Formeln für die Nullstellen kubischer Polynome entdeckt im 16. Jahrhundert in Norditalien

(Version 6.10.2025)

Historische Bemerkungen

Quadratische Gleichungen, die zu "Lösungsformeln" mit Wurzeln aus negativen Zahlen führten, gab es lange vor dem 16. Jahrhundert, aber diese Formeln wurden nicht als Lösungen interpretiert sondern diese quadratischen Gleichungen hatten eben keine Lösungen.
In den Lösungsformeln für die Nullstellen kubischer Polynome tauchten zum ersten Mal Terme auf, die über Wurzeln aus negativen Zahlen als Ergebnis reelle Zahlen lieferten. Deshalb beginnt mit dieser Entdeckung die Geschichte der komplexen Zahlen. Die Entwicklung verlief zunächst sehr langsam, wohl weil diese "Zahlen" den Mathematikern nicht recht geheuer waren. Ab 1800 setzte sich die Interpretation als *zweidimensionale Zahlen* für die bis dahin unheimlichen Objekte durch. Das führte in den nächsten 50 Jahren zu einer erstaunlich rasanten Entwicklung der komplexen Analysis. Daher sind in meiner Vorstellung die komplexen Zahlen erst etwa seit 1800 als "Zahlen" akzeptiert.
Moderne Texte zu den Nullstellenformeln der kubischen Polynome setzen die Kenntnis der komplexen Zahlen voraus, auch deshalb, weil der entscheidende Trick aus dem 16. Jahrhundert nicht nur für reelle Polynome funktioniert, sondern auch die Nullstellen komplexer Polynome liefert. Aber, da die Formeln ja ohne Kenntnis der Eigenschaften der komplexen Zahlen entdeckt wurden, werde ich im folgenden diese Entdeckung mit nur äußerst spärlicher Benutzung der komplexen Zahlen beschreiben und vorher erklären, was ich benutze. Ich füge Bemerkungen ein, die den Vergleich mit der Literatur erleichtern sollen und hänge am Ende einen Abschnitt über komplexe Polynome an.

Der Text beginnt damit, durch elementare Umformungen das Polynom in eine möglichst einfache Form zu bringen, wobei die Nullstellen sich entweder gar nicht ändern oder nur translatiert oder skaliert werden. Im Falle reeller Polynome führt das dazu, dass man "nur noch" die Nullstellen von zwei von einem Paramter Q abhängigen Polynomen

$$P_+(x) = x^3 + 3x + Q, \quad P_-(x) = x^3 - 3x + Q, \quad Q \in \mathbb{R}$$

beschreiben muss. Der dafür benötigte Trick ist sicher erst nach langwierigem Experimentieren gefunden worden. Ich kann ihn nicht als Ergebnis zielstrebigen Nachdenkens auftreten lassen, aber ich werde eine "experimentelle" Situation schildern, von der aus man in nur einem weiteren, einzeiligen Schritt zum Erfolg kommt.

Die menschliche Seite der Entdeckungs*geschichte* ist zu kompliziert, um hier zusammengefasst zu werden. Unter dem Link:
https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth
findet man in Algebra 10, S.111 - 120, eine lesenswerte Behandlung.

Polynomvereinfachung mit Nullstellenkontrolle

Ein allgemeines Polynom vom Grad 3

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \quad a_3 \neq 0$$

kann ohne Änderung der Nullstellen durch a_3 dividiert werden. Für den Graph bedeutet das eine *Stauchung in Richtung der vertikalen Achse.* Mit neuen Bezeichnungen haben wir dann

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c, \quad a, b, c, z \in \mathbb{R} \text{ im reellen Fall.}$$

Bemerkung: $a, b, c, z \in \mathbb{C}$ im komplexen Fall.

Mit einer *Verschiebung in Richtung der horizontalen Achse* um r

$$P(z - r) = z^3 + (a - 3r)z^2 + (b + 3r^2 - 2ar)z + (c - r^3 + ar^2 - br)$$

und der Wahl $r = a/3$ kann der Koeffizient des quadratischen Terms zu 0 gemacht werden. Die üblichen Bezeichnungen für die so im Reellen wie im Komplexen erreichte Standardform sind:

$$P(z) = z^3 + pz + q, \quad p, q \in \mathbb{R}, \text{ bzw. } p, q \in \mathbb{C}.$$

Zwei Fragen zu Nullstellen können (auch komplex) schon beantwortet werden.

P hat eine **3-fache** Nullstelle $\quad \Leftrightarrow \quad P(z) = a_3(z - z_0)^3$.

Da die Summe der Nullstellen den Koeffizienten a von z^2 ergibt, also 0 in der Standardform, folgt aus einer 2-fachen Nullstelle z_0 :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - z_0)^2(z + 2z_0) \\ &= z^3 - 3(z_0)^2 z + 2(z_0)^3 \\ &= z^3 + pz + q \end{aligned}$$

P hat also eine **2-fache** Nullstelle $z_0 = -\frac{3q}{2p}$, falls $D := 4p^3 + 27q^2 = 0$.

Der Term D, auf dessen konzeptionelle Definition ich verzichte, heißt *Diskriminante.*

Im Fall $p = 0$ muss im reellen Fall nur die dritte Wurzel aus $-q$ gezogen werden (im komplexen Fall die drei dritten Wurzeln). Wir setzen ab jetzt im reellen Fall $p \neq 0$ voraus und können dann eine weitere Vereinfachung durch die Variablen*skalierung* $z = (\frac{|p|}{3})^{\frac{1}{2}} x$ erreichen. Das bedeutet für den Graphen eine *Stauchung in Richtung der horizontalen Achse.* Bisher haben wir also wirklich nur einfache Änderungen der Polynome vorgenommen und müssen nun nur noch

zwei Polynome, die *nur noch von einem Parameter abhängen*, untersuchen.

(Der Faktor 3 im Nenner erscheint hier willkürlich, er erleichtert am Ende die Diskussion. Man könnte statt 3 eine weitere Variable benutzen, aber ohne Gewinn.)

Diese Skalierung gibt:

$$P\Big(\big(\frac{|p|}{3}\big)^{\frac{1}{2}}x\Big) = \big(\frac{|p|}{3}\big)^{\frac{3}{2}}x^3 + \frac{p}{3}\big(\frac{|p|}{3}\big)^{\frac{1}{2}}3x + q,$$

falls $p > 0$
$$= \big(\frac{|p|}{3}\big)^{\frac{3}{2}} \cdot \Big(x^3 + 3x + q \cdot \big(\frac{3}{|p|}\big)^{\frac{3}{2}}\Big),$$

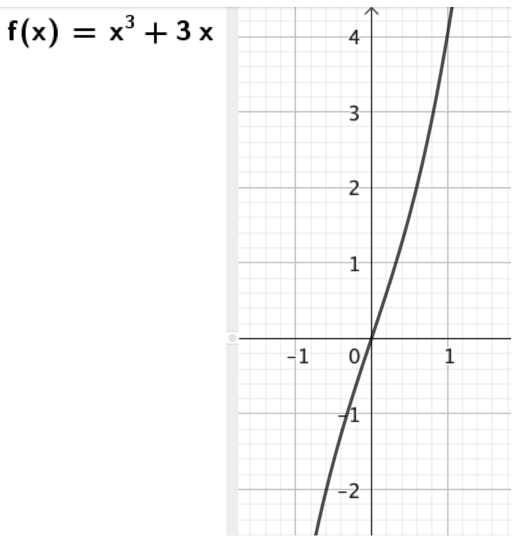
falls $p < 0$
$$= \big(\frac{|p|}{3}\big)^{\frac{3}{2}} \cdot \Big(x^3 - 3x + q \cdot \big(\frac{3}{|p|}\big)^{\frac{3}{2}}\Big).$$

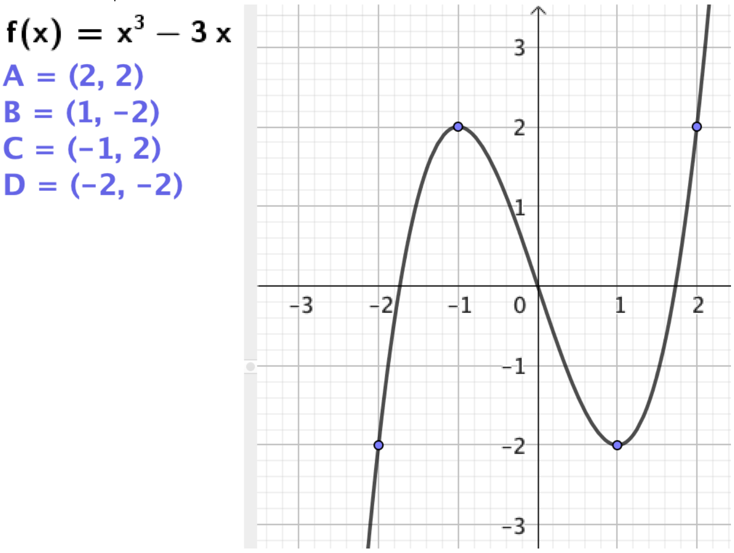
Wir müssen also die Nullstellen der beiden nur von *einem* Parameter $Q = q \cdot \big(\frac{3}{|p|}\big)^{\frac{3}{2}}$ abhängigen Polynome P_+, P_- bestimmen:

Falls $p > 0$ $\quad P_+(x) = x^3 + 3x + Q,$

falls $p < 0$ $\quad P_-(x) = x^3 - 3x + Q.$

Die Graphen von P_+, P_- im Falle $Q = 0$:





Schon bevor man Formeln für die Nullstellen hat, sieht man:
Das Polynom $x \mapsto x^3 + 3x$ ist streng monoton, P_+ hat also für jedes Q genau eine reelle Nullstelle.
Das Polynom $x \mapsto x^3 - 3x$ hat bei $x = \pm 1$ die lokalen Extremwerte ∓ 2. Daher hat P_- für $|Q| < 2$ <u>*drei*</u> reelle Nullstellen und für $|Q| > 2$ <u>*eine*</u> reelle Nullstelle. Für $Q = \pm 2$ faktorisiert P_- explizit: $x^3 - 3x \pm 2 = (x \mp 1)^2(x \pm 2)$.
Multiplikation der Nullstellen von P_+ oder P_- mit $\big(\frac{|p|}{3}\big)^{\frac{1}{2}}$ liefert die Nullstellen der Standardform $P(z) = z^3 + pz + q$.

Zusammenhang mit der Diskriminante:
1.) Die beiden Polynome mit doppelter Nullstelle, $P(x) = x^3 - 3x \pm 2$, haben $D = 0$.
2.) $p < 0$ und $Q^2 = 27q^2/|p|^3 < 4$ ist gleichbedeutend mit $D < 0$,
denn $27q^2 - 4|p|^3 = 27q^2 + 4p^3 < 0$.
$D < 0$ ist das übliche Kriterium für drei reelle Nullstellen.

Formeln für die Nullstellen kubischer Polynome

Solche Formeln wurden im 16. Jahrhundert von italienischen Mathematikern entdeckt. Die Geschichte ist dramatisch, auf der menschlichen Seite mit Wettstreit, Geheimhaltung und gebrochenen Versprechen, auf der inhaltlichen Seite wegen der erfolgreichen, obwohl rätselhaften Verwendung von Quadratwurzeln *negativer* Zahlen, die schließlich zu drei reellen Nullstellen führte. Dies ist die erste mathematische Entdeckung der Neuzeit, die über das Wissen der griechischen Mathematiker hinausging. Man sollte also keine ganz naheliegende Herleitung erwarten.

Wir stellen die binomische Formel für dritte Potenzen etwas um und betrachten sie neben den Polynomen P_+, P_-. Man kann sich vorstellen, dass das eine Situation ist, die bei den Entdeckungsexperimenten aufgetreten ist. In der binomischen Formel tritt der Term $(u+v)$ in der dritten und der ersten Potenz auf, genau wie in den Polynomen die Variable x. Wenn das perfekt zusammenpassen soll, muss im Falle $p > 0$ gelten $uv = -1$ (bzw. $v = -\frac{1}{u}$) und im Falle $p < 0$ braucht man $uv = +1$ (bzw. $v = +\frac{1}{u}$).

Binomische Formel: $\quad (u+v)^3 - 3uv(u+v) = u^3 + v^3$

$P_+(x) = 0: \quad -Q = x^3 + 3x$

$P_-(x) = 0: \quad -Q = x^3 - 3x$

Dieser Vergleich liefert dann

$$-Q = x^3 \pm 3x = (u+v)^3 \pm 3(u+v) = u^3 + v^3 = u^3 \mp u^{-3}.$$

Als diese Zeile erreicht war, müssen die Entdecker an Wunder geglaubt haben, denn dies ist eine quadratische Gleichung für u^3! Nochmal ausführlich aufgeschrieben:

$$p > 0: \; P_+(u - \frac{1}{u}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(u^3\right)^2 + Q \cdot u^3 - 1 = 0, \quad u^3_{1,2} = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + 1},$$

$$p < 0: \; P_-(u + \frac{1}{u}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(u^3\right)^2 + Q \cdot u^3 + 1 = 0, \quad u^3_{1,2} = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - 1}.$$

Mit der Entdeckung dieser quadratischen Gleichungen, deren Lösung im 16. Jahrhundert kein Problem darstellte, ist die wesentliche Schwierigkeit überwunden. Wegen der weitreichenden Folgen, die diese Entdeckung hatte, möchte ich sie noch etwas anders beleuchten. Wir bezeichnen u als Hilfsgröße, aus der man die Nullstellen ausrechnen kann und über die man *schon weiß*, dass u^3 Lösung einer quadratischen Gleichung ist. Dann ist $z = u + \frac{s}{u}$ für jedes s eine Transformation, aus der u mit der *quadratischen Gleichung* $u^2 - z \cdot u + s = 0$ aus z berechnet werden kann. Daher könnte man hoffen, dass Einsetzen dieser Transformation in das kubische Standardpolynom für *geeignetes* s auf eine quadratische Gleichung für u^3 führt. Und tatsächlich:

$$P(u + \frac{s}{u}) = (u + \frac{s}{u})^3 + p(u + \frac{s}{u}) + q = u^3 + (p+3s)u + s\frac{p+3s}{u} + \frac{s^3}{u^3} + q,$$

sodass die Wahl $s = -\frac{p}{3}$ liefert: $\quad P(u + \frac{s}{u}) = 0 \;\Rightarrow\; (u^3)^2 + q \cdot u^3 + s^3 = 0.$

Dieser Trick funktioniert sogar ganz allgemein im komplexen Fall !

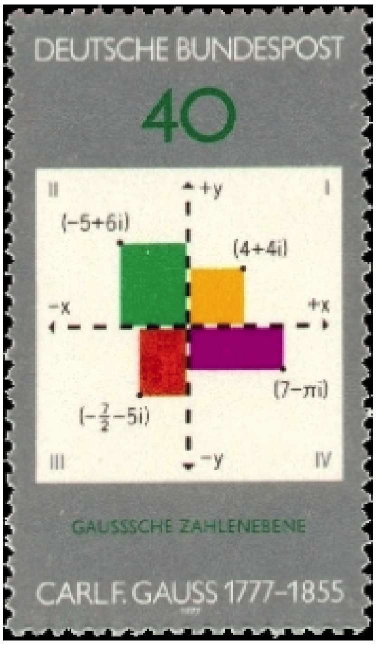
Wir diskutieren im reellen Fall die Lösungen der quadratischen Gleichung.
Im Fall P_+ ist das Produkt der Lösungen der quadratischen Gleichung $u_1^3 \cdot u_2^3 = -1$ und beide Lösungen $u_{1,2}^3$ sind *reell*. Für deren *reelle* dritte Wurzeln ist

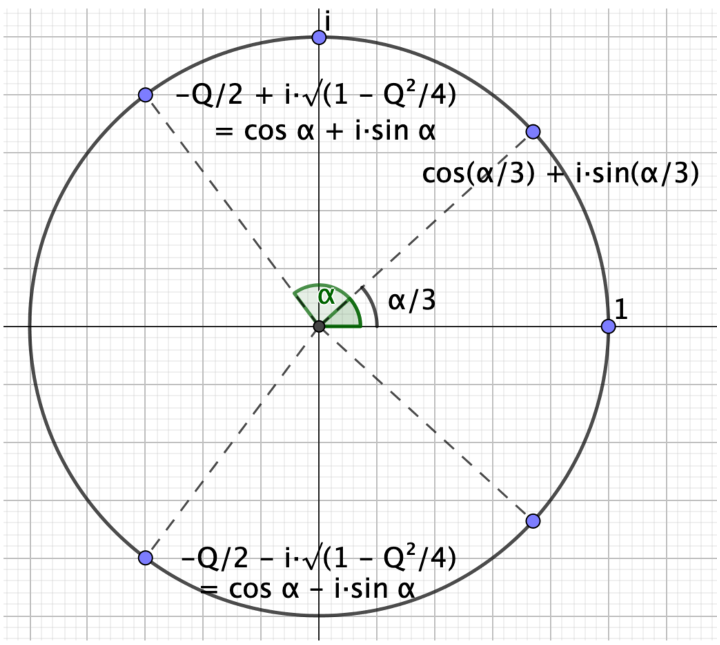
$$u_1 - \frac{1}{u_1} = u_1 + u_2 = u_2 - \frac{1}{u_2} \in \mathbb{R},\ P_+(u_1 - \frac{1}{u_1}) = 0,$$

man findet die eine reelle Lösung. (Literaturvergleich: Diskriminante $D > 0$.)
Im Fall P_- ist das Produkt der Lösungen der quadratischen Gleichung $u_1^3 \cdot u_2^3 = +1$.
Falls $|Q| > 2$, so sind diese beiden Lösungen *reell* und und deren *reelle* dritte Wurzeln $u_1,\ u_2 = \frac{1}{u_1}$ liefern die *eine* reelle Nullstelle $u_1 + u_2$ von P_-. (Wieder: $D > 0$.)
In beiden Fällen, also bei $D > 0$, ist auch ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen vorhanden. Darauf gehe ich später ein.
Falls $|Q| = 2$, ist oben explizit die doppelte und die einfache Nullstelle von P_- angegeben und vorher auch schon direkt für die Standardform.

Bis hierhin liefert das Verfahren des 16. Jahrhunderts *Formeln für die reellen Nullstellen* kubischer Polynome mit $D > 0$ *ohne* Einsatz komplexer Zahlen!!

Falls $|Q| < 2$ ist, also im Fall der *drei* reellen Nullstellen (Literaturvergleich: $D < 0$), sind die Lösungen der quadratischen Gleichung komplex. Aber da die komplexen Zahlen zum Zeitpunkt der Entdeckung dieser Lösungsformeln gar nicht bekannt waren, muss man auch nicht mehr über die komplexen Zahlen wissen, als die Post zum 200sten Geburtstag von Gauss der Allgemeinheit mit der abgebildeten Briefmarke erklärt hat. Nämlich:





In einem rechtwinkligen Koordinatensystem betrachtet man die beiden Einheitspunkte $(1|0), (0|1)$ als die Zahlen 1 und "$\mathbf{i}$" und komplexe Zahlen $a + \mathbf{i} \cdot b$ werden wie auf der Briefmarke die Punkte $(a|b)$. Die Lösungen unserer quadratischen Gleichung

$$p < 0, |Q| < 2: \qquad u_{1,2}^3 = -\frac{Q}{2} \pm \mathbf{i} \cdot \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}, \quad \mathbf{i}^2 = -1$$

liefern daher ein Punktepaar symmetrisch zur reellen Achse auf dem Einheitskreis. Definiere einen Winkel α durch $\cos\alpha = -\frac{Q}{2}, \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}$, vergleiche die Zeichnung auf der Vorseite. Offenbar haben wir eine gute Veranschaulichung, wenn wir einsehen können, dass eine dritte Wurzel aus der komplexen Zahl $\cos\alpha + \mathbf{i} \cdot \sin\alpha$ mit Winkeln leicht angebbar ist, Beh.: $(\cos\frac{\alpha}{3} + \mathbf{i} \cdot \sin\frac{\alpha}{3})^3 = \cos\alpha + \mathbf{i} \cdot \sin\alpha$. Wir benötigen dafür die (in Text A6, Seite 2 erklärten) natürlich reellen Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Und wir rechnen mit der "imaginären Einheit" $\mathbf{i}$ wie im 16. Jahrhundert: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1$. Das liefert:

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin\varphi)^3 &= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \mathbf{i} \cdot 2\cos\varphi\sin\varphi)(\cos\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin\varphi) \\
&= (\cos 2\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin 2\varphi)(\cos\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin\varphi) \\
&= \cos 3\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin 3\varphi, \\
\text{oder Zeile 1 ausmultipliziert:} &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi + \mathbf{i} \cdot (-4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi).
\end{aligned}$$

Wir finden wie angekündigt: *"Dritte Potenzen verdreifachen Winkel"*.
Wir finden auch die bekannten Additionstheoreme für $\cos(3\varphi)$ und $\sin(3\varphi)$ wieder, was vielleicht das Vertrauen in das Rechnen mit $\mathbf{i}$ stärkt.

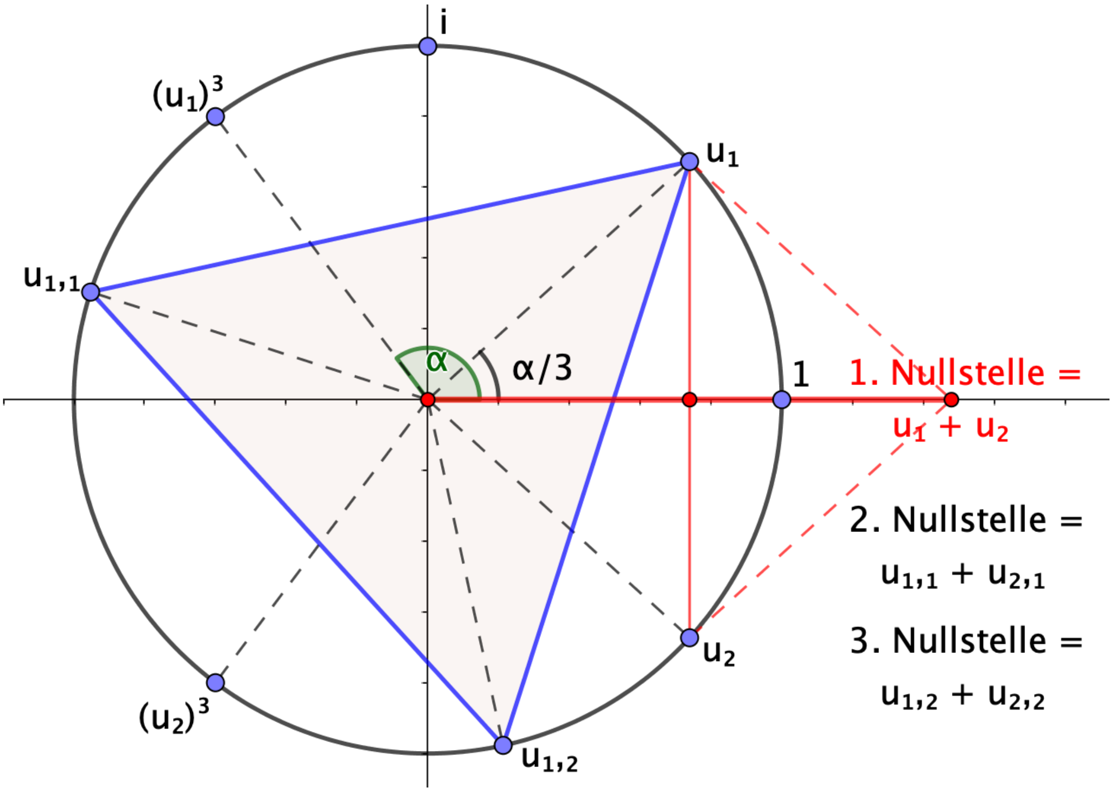
Dieselbe Rechnung zeigt uns auch:

$$\begin{aligned}
(\cos(\varphi + \frac{2}{3}\pi) + \mathbf{i} \cdot \sin(\varphi + \frac{2}{3}\pi))^3 &= \cos(3\varphi + 2\pi) + \mathbf{i} \cdot \sin(3\varphi + 2\pi) \\
(\cos(\varphi + \frac{4}{3}\pi) + \mathbf{i} \cdot \sin(\varphi + \frac{4}{3}\pi))^3 &= \cos(3\varphi + 4\pi) + \mathbf{i} \cdot \sin(3\varphi + 4\pi) \\
&= \cos 3\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin 3\varphi.
\end{aligned}$$

Wir haben eine sehr übersichtliche geometrische Zusammenfassung:

> *Die drei dritten Wurzeln einer komplexen Zahl auf dem Einheitskreis bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Einheitskreis als Umkreis.*

Das Bild auf der folgenden Seite zeigt, wie dies Ergebnis auf die Nullstellenbestimmung (im Fall $p < 0$, $|Q| < 2$) angewendet wird.



Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$(u_1)^3 = -\frac{Q}{2} + \mathbf{i} \cdot \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}} = \cos\alpha + \mathbf{i} \cdot \sin\alpha,$$

$$(u_2)^3 = -\frac{Q}{2} - \mathbf{i} \cdot \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}} = \cos\alpha - \mathbf{i} \cdot \sin\alpha,$$

$$u_1 = \cos(\frac{\alpha}{3}) + \mathbf{i} \cdot \sin(\frac{\alpha}{3}), \quad u_2 = \cos(\frac{\alpha}{3}) - \mathbf{i} \cdot \sin(\frac{\alpha}{3}).$$

Die dritten Wurzeln aus $(u_1)^3$ sind die Ecken des gleichseitigen Dreiecks $u_1, u_{1,1}, u_{1,2}$. Von den dritten Wurzeln aus $(u_2)^3$ ist nur u_2 gezeichnet. Zusammen mit den beiden anderen dritten Wurzeln $u_{2,1}, u_{2,2}$ hat man ein gleichseitiges Dreieck, das aus dem ersten durch Spiegelung an der horizontalen Achse ensteht.
Die drei reellen Nullstellen von P_- erhält man als

In rot gezeichnet: $$u_1 + u_2 = 2\cos(\frac{\alpha}{3}),$$

$$u_{1,1} + u_{2,1} = 2\cos(\frac{\alpha + 2\pi}{3}),$$

$$u_{1,2} + u_{2,2} = 2\cos(\frac{\alpha + 4\pi}{3}).$$

Alternativ zu den komplexen Zahlen kann man die Nullstellen kubischer Polynome auch mit triogonometrischen Funktionen ausrechnen, bzw. unser mit komplexen Zahlen erhaltenes Ergebnis verifizieren:

Nullstellen von $P_-(x) = x^3 - 3x + Q$ trigonometrisch bestimmen:

Durch $\cos\alpha = -\frac{Q}{2}$ ist $\alpha \in [-\pi, \pi]$ bis auf das Vorzeichen bestimmt, also $\alpha/3, (\alpha + 2\pi)/3, (\alpha + 4\pi)/3$ auch.
Damit sind $x_1 = 2\cos(\alpha/3), x_{1,1} = 2\cos((\alpha + 2\pi)/3), x_{1,2} = 2\cos((\alpha + 4\pi)/3)$ durch Q *eindeutig* bestimmt. Das oben wiederholte Additionstheorem

$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$$

zeigt nun, dass x_1, $x_{1,1}$, $x_{1,2}$ Nullstellen von P_- sind, denn:

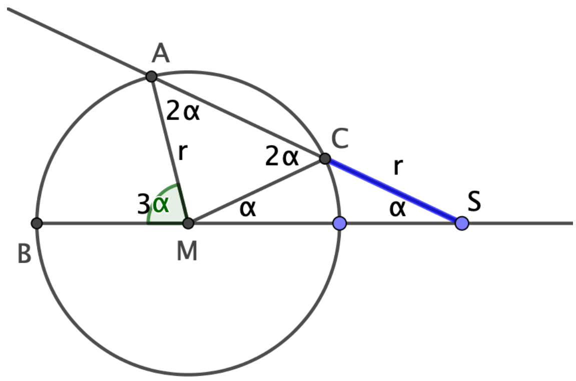
$$P_-(2\cos(\alpha/3)) = 8\cos^3(\alpha/3) - 6\cos(\alpha/3) + Q = 2\cos(3 \cdot \alpha/3) + Q = 0.$$

Ein elementarer Anhang:

Geometrische Drittelung von Winkeln nach Archimedes

Über das Dritteln von Winkeln lernt man, dass diese Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden kann. Das hat manchmal zu der irrtümlichen Ansicht geführt, dass *nur* Konstruktionen mit Zirkel und Lineal *exakte* Konstruktionen sind. Deshalb füge ich die Winkeldreiteilung des Archimedes hinzu, als Beispiel für eine *exakte* geometrische Konstruktion, die *nicht* mit Zirkel und Lineal ausführbar ist:

Der Winkel AMB ist gegeben und soll gedrittelt werden.
Dazu soll der Kreis vom Radius r um M durch A, B benutzt werden, zusammen mit einem Strahl (später SA), auf dem das Anfangsstück der Länge r markiert ist.
Zur Lösung wird der Strahl so bewegt, dass er durch A geht und sein Anfangspunkt S auf der Geraden BM läuft. Die richtige Lage ist erreicht, wenn der Schnittpunkt C mit dem Kreis den Abstand r von S hat. Der gegebene Winkel ist dann dreimal so groß wie der Winkel CSM, man hat jenen gedrittelt!



Dreiteilung des Winkels AMB nach Archimedes

Die Idee von Archimedes läßt sich verwenden, um mechanische Geräte zur Winkeldreiteilung zu konstruieren. Unter dem Link

https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth

kann man in “Anschauliche Geometrie 7”, Seite 121 solch ein Gerät sehen.
Man kann also Winkel mechanisch – theoretisch exakt – dritteln, nur eben nicht mit Zirkel und Lineal.

Es folgt noch eine Zusammenfassung, die den Umgang mit komplexen Zahlen voraussetzt.

Nullstellen komplexer kubischer Polynome

Wegen Seite 2 können wir das Polynom in der Standardform annehmen:

$$P(z) = z^3 + pz + q, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

Nach Seite 4 liefert die Substitution $z = u - \frac{p}{3u}$ die quadratische Gleichung:

$$P(u - \frac{p}{3u}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (u^3)^2 + q \cdot u^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Komplexen Zahlen $z \neq 0$ haben zwei gleichberechtigte Quadratwurzeln $w_{1,2} = \pm\sqrt{w}$, Vorzeichenprobleme wie im Reellen gibt es nicht. Daher kann man die Lösungen der quadratischen Gleichung ohne Fallunterscheidungen hinschreiben:

$$(u_{1,2})^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4 \cdot 27}}, \quad D = 27q^2 + 4p^3.$$

Von Seite 6 wissen wir

$$(\cos\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin\varphi)^3 = \cos(3\varphi) + \mathbf{i} \cdot \sin(3\varphi)$$

Daher sind die dritten Potenzen der folgenden, sogenannten *dritten Einheitswurzeln* gleich 1:

$$\zeta = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathbf{i} \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) \;=\; -\frac{1}{2} + \mathbf{i} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}, \qquad \zeta^3 = 1$$

$$\bar{\zeta} = \cos(\frac{2\pi}{3}) - \mathbf{i} \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) \;=\; -\frac{1}{2} - \mathbf{i} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}, \qquad \bar{\zeta}^3 = 1$$

Aus $v^3 = w$ folgt daher $(v\zeta)^3 = w,\ (v\bar{\zeta})^3 = w$ und diese drei dritten Wurzeln aus w bilden in der komplexen Ebene ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt 0.
Insbesondere haben wir drei dritte Wurzeln aus den Lösungen$(u_1)^3, (u_2)^3$ der quadratischen Gleichung, etwa

$$u_1, \zeta u_1, \bar{\zeta} u_1 \;\text{ und }\; u_2, \zeta u_2, \bar{\zeta} u_2$$

Sowohl aus den ersten Dreien wie aus den letzten Dreien gibt die Substitution

$$z = u - \frac{p}{3u}$$

die drei Nullstellen des gegebenen Polynoms $P(z) = z^3 + pz + q$.

Will man dies allgemeine Ergebnis auf reelle p, q spezialisieren, so verläuft die Diskussion nicht viel anders als oben:
Ist $D > 0$, so sind die Lösungen der quadratischen Gleichung reell und deshalb ist auch eine dritte Wurzel reell und diese liefert mit $z = u - \frac{p}{3u}$ die eine reelle Nullstelle von P. Die beiden anderen dritten Wurzeln liefern das Paar konjugiert komplexer Nullstellen.
Ist $D < 0$, so sind die Lösungen der quadratischen Gleichung komplex und deren dritte Wurzeln auch. Dass sie mit $z = u - \frac{p}{3u}$ Nullstellen des Polynoms liefern, wissen wir, aber, dass sie reell sind, ist in der Diskussion auf Seite 7 übersichtlicher als hier.