5u + 3v + z = 20$
`(II)`	$u + v + 3z = 30$
`(III)`	$4u + 4v + z = 40$
`(IV)` $= \frac{1}{2}$`(3(I)-(ii))`	$7u + 4v = 15$
`(V)` $=$ `3(III)-(ii)`	$11u + 5v = 90$
`4(V)-5(IV)`	$9u + 0v = 285 \quad \text{oder} \quad 3u = 95$

also $$u = \frac{95}{3},\; v = \frac{1}{4}(15 - 7u) = \frac{1}{12}(45 - 7 \cdot 95),\; z = 20 - 5u - 3v.$$

Noch einmal:
Wenn die drei linken Seiten sich *nicht* zu dem Null-Term $0u + 0v + 0z$ kombinieren lassen, dann kann das vorgeführte Verfahren immer benutzt werden, um die *eine* existierende Lösung zu berechnen.

Der Text G4 enthält die vollständige Theorie der n-dimensionalen linearen Gleichungssysteme. Aber die linearen Gleichungen mit ein, zwei oder drei Variablen kann man schon durch Nachmachen von vorgeführten Beispielen bearbeiten.

Veranschaulichung der Lösungsmengen linearer Gleichungen in einem Koordinatensystem

Für viele Menschen ist es eine große Erleichterung, wenn mathematische Probleme oder Verfahren durch Bilder veranschaulicht werden können. Im Schulunterricht werden schon früh Punkte in Koordinatensysteme gezeichnet. Für Punkte in der Ebene braucht man für jeden Punkt zwei Koordinaten. Meistens wird die horizontale Koordinate mit x bezeichnet, die vertikale Koordinate mit y. Offensichtlich passt das gut zum Lösen linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten - man muss ja nur die Lösungswerte der beiden Unbekannten als die Koordinaten von Punkten in einer Ebene mit Koordinatensystem ansehen.

Falls das Gleichungssystem nur eine Lösung hat, bekommt man nur die Koordinaten eines Punktes. Das ist zu wenig für ein erklärendes Bild. Interessanter wird es, wenn man die unendlichen Lösungsmengen für jede der beiden Gleichungen ansieht. Diese Lösungsmengen sind – mit der Interpretation als "Koordinaten von Punkten" –

gerade Linien!

Zuerst treten solche geraden Linien wohl beim Zeichnen der linearen Funktion

$$y = m \cdot x + y_0$$

auf (blau). Schreibt man dies als

$$m \cdot x - 1 \cdot y + y_0 = 0,$$

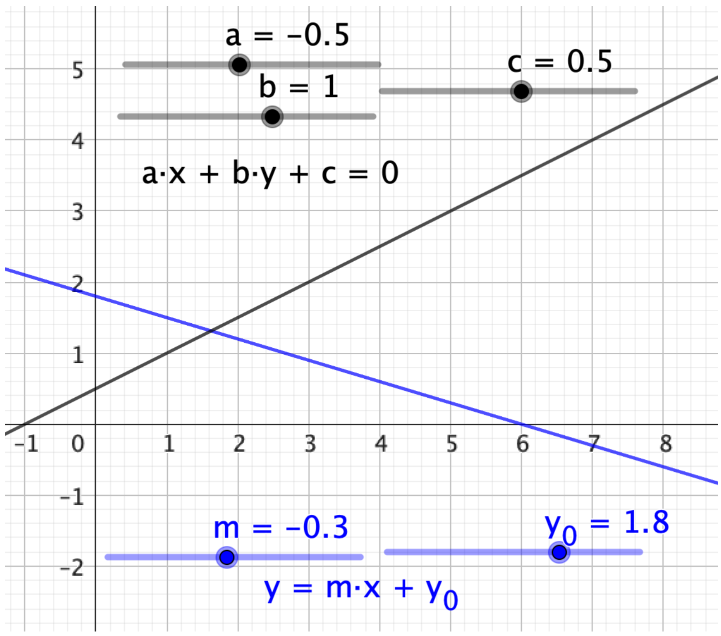
so liegt die Verallgemeinerung auf

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

nahe.

Hat man nun ein Gleichungssystem mit zwei (einzeln lösbaren) Gleichungen, so hat **jede Gleichung eine Gerade als Lösungsmenge**.

Damit erhalten die drei Fälle, die beim Lösen auftreten können, eine sehr anschauliche Interpretation:



Falls nur eine Lösung existiert, schneiden sich die Geraden im Lösungspunkt.
Falls keine Lösung existiert, sind die Geraden parallel und verschieden.
Falls es unendlich viele Lösungen gibt, sind die beiden Lösungsgeraden gleich.