

Funktionen – was kann man mit ihnen machen?

(Version 19.7.2026)

Den Beginn der Behandlung von Funktionen im Schulunterricht stelle ich mir etwa so vor wie Kapitel 5 in Algebra 8 von Barth und Kollegen, siehe:

<https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth>

Vor dem Hintergrund des gegenwärtigen Unterrichts muss aber zusätzlich betont werden, ein wie enorm leistungsfähiges Hilfsmittel die Funktionen sind, selbstverständlich in Verbindung mit dem symbolischen Rechnen. Die folgenden Beispiele gehen einerseits über zur Zeit in der Schule behandelte Themen hinaus, andererseits sind nur die binomischen Formeln zusammen mit Ungleichungen das benötigte Handwerkszeug. Der folgende Text zeigt daher den Unterrichtenden, was sie mit den Werkzeugen des Unterrichts erklären könnten.

Das vorgeführte Material liegt vor der Differentialrechnung. Die auftretenden Tangenten werden ohne Grenzwerte gefunden, weil die behandelten Graphen an jeder Stelle *zwischen* einem Kreis und dessen Tangente verlaufen.

Seite 2: Was in den Texten T3,T4,T5 schon zu Funktionen gesagt wurde

Seite 3-5: Funktionen – definiert durch Terme, veranschaulicht durch ihre Graphen

Seite 6: Tangenten und Verschiebungen

Seite 8: Tangenten und Parabeln

Seite 9: Erste Beweise zum Verhalten von Tangenten

Seite 10: Kubische Potenz und ihre Steigungsfunktion

Seite 11: Umkehrfunktionen streng monotoner Funktionen

Seite 12 - : Funktionen erleichtern das Verständnis von Berechnungsverfahren

Seite 15: **Zwischentext**

Seite 16: Alternierendes Wurzelziehen mit der dritten binomischen Formel

Seite 17: Berührungsvergleich: Termrechnungen mit Parabel und Kreis

Seite 18: Variationen

Häufig erfolgreicher Tip für Ungleichungen zwischen Termen:

Um $F \geq T$ zu beweisen, versuche man, mit den binomischen Formeln zu zeigen:

$$F - T = (C_1 - C_2)^2 \geq 0.$$

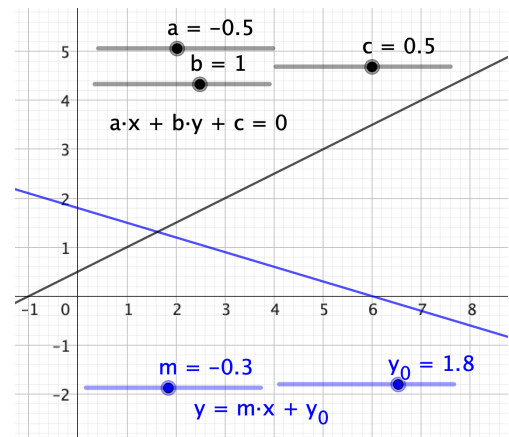
Beispiel: Der Graph einer Funktion $f(x)$ liegt oberhalb der Tangente $t_a(x)$, wenn wir zeigen können (z.B. Seite 8 und Seite 10)

$$f(x) - t_a(x) = (\text{positiver Term}) * (x - a)^2 \geq 0.$$

Was in den Texten T3,T4,T5 zu Funktionen gesagt wird

Lineare Funktionen

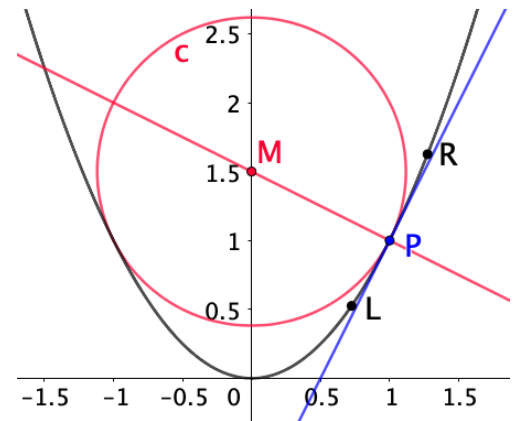
$\ell(x) = m \cdot x + y_0 = m \cdot (x - a) + y_a$
oder lineare Gleichungen $\ell(x) = 0$ liegen antiken Textaufgaben zugrunde. In (fast?) allen numerischen Programmen müssen lineare Gleichungen als Teilaufgaben gelöst werden. Im Schulbereich beruhen die einfachsten Modellierungen auf linearen Funktionen. Sie beschreiben Geraden in Koordinatensystemen und das nebenstehende Bild tritt wohl in jedem Schulunterricht auf, es verbindet lineare Gleichungen mit einem anschaulichen Bild. (Siehe Text T3)



Quadratische Funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q) \\ = a(x - x_1)(x - x_2)$$

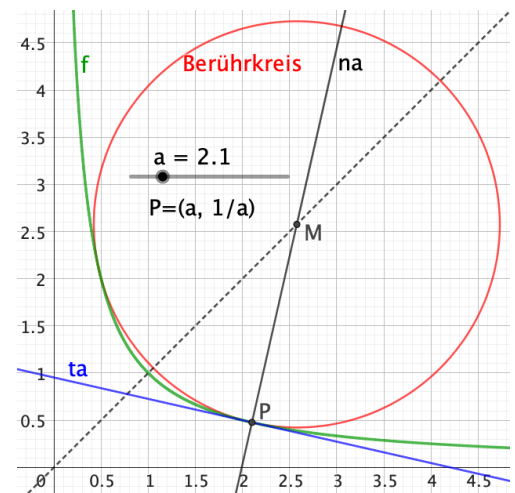
treten als Produkte linearer Funktionen schon bei Flächeninhalten von Rechtecken auf. Ihre Graphen sind nach dem Kreis die ersten Kurven, deren Tangenten betrachtet werden. Ich finde sehr wichtig, dass diese neuen Tangenten mit den schon bekannten Kreistangenten in Beziehung gebracht werden, wie in nebenstehendem Bild. (Siehe Text T4)



Inverse Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ später } g(x) = \frac{a}{x - b} + c,$$

treten in der Ähnlichkeitslehre zur Beschreibung von Verhältnissen auf. Auch bei deren Graphen können Tangenten durch Vergleich mit Kreisen bestimmt werden. Zu dieser anschaulichen Vorstufe der Analysis muss man nur die binomischen Formeln beherrschen. Um den enormen Fortschritt des symbolischen Rechnens noch einmal zu betonen: Ich weiß nicht, wie man vor Viëta den Vergleich zwischen Kreis und Graph begründet hätte. (Siehe Text T5)



Die Kenntnis dieser Beispiele wird im Folgenden vorausgesetzt.

Funktionen – definiert durch Terme, veranschaulicht durch ihre Graphen

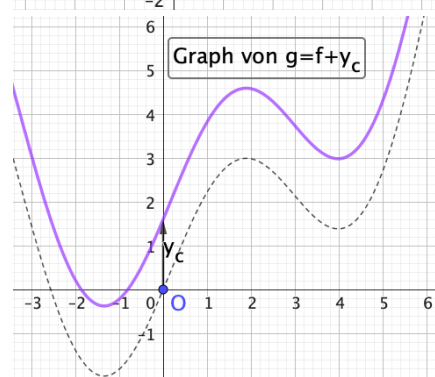
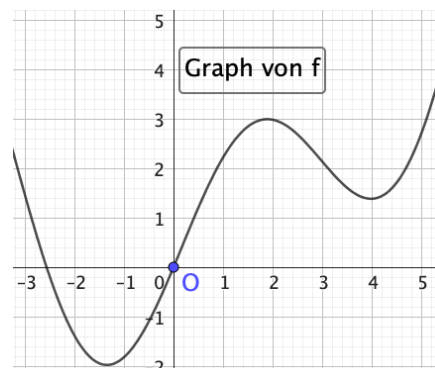
Zum Arbeiten mit Funktionen gehört ein grundlegendes Verständnis des Zusammenspiels zwischen ihrer algebraischen Definition und ihrem geometrischen Bild, dem Bild ihres Graphen. Ich möchte das auf Seite 5 für die kubischen Polynome vorführen.

Zunächst beschreibe ich einfache Änderungen der Definition einer *allgemeinen* Funktion f , die das Bild des Graphen “nicht wesentlich” verändern. Dazu sei eine Funktion $x \mapsto y = f(x)$ gegeben, an der wir die “einfachen Veränderungen” vorführen wollen. Der Graph von f besteht aus den Punkten $(x, f(x))$, wobei die Argumente x alle Zahlen des Definitionsbereichs von f sind.

1.) Verschieben in y -Richtung:

Der Graph von g , $g(x) = f(x) + y_c$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschieben um y_c in Richtung der y -Achse.

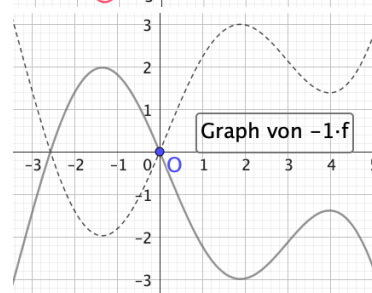
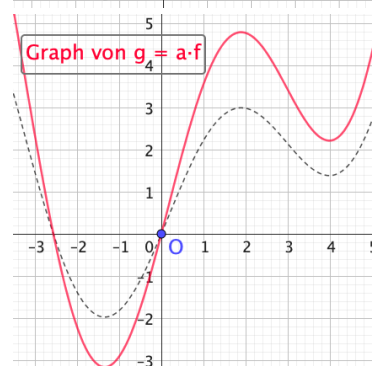
Bei $y_c > 0$ hat man eine Verschiebung nach oben, bei $y_c < 0$ hat man eine Verschiebung nach unten.



2.) Skalieren in y -Richtung:

Der Graph von g , $g(x) = a \cdot f(x)$, $a > 0$, entsteht aus dem Graphen von f durch Vergrößern aller y -Werte um den Faktor a , falls $a > 1$ ist (bzw. durch Verkleinern, falls $a < 1$ ist).

Wenn man für g die Skala der y -Achse um den Faktor $1/a$ ändert, sehen die Graphen von f und g völlig gleich aus.



3.) Multiplizieren mit -1 :

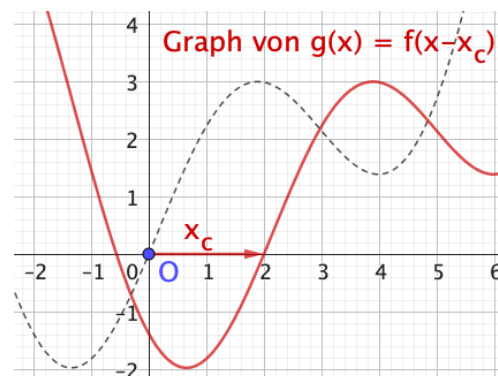
Der Graph von g , $g(x) = -f(x)$ entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x -Achse.

4.) Verschieben in x -Richtung:

Der Graph von g , $g(x) = f(x - x_c)$ sieht "in der Nähe" von $x = x_c$ genauso aus wie der Graph von f "in der Nähe" von $x = 0$. ("in der Nähe" bedeutet: Was auf das Zeichenblatt passt)

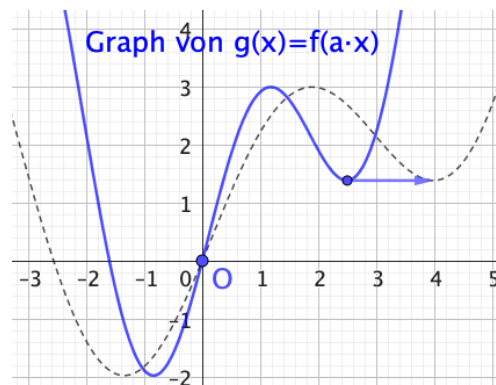
Bei $x = x_c$ so aussehen wie der Graph von f bei $x = 0$ bedeutet eine Verschiebung von $x = 0$ nach $x = x_c$.

Für $x_c > 0$ ist das eine Verschiebung nach *rechts* !



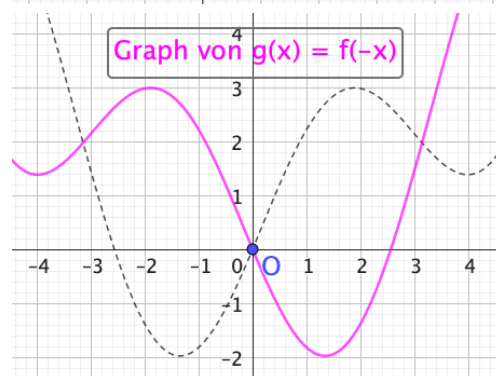
5.) Skalieren in x -Richtung:

Der Graph von g , $g(x) = f(a \cdot x)$, $a > 0$ entsteht aus dem Graphen von f durch Stauchung (bei $a > 1$) mit dem Faktor $1/a$ in Richtung der x -Achse, bzw. durch Dehnung bei $a < 1$. Denn, falls $a > 1$ ist, durchlaufen die Zahlen $a \cdot x$ die x -Achse *schneller* als die Zahlen x , was den Graphen mit $1/a$ staucht. (Natürlich *langsamer*, falls $a < 1$ ist, also Dehnung.)



6.) Skalieren mit -1 in x -Richtung:

Der Graph von g , $g(x) = f(-x)$ entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der y -Achse.



Erstes Beispiel: Quadratische Funktionen

Mit den Änderungen 1 - 6 kann man *alle quadratischen Funktionen* $g(x) = ax^2 + bx + c$ aus der *einen* Standard-Parabel $f(x) = x^2$ gewinnen.

Die mit a skalierte und in x - und y -Richtung verschobene Standard-Parabel ist

$$g(x) = a \cdot (x - x_c)^2 + y_c = a \cdot x^2 - 2ax_c \cdot x + ax_c^2 + y_c.$$

Wir müssen x_c und y_c aus b und c ausrechnen, x_c aus dem Faktor von x , danach y_c aus dem konstanten Term:

$$x_c = -\frac{b}{2a}, \quad y_c = c - ax_c^2 = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Bis auf Skalieren und Verschieben gibt es nur eine Parabel.

Satz: Alle kubischen Polynome können mit den einfachen Transformationen 1 - 6 aus den unten abgebildeten drei Polynomen f_0 , f_+ , f_- gewonnen werden.

Beweis: Kubische Polynome $g_a(x) = ax^3 + b'x^2 + c'x + d'$ ($a \neq 0$) kann man zunächst durch a dividieren, also $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ betrachten. Der quadratische Term wird nun durch Verschieben in x -Richtung (4.) beseitigt. Beachte dazu mit Termmultiplikation und anschließendem Koeffizientenvergleich

$$(x + u)^3 = x^3 + 3ux^2 + \dots = x^3 + bx^2 + \dots \Rightarrow u = b/3 :$$

Hiermit wird der Funktionsterm nicht vereinfacht, sondern zielstrebig komplizierter gemacht, sodass das Verschieben $(x + \frac{b}{3}) \mapsto x$ (4.) den quadratischen Term beseitigt:

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = (x + \frac{b}{3})^3 + (c - \frac{b^2}{3})(x + \frac{b}{3}) + d - c\frac{b}{3} + \frac{2b^3}{27}.$$

Verschieben in y -Richtung (1.) beseitigt die additive Konstante. Damit sind wir bei

$$h(x) = x^3 + px, \quad p = (c - \frac{b^2}{3}).$$

Wir haben eine *zum Ursprung* punktsymmetrische Form erreicht: $h(-x) = -h(x)$.

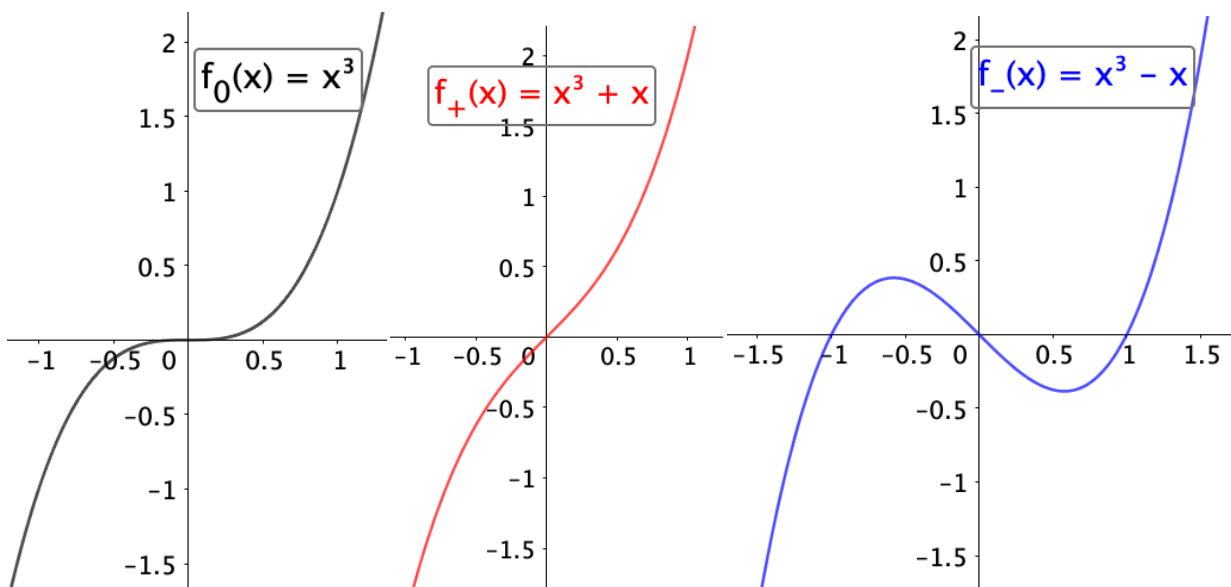
Im letzten Schritt möchten wir durch Skalieren in x -Richtung (5.) p beseitigen.

Wir brauchen den Faktor $\sqrt{|p|}$ im Nenner. Das erfordert drei Fallunterscheidungen und in den beiden letzten Fällen noch einmal die Skalierungen 2. und 5. :

Fall $p = 0$: $f_0(x) = x^3$

Fall $p > 0$: $h(x) = \sqrt{|p|}^3 \cdot ((\frac{x}{\sqrt{|p|}})^3 + \frac{x}{\sqrt{|p|}}) \Rightarrow f_+(x) = x^3 + x$

Fall $p < 0$: $h(x) = \sqrt{|p|}^3 \cdot ((\frac{x}{\sqrt{|p|}})^3 - \frac{x}{\sqrt{|p|}}) \Rightarrow f_-(x) = x^3 - x$



Tangenten und Verschiebungen

In dem Text A7, Seiten 3-4, wird gezeigt, dass allein die Kenntnis der Parabeltangenten interessante geometrische und physikalische Konsequenzen erlaubt. In diesem Text wird gezeigt, dass man verschiedene algorithmische Berechnungen n -ter Wurzeln mit Hilfe der Tangenten der Iterationsfunktionen besser, vor allem schneller, verstehen kann. Schließlich werden in der Differentialrechnung aus der Kenntnis der Tangenten von Funktionsgraphen völlig neuartige Argumente entwickelt.

Deshalb möchte ich zunächst zeigen, dass die einfachen Änderungen 1 - 6 von Funktionen auf Seite 3 u. 4 gut mit der *Identifizierung von Tangenten* durch Vergleich mit Kreisen und deren Tangenten zusammenpassen. Bisher hatten wir auf diese Weise Tangenten für die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = 1/x$ bestimmt.

Da Kreise beim Verschieben Kreise bleiben, kennen wir mit dieser Methode auch die Tangenten der verschobenen Graphen. In diesem Zusammenhang sind die Bezeichnungen der Differentialrechnung so praktisch, dass wir sie hier schon verwenden:

Bezeichnungen:

Da wir schon wissen, dass der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = a$ die Steigung $2a$ hat, sagen wir:

Die Steigungen von $f(x) = x^2$ werden durch die Funktion $f'(x) = 2x$ angegeben.

Die Tangente an der Stelle $x = a$ ist: $t_a(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

Da wir schon wissen, dass der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ an der Stelle $x = a$ die Steigung $-1/a^2$ hat, sagen wir:

Die Steigungen von $f(x) = \frac{1}{x}$ werden durch die Funktion $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ angegeben.

Die Tangente an der Stelle $x = a$ ist: $t_a(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

Durch Verschieben folgt:

Die Steigungen der Funktion

$g(x) = (x - b)^2 + c$ werden durch die

Funktion $g'(x) = 2(x - b)$ angegeben.

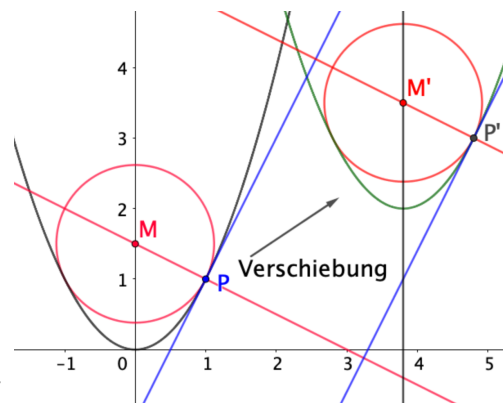
Tangente: $t_{g,a}(x) = g'(a)(x - a) + g(a)$.

Die Steigungen der Funktion

$g(x) = \frac{1}{x-b} + c$ werden durch die

Funktion $g'(x) = \frac{-1}{(x-b)^2}$ angegeben.

Tangente: $t_{g,a}(x) = g'(a)(x - a) + g(a)$.



Erst in der Differentialrechnung werden aus Voraussetzungen über Steigungen logische Konsequenzen gezogen. Hier soll die Anschauung durch Tangenten unterstützt und Termumformungen geübt werden. Auch dass die neuen Tangenten in enger Verbindung mit Kreistangenten gefunden werden, ist eine wichtige Verbindung zu den Vorkenntnissen. Wegen dieser Ziele finde ich es unangemessen, der Differentialrechnung vorzugreifen und zu versuchen, allgemeine Aussagen wie $(f + g)' = f' + g'$ herzuleiten. Selbstverständlich dürfen auftretende Spezialfälle schon wie später for-

muliert werden. Hier ist ein Beispiel.

Mit den binomischen Formeln zeigen wir: Addiert man zu der Standard-Parabel $f(x) = x^2$ die lineare Funktion $\ell(x) = m \cdot x$, so erhält man eine *verschobene* Parabel:

$$g(x) := f(x) + \ell(x) = x^2 + m \cdot x = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

mit:
$$g'(x) = 2\left(x + \frac{m}{2}\right) = 2x + m$$

Wir finden an diesem Beispiel die später zu beweisende Summenformel für Steigungen:

$$g'(x) = f'(x) + \ell'(x).$$

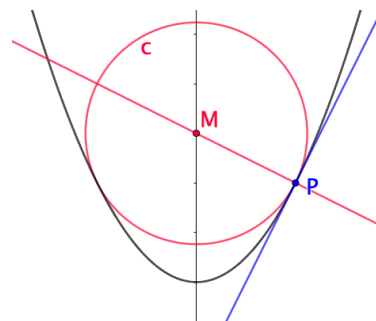
Die einfachen Funktionsveränderungen auf Seite 3-4 waren Verschiebungen und Skalierungen. Wie sich die mit Kreisen entdeckten Tangenten unter *Skalierungen* verhalten, kann nicht wie für die Verschiebungen diskutiert werden, weil Skalierungen aus Kreisen Ellipsen machen, also Kurven, die wir an dieser Stelle nicht kennen. Eine Ausnahme sind die Parabeln:

Für mit $d > 0$ *skalierte* Parabeln $g(x) = d \cdot x^2$ gilt $g'(x) = 2d \cdot x$.

Beweis: Die Tangenten-Ungleichung der standard Parabel

$$x^2 - (2a(x - a) + a^2) = (x - a)^2 \geq 0$$

kann mit $d > 0$ multipliziert werden. Deshalb liegt die skalierte Tangente unterhalb der skalierten Parabel. Wie vorher schneidet deren Normale die y -Achse im gesuchten Kreismittelpunkt M und wie vorher zeigt man mit binomischen Formeln, dass der Graph von g außerhalb dieses Kreises liegt. (Bei $d < 0$ vergleiche mit $f_-(x) = -x^2$.)



Daher hat die Parabel $h(x) = d \cdot (x - b)^2 + c$ die Steigungsfunktion $h'(x) = 2d \cdot (x - b)$. Ihre Tangenten bei $x = a$ erhält man immer auf dieselbe Weise:

$$t_a(x) = h'(a)(x - a) + h(a).$$

Es ist natürlich nicht unmöglich, auch für die *skalierte* inverse Funktion $g(x) = d/x$ nachzurechnen, dass ihr Graph an jeder Stelle zwischen einem Kreis und dessen Tangente verläuft. Aber da durch die Skalierung des Graphen die Symmetrie von $f(x) = 1/x$ verloren geht, ist nicht mehr so offensichtlich, mit welchem Kreis man es probieren soll. Ich möchte deshalb etwas vorschlagen, das die Mathematik vom Wettessen unterscheidet, nämlich: *Was man in der Mathematik einmal hinbekommen hat, kann man auf jeden Fall wiederholen*: Da wir Kreistangenten kannten, konnten wir sagen, welche Geraden wir als Parabeltangenten ansehen wollen. Und die Wiederholung: *Da wir jetzt Parabeltangenten kennen, können wir sagen: Falls der Graph einer Funktion g an einer Stelle zwischen einer Parabel und deren Tangente verläuft, so ist die Parabeltangente auch Tangente des Graphen von g an dieser Stelle*.

Das werden wir zunächst für die *skalierte* inverse Funktion $g(x) = d/x$ vorführen und danach für die kubische Potenz $g(x) = x^3$ – immer mit dem Ziel, dass das Rechnen und Argumentieren mit Termen geübt werden soll und wir dem Funktionsbegriff und dessen Anwendungen näher kommen wollen.

Tangenten und Parabeln

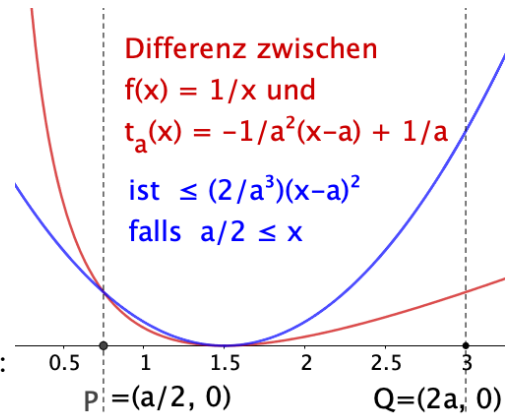
Wir haben gesehen, dass mit Parabeln leichter zu rechnen ist als mit Kreisen. Ferner wissen wir, dass der Graph von $f(x) = 1/x$ oberhalb seiner Tangenten $t_a(x)$ liegt. Nächstes Ziel ist, die Differenz $f(x) - t_a(x)$ (rot) mit einer zu *bestimmenden* Parabel (blau) zu vergleichen. Die Parabel wird durch Rechnung gefunden:

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) - t_a(x) &= \frac{1}{x} - \left(\frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{a^2 + x^2 - 2ax}{x \cdot a^2} \\ &= \frac{(x-a)^2}{x \cdot a^2} \end{aligned}$$

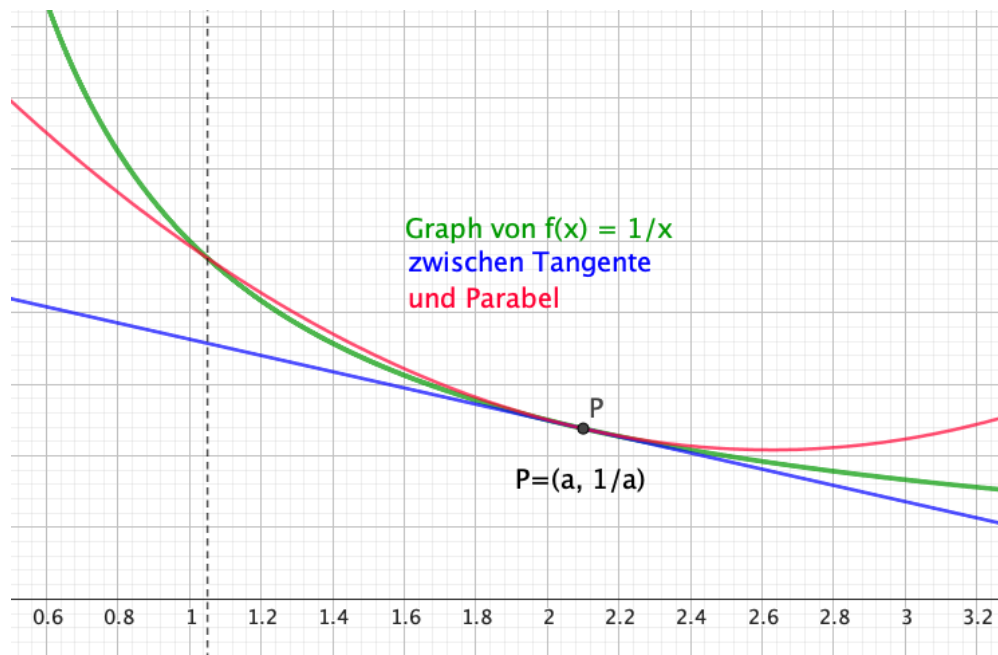
Bild rechts: $\leq \frac{2}{a^3}(x-a)^2$ falls $\frac{a}{2} \leq x$.

Der Graph liegt zwischen Tangente und Parabel:

$$0 < \frac{a}{2} \leq x \Rightarrow t_a(x) \leq f(x) \leq t_a(x) + \frac{2(x-a)^2}{a^3}.$$



Warum brauchen wir die Einschränkung $a/2 \leq x$? Geraden und Parabeln treffen immer die y -Achse, verlassen also den Definitionsbereich von f . Deshalb interessieren wir uns nur für ein geeignetes Intervall um den Berührungspunkt. Im Fall von $f(x) = 1/x$ ist $[a/2, 2a]$ im Definitionsbereich von f und wir betrachten in diesem Intervall den *Unterschied* zwischen Funktion f und Tangente t_a . Unsere Rechnung zeigt, dass der Graph von f zwischen einer Parabel und deren Tangente bei $(a, 1/a)$ verläuft. Später, in der Differentialrechnung, benutzt die Definition der Steigung eines Funktionsgraphen immer nur meistens kleine Intervalle um den Berührungspunkt der Tangente.



Erste Beweise mit durch Parabeln definierten Tangenten

Wir können nun skalieren und dazu die Steigungsfunktion berechnen:

$$f(x) = \frac{d}{x} \Rightarrow^{Behauptung} f'(x) = \frac{-d}{x^2}.$$

Beweis: Aus der eben ausgerechneten Voraussetzung

$$0 < \frac{a}{2} \leq x \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} - \left(\frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} \right) \leq \frac{2}{a^3}(x-a)^2$$

folgt durch Multiplikation mit $d > 0$ für die skalierte Funktion

$$0 < \frac{a}{2} \leq x \Rightarrow 0 \leq \frac{d}{x} - \left(\frac{-d}{a^2}(x-a) + \frac{d}{a} \right) \leq \frac{2d}{a^3}(x-a)^2.$$

Multiplikation mit -1 kehrt alle Ungleichungen der Behauptung um.

Mit der auf Seite 5 schon behandelten Verschiebung haben wir für alle d

$$g(x) = \frac{d}{x-b} + c \Rightarrow g'(x) = \frac{-d}{(x-b)^2}.$$

Auch das Addieren von Parabeln liefert (steilere) Parabeln. Deshalb gilt für alle Funktionen, deren Steigungsfunktionen wir schon kennen (also noch wenige), die einfache Regel:

$$(d_1 \cdot f_1(x) + d_2 \cdot f_2(x))' = d_1 \cdot f_1'(x) + d_2 \cdot f_2'(x).$$

Beispiel mit $d_1 = 1$, $d_2 = 1$:

Voraussetzung: $0 \leq b$, $0 < a$, $\frac{a}{2} \leq x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+b}$.

Wir haben für die einzelnen Funktionen diese (berechneten) Ungleichungen:

$$0 \leq f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \leq \frac{2}{a^3}(x-a)^2$$

$$0 \leq g(x) - (g'(a)(x-a) + g(a)) \leq \frac{2}{a^3}(x-a)^2.$$

Daraus folgt für die Summe die behauptete Regel

$$0 \leq (f(x) + g(x)) - ((f'(a) + g'(a))(x-a) + (f(a) + g(a))) \leq \frac{4}{a^3}(x-a)^2.$$

Bemerkung. Obwohl wir die Bezeichnungen der Differentialrechnung verwenden, handelt es sich um eine echte Vorstufe, da weder Argumente mit Grenzwerten benutzt werden noch Folgerungen aus Voraussetzungen über Steigungen gezogen werden. Dass wir trotzdem schon über Tangenten einfacher Funktionen reden können, hilft nicht nur der Anschauung, sondern wird uns mehrfach inhaltlich weiterhelfen.

Z. B. werden im nächsten Abschnitt Tangenten kubischer Polynome bestimmt. Damit kann das Ergebnis von Seite 5 so zusammengefasst werden: Die Polynome f_- , f_0 , f_+ repräsentieren die kubischen Polynome, a) die 2 horizontalen Tangenten haben, b) die eine horizontale Tangente haben und c) die keine horizontale Tangente haben.

Kubische Potenz und ihre Steigungsfunktion

Das Volumen eines Würfels der Seitenlänge s wird durch die Funktion $V(s) = s^3$ beschrieben. Deshalb wird die Frage:

Um wie viel muss die Seitenlänge eines Würfels der Kantenlänge a vergrößert werden, damit das Volumen um D wächst?

durch folgende Formel in gut beantwortbarer Weise beschrieben:

$$V(a+x) - V(a) = {}^{Wunsch} D, \quad \text{Antwort: } x = (V(a) + D)^{1/3} - a.$$

Man muss lernen, dass in dieser Situation das "vereinfachende" Ausmultiplizieren

$$V(a+x) - V(a) = (a+x)^3 - a^3 = (a^2 + 2ax + x^2)(a+x) - a^3 = 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

keine sinnvolle Strategie ist, denn, ohne diese Umformung *rückgängig* zu machen, ist das Lösen der kubischen Gleichung $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = D$ aufwendig.

Wir können auch für die kubische Funktion $f(x) = x^3$ durch Vergleich mit Parabeln die Steigungsfunktion bestimmen. Wegen der Punktsymmetrie $f(-x) = -f(x)$ passiert bei $x = 0$ etwas Neues. Daher setzen wir zunächst $0 < a, 0 \leq x$ voraus. Eine Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel wird benutzt.

Hilfssatz

$$\begin{aligned} x^3 - a^3 &= (x-a) \cdot (x^2 + ? \cdot x + a^2) \\ &= (x-a) \cdot (x^2 + a \cdot x + a^2) \end{aligned}$$

$$\text{Rechtsseitige Steigungen } a < x: \quad \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + a \cdot x + a^2 > 3a^2$$

$$\text{Linksseitige Steigungen } x < a: \quad \frac{a^3 - x^3}{a - x} = x^2 + a \cdot x + a^2 < 3a^2$$

Erwartete Tangente

$$t_a(x) = 3a^2(x-a) + a^3$$

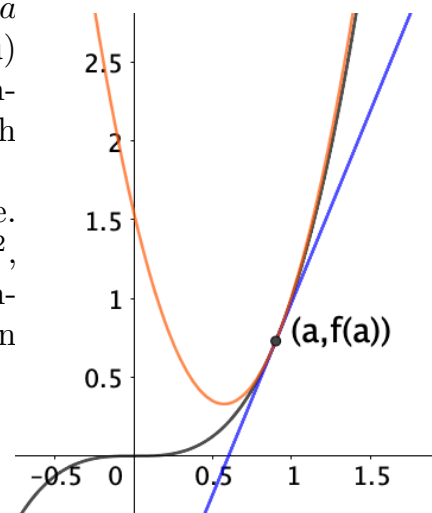
$$0 \leq x \leq a+1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) - t_a(x) &= (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3a^2) \\ &= (x-a)^2(x+a+a) \begin{cases} \leq (3a+1)(x-a)^2 \\ \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass der Graph von $f(x) = x^3$ für $0 < a$ und $0 \leq x \leq a+1$ zwischen erwarteter Tangente (blau) und Parabel (rot) liegt und damit tatsächlich diese Tangente hat. Die gewählte Parabel schneidet den Graph von f bei $x = a+1$.

Wegen der Punktsymmetrie gilt für $a, x \leq 0$ dasselbe. Im Intervall $[-1, +1]$ gilt $-(x-0)^2 \leq x^3 \leq (x-0)^2$, sodass die x -Achse Tangente bei 0 ist – aber eine Tangente, die den Graph nicht auf einer Seite läßt, sondern schneidet. Die Steigungsfunktion ist bestimmt:

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2.$$



Umkehrfunktionen streng monotoner Funktionen

Zum Verständnis der vorhergehenden Seiten genügt die Kenntnis der rationalen Zahlen: Die vorgeführten Beispiele haben für rationale Argumente immer rationale Werte und rationale Tangentensteigungen. Das ist sogar für alle rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten der Fall.

Beim Arbeiten mit Funktionen entsteht jedoch sehr oft die Frage: *Wie findet man zu einem Wert w einer Funktion f ein Argument a , sodass $w = f(a)$ gilt?*

Falls f eine streng monotone Funktion ist, wird das begrifflich durch die Definition einer Umkehrfunktion f^{-1} beantwortet – wobei die begriffliche Definition noch nicht sagt, wie die Umkehrfunktion berechnet wird.

f streng monoton $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$

erlaubt zu definieren $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$.

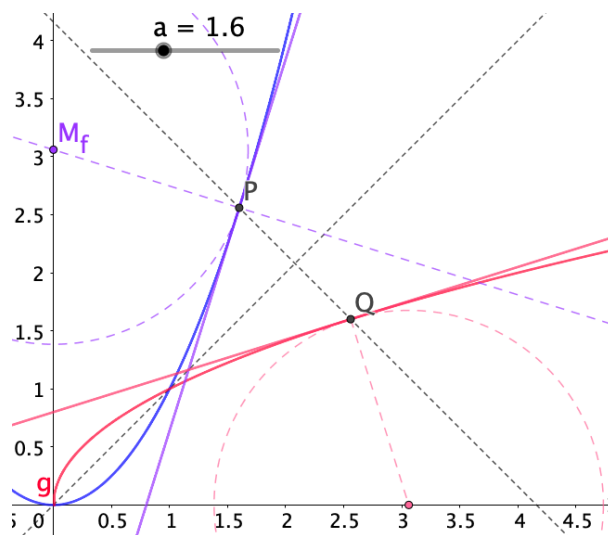
Beispiel: $x \geq 0, y = x^2 \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$

allgemeiner: $x \geq 0, y = x^n \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = x$

Den Graph der Umkehrfunktion bekommt man auch optisch sehr einfach:

Zeichne $\text{Graph}(f)$ auf eine durchsichtige Folie, betrachte diese von der Rückseite. Dreht man die Folie um 90° , so sieht man den Graph der Umkehrfunktion.

Üblicher ist, die Vertauschung von x - und y -Achse als Spiegelung an der 45° -Linie darzustellen. Der blaue Graph von f wird dabei in den roten Graph der Umkehrfunktion f^{-1} gespiegelt. Dabei wird die Tangentendefinition mitgespiegelt. Bildlich ist die Situation also sehr einfach.



Numerisch ist die Situation nicht mehr so einfach. Schon für $f(x) = x^2$ hat die Umkehrfunktion an den “meisten” rationalen Stellen irrationale Werte, sodass die Kenntnis der rationalen Zahlen nicht mehr ausreicht. Ich finde, beim Abitur sollte man ganz sicher verstanden haben, dass fast alle Taschenrechnerausgaben von Quadratwurzeln nur Approximationen sind und dass auch größere Rechner Irrationalzahlen nur approximieren, aber nie exakt berechnen können. Deswegen werden auf den folgenden Seiten Verfahren zur Berechnung von Approximationen n -ter Wurzeln beschrieben, die mit Kenntnissen aus den Anfängen des symbolischen Rechnens auskommen, also insbesondere keine Kenntnisse aus der Analysis benötigen.

Für mich kommt noch hinzu, dass der Zugang zu den Exponentialfunktionen fast immer früher liegt, als Kenntnisse in Analysis erworben werden. Dann braucht man schon für rationale Exponenten die Definition $a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m$ und man sollte daher verstehen, wie Approximationen n -ter Wurzeln berechnet werden. Und dass das sehr gut mit *Prozentrechnung* geht, ist ein Lieblingsthema von mir.

Funktionen erleichtern das Verständnis von Berechnungsverfahren

Ich möchte als nächstes ein Beispiel vorführen, das lange vor der Differentialrechnung zeigt, wie nützlich der Funktionsbegriff ist. Es wird um die Berechnung von Quadratwurzeln gehen. Wenn $a > 0$ keine rationale Quadratzahl ist, dann ist $\sqrt{a}$ eine Irrationalzahl, kann also nicht exakt als Dezimalzahl angegeben werden. Wenn man zwei Zahlen $0 < x_- < x_+$ hat mit $x_-^2 < a < x_+^2$, dann gilt für die Irrationalzahl $\sqrt{a}$ die Einschachtelung: $x_- < \sqrt{a} < x_+$.

Unter einer *Berechnung von $\sqrt{a}$* versteht man nun ein Verfahren, dass jede solche Einschachtelung verbessert. Ein solches Verfahren lässt sich mit Prozentrechnung entwickeln. Im Text T2 (über Prozentrechnung) wird gezeigt:

Kleine prozentuale Fehler verdoppeln sich beim Quadrieren ungefähr.

Dass das nicht ganz genau stimmt, spielt hier keine Rolle, da wir ja $\sqrt{a}$ nicht *exakt* ausrechnen können, sondern nur Approximationen x_-, x_+ *verbessern* wollen. Deshalb können wir diese Aussage auch umkehren:

(*) *Kleine prozentuale Fehler halbieren sich beim Wurzelziehen ungefähr.*

Daraus können wir nun das gewünschte Verfahren machen:

Gegeben sei eine Anfangsnäherung x für $\sqrt{a}$. Z.B. kann man mit $x = 1$ beginnen.

Schritt 1: Wir berechnen den prozentualen Unterschied zwischen x^2 und a . Prozente sind immer auf einen “Grundwert” bezogen. Hier können wir als Grundwert entweder den Zielwert a oder die gerade berechnete Zahl x^2 nehmen. Das liefert zwei etwas unterschiedliche Prozente u, v :

$$u = \frac{a - x^2}{a} \quad \text{und} \quad v = \frac{a - x^2}{x^2}.$$

Schritt 2: Diese Prozentzahlen werden halbiert und die Anfangsnäherung x wird damit wegen (*) verbessert:

$$x_1 := x\left(1 + \frac{u}{2}\right) = x\left(1 + \frac{a - x^2}{2a}\right) \quad \text{und} \quad y_1 := x\left(1 + \frac{v}{2}\right) = x\left(1 + \frac{a - x^2}{2x^2}\right).$$

Schritt 3: Diese Schritte werden zu zwei Verbesserungsfunktionen zusammengefasst:

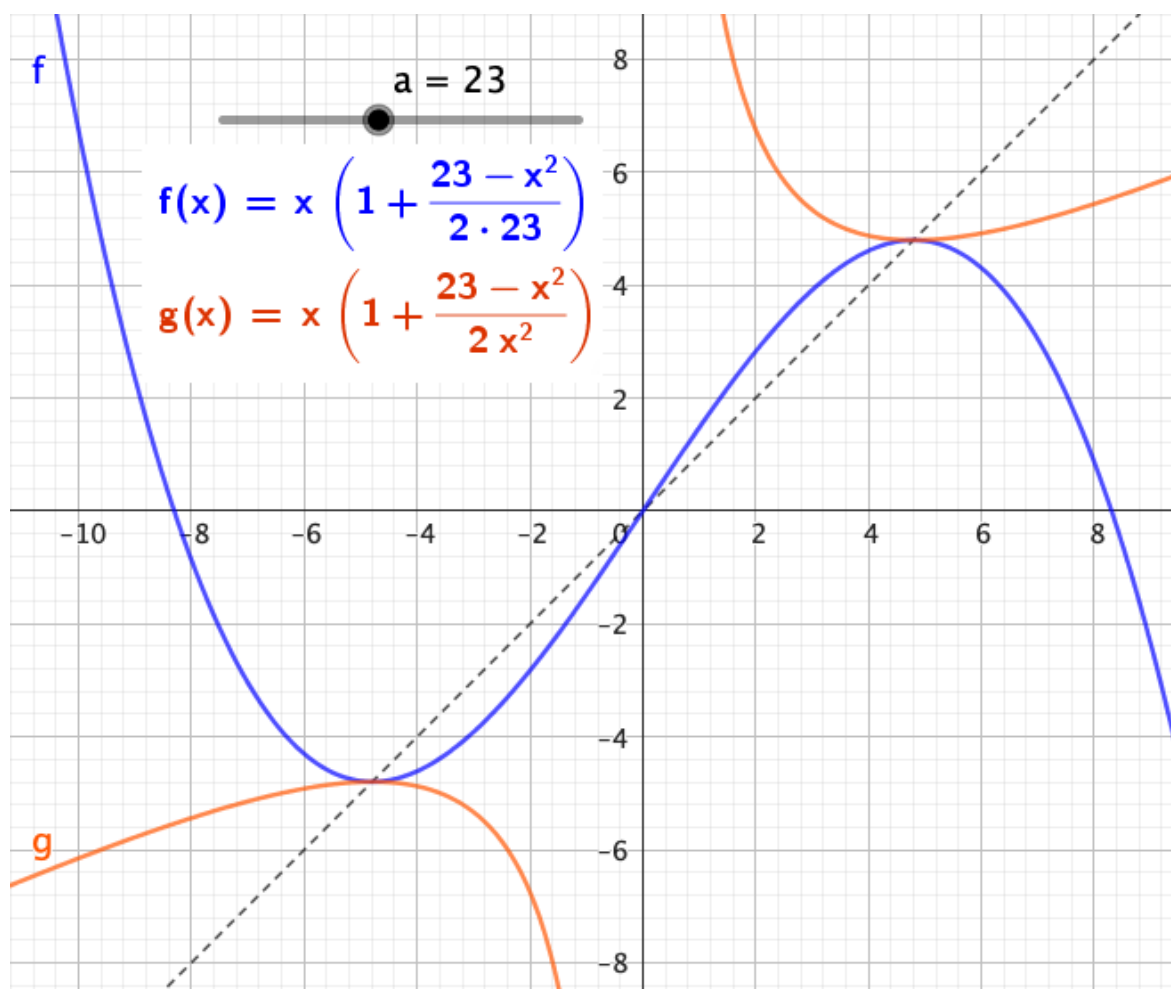
$$\begin{aligned} x_1 = f(x) &:= x\left(1 + \frac{a - x^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{x^3}{a}\right), & f'(x) &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a}\right), \\ y_1 = g(x) &:= x\left(1 + \frac{a - x^2}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), & g'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Die Verbesserungsfunktion g ist die schon in der Antike bekannte Heron-Näherung.

Die berechneten Steigungsfunktionen präzisieren, was wir den Graphen von f und g ansehen können. Ganz am Ende helfen sie uns, die beiden Funktionen f, g zu einem *viel* besseren Verfahren zu kombinieren.

Die Graphen der beiden Verbesserungsfunktionen werden im folgenden Bild gezeigt. Dieses Bild wird erklären, warum das mit Prozentrechnung motivierte Verfahren so gut funktioniert, wie folgendes Beispiel zeigt – mit $a = 23$ und Startwert $x = 4$:

$$\begin{aligned}x_1 &= f(4) = 4.6086956522, & x_1^2 &= 21.2400756144, \\x_2 &= f(x_1) = 4.7850207797, & x_2^2 &= 22.8964238617, \\x_3 &= f(x_2) = 4.7957949965, & x_3^2 &= 22.9996496483, \\y_1 &= g(4) = 4.8750000000, & y_1^2 &= 23.7656250000, \\y_2 &= g(y_1) = 4.7964743590, & y_2^2 &= 23.0061662763, \\y_3 &= g(y_2) = 4.7958315664, & y_3^2 &= 23.0000004132.\end{aligned}$$



Ich glaube, man muss eine gewisse Anzahl von Funktionsgraphen nach einer Wertetabelle mit der Hand gezeichnet haben, ehe maschinell gezeichnete Graphen beginnen, eine Verständnishilfe zu sein. Kubische Polynome sind auf Seite 5 diskutiert. Der Heron-Graph $g(x) = (1/2)(x + a/x)$ (rot) ist für große x knapp oberhalb der Geraden $\ell(x) = 0.5x$ und in $(0,1)$ ist er wenig von $q(x) = a/2x$ verschieden. Dazwischen muss er mit horizontaler Tangente durch das Minimum in $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ laufen. Diese Beschreibung ist im ersten Quadranten nahe an dem maschinell erzeugten Bild.

An den Graphen kann man recht bequem ablesen, warum die numerischen Rechnungen sich wie beobachtet verhalten. Wir ziehen jetzt noch keine Schlüsse aus der Kenntnis der Steigungsfunktionen, das ist Hauptthema der Differentialrechnung. Aber es unterstützt unsere Anschauung, dass wir die Steigungen der Graphen ausrechnen und einen Vorzeichenwechsel der Steigungsfunktion genau bei $x = \sqrt{a}$ bemerken können.

Aus der Definition beider Verbesserungsfunktionen folgt unmittelbar:

$$f(x) = x(1 + \frac{a - x^2}{2a}), \quad g(x) = x(1 + \frac{a - x^2}{2x^2}) \quad \text{zeigt} \quad x^2 = a \Leftrightarrow f(x) = x = g(x).$$

Die punktierte 45°-Linie schneidet also die Graphen in dem Punkt, den wir suchen. Das Bild zeigt, dass dies der höchste Punkt des Graphen von f in der rechten Halbebene ist (späterer Name: "lokales Maximum", $f'(\sqrt{a}) = 0$), und es ist auch der tiefste Punkt des Graphen von g in der rechten Halbebene (späterer Name: "lokales Minimum", $g'(\sqrt{a}) = 0$). Das erklärt die erste Beobachtung:

Die Verbesserungen durch f sind zu klein, die durch g sind zu groß.

Links von diesem Maximum ist der Graph von f *oberhalb* der 45°-Linie. Das bedeutet $0 \leq x < \sqrt{a} \Rightarrow x < f(x) \leq f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Der Graph erklärt die Beobachtung, dass die Verbesserungsvorschrift $x_1 = f(x)$ Näherungen *vergrößert*, aber nicht über $\sqrt{a}$ hinaus. – Rechts von diesem Zielpunkt ist der Graph von g *unterhalb* der 45°-Linie, sodass zu große Näherungen *verkleinert* werden, aber größer als $\sqrt{a}$ bleiben.

Als nächstes wollen wir das experimentelle Ergebnis verstehen, dass die Differenz zwischen den Näherungen und $\sqrt{a}$ immer schneller klein wird. Dazu ist es praktisch, die Näherungen zu nummerieren:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n), \\ y_1 &= g(x_0), \quad y_2 = g(y_1), \quad \dots, \quad y_{n+1} = g(y_n). \end{aligned}$$

Das Abstandsverhältnis aufeinander folgender Näherungen wird dann durch *Steigungen* ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{\sqrt{a} - x_n} &= \frac{f(\sqrt{a}) - f(x_n)}{\sqrt{a} - x_n} = \text{Sehnen-Steigung zwischen } x_n \text{ und } \sqrt{a}. \\ \frac{y_{n+1} - \sqrt{a}}{y_n - \sqrt{a}} &= \frac{g(y_n) - g(\sqrt{a})}{y_n - \sqrt{a}} = \text{Sehnen-Steigung zwischen } \sqrt{a} \text{ und } y_n. \end{aligned}$$

Das Bild zeigt, dass die Steigungen des Graphen von f in $[0, \sqrt{a}]$ *monoton abnehmen* und im Maximum 0 sind. Ebenso sieht man, dass die Steigungen des Graphen von g in $[\sqrt{a}, \infty)$ *monoton wachsen* und im Minimum 0 sind. Man sieht also den Graphen an, dass das Abstandsverhältnis aufeinander folgender Näherungen für $\sqrt{a}$ nicht nur immer kleiner wird, sondern dass dies Verhältnis sogar Null immer näher kommt. Man kann also *verstehen*, dass die wiederholten Näherungen einen rasant schnell kleiner werdenden Abstand von $\sqrt{a}$ haben – sodass $(\sqrt{a} - x_n)$ bzw. $(y_n - \sqrt{a})$ das experimentell beobachtete Verhalten haben *müssen*.

Erfolg: Mit Prozentrechnung motiviert und mit dem Graphen gerechtfertigt!

Zwischentext

Zur Zeit von Archimedes war nicht nur die Astronomie so weit entwickelt, dass Mondfinsternisse vorhergesagt werden konnten, auch die Mechanik war so weit, dass ein Gerät konstruiert werden konnte, dass zu jedem eingestellten Zeitpunkt die Stellung der Planeten zeigte:

https://de.wikipedia.org/wiki/Mechanismus_von_Antikythera

Die jahrelangen Analysen des (nach 2000 Jahren Meeresgrund schlecht erhaltenen) Gerätes zeigten schließlich, dass die Mondfinsternisse sogar genauer angezeigt wurden, als man der historischen Literatur als “Wissen der Griechen” entnommen hatte.

Trotzdem dauerte es – nach einem Zwischenauftritt bei Diophant – noch bis zu dem Lehrbuch von Viète (1540-1603), welches dann die Buchstabenrechnung, *das symbolische Rechnen*, als Handwerkszeug der Mathematiker etablierte.

Ich habe Kopien von Zetteln gesehen, auf denen Newton gerechnet hat. Es erscheint mir ausgeschlossen, dass die Differentialrechnung ohne dies symbolische Handwerkszeug hätte erfunden werden können. Auch die auf der Differentialrechnung beruhende Formulierung der Naturgesetze und damit unsere technische Zivilisation wurden durch das symbolische Rechnen erst möglich.

Seit über 10 Jahren beklagen die Dozenten von mathematischen Anfängervorlesungen enorme Mängel im symbolischen Rechnen. Nicht einmal die binomischen Formeln stünden zur Verfügung. Reagiert wird darauf mit Kommissionen zum Übergang Schule - Hochschule und mit Brückenkursen an den Universitäten. Meine Kenntnis der Situation stammt neben Einzelberichten vor allem aus meiner Durchsicht moderner Schulbücher. Aus diesen sind präzise Definitionen und daraus logisch gefolgte Sätze so weitgehend eliminiert worden, dass der Aachener Studienberater 2019 in der FAZ schreiben konnte: *Auf diese Bücher hätte wohl kein Mathematiker ein Auge geworfen:*

<https://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/AhnungslosigkeitMathe.pdf>

Die oben gemachten Bemerkungen zur Entstehung des symbolischen Rechnens machen es unwahrscheinlich, dass man diese Kunst aus unrealistischen, von Experten verlachten Beispielen aus der “Lebenswelt der Jugendlichen” erlernen kann. Meine Beispiele werden daher aus der Mathematik stammen. Da der Taschenrechner ein so viel benutztes Werkzeug ist, finde ich Erklärungen, die zeigen, wie die Ergebnisse von Taschenrechnern zustande kommen, besonders passend. In diesem Text geht es um das Wurzelziehen. Text A6 zeigt auf der Schule verständliche Berechnungen von $\sin()$ und $\cos()$.

Alternierendes Wurzelziehen mit der dritten binomischen Formel

Die dritte binomische Formel liefert ein Verfahren zum Wurzelziehen, das *keine weiteren mathematischen Kenntnisse* erfordert (Texte Z2, T2). Wenn man mit dem Taschenrechner eine irrationale Quadratwurzel berechnet, dann weiß man nicht, ob die letzte angezeigte Stelle durch Aufrunden oder Abrunden entstanden ist. Man kann die letzte Stelle aber um 1 verkleinern und vergrößern und bekommt so zwei rationale Zahlen, zwischen denen die gewünschte Quadratwurzel liegt.

Dasselbe erlaubt die dritte binomische Formel auch.

Um rationale Wurzeln zu vermeiden, wählen wir mit $m \in \mathbb{N}$ Zahlen $a \in \mathbb{N}$, um daraus Wurzeln zu ziehen, mit $m^2 < a < (m+1)^2$.

Dann gilt:

$$0 < (\sqrt{a} - m)(\sqrt{a} + m) = a - m^2 =: d,$$

also:

$$\sqrt{a} = m + \frac{d}{\sqrt{a} + m}.$$

Im Text T2 wird vorgerechnet: Setzt man im Nenner für $\sqrt{a}$ eine zu kleine Näherung x ein, so liefert Ausrechnen der rechten Seite eine zu große Näherung $f(x)$ und umgekehrt ("alternierendes Verfahren"). Das wurde in T2 beschrieben als "Verbesserungsfunktion":

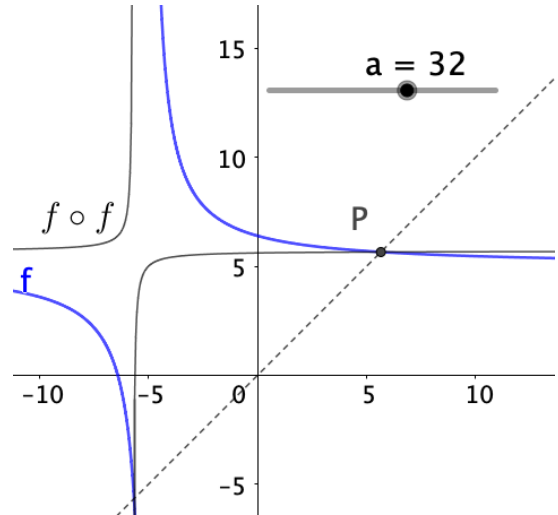
$$x \mapsto f(x) := m + \frac{d}{x + m}, \quad f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{a}.$$

Der blaue Graph im Bild gehört zu den Konstanten $m = 5$, $a = 32$, also $d = 32 - 25$. Beginnend mit $x_0 = 5$ berechnen wir einige Näherungen $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... und deren Quadrate $a_1 = x_1^2$, $a_2 = x_2^2$, ...:

$$\begin{aligned} x_1 = f(x_0) = 5.7, \quad a_1 = x_1^2 = 32.49, \quad x_2 = f(x_1) = 5.65421, \quad a_2 = x_2^2 = 31.97004 \\ x_3 = f(x_2) = 5.65702, \quad a_3 = 32.00185, \quad x_4 = f(x_3) = 5.65684, \quad a_4 = 31.99989 \\ x_5 = 5.65685487, \quad a_5 = 32.0000070, \quad x_6 = 5.6568542113, \quad a_6 = 31.9999995674 \end{aligned}$$

Wir bekommen mit gewöhnlicher Bruchrechnung abwechselnd zu kleine und zu große Näherungen, also dieselbe *Information*, die die Ausgabe des Taschenrechners für $\sqrt{a}$ liefert! Das Bild erklärt das, weil der Graph *fallend* durch P läuft, $f' < 0$. Später wird der Monotoniesatz die Verbesserung $|f(x) - \sqrt{a}| < |x - \sqrt{a}|$ aus $|f'| < 1$ folgern.

Der zusätzlich eingezeichnete Graph der Funktion $f \circ f(x) := f(f(x))$ zeigt wieder optisch, wie gut die Verbesserung funktioniert, weil er nahezu konstant durch den Punkt $P = (\sqrt{a}, \sqrt{a})$ verläuft. Aber erst $f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x)))$ alterniert wieder zwischen zu kleinen und zu großen Näherungen.



Berührungsvergleich: Parabel und Kreis

In meinen letzten Anfängervorlesungen war ich der Meinung, dass es widersinnig ist, zu versuchen, Differentialrechnung zu erklären, wenn der Umgang mit über 2000 Jahre alten Kreisen und Parabeln nicht beherrscht wird.

Da ich die Tangenten der Parabel durch Vergleich mit Kreisen definiert habe, finde ich wichtig, dass dieser Vergleich die Kreise nur deshalb in den Vordergrund rückt, weil Kreistangenten schon vor der Parabel bekannt sind. Das folgende Bild zeigt:

Die rote Parabel, der schwarze Kreis und die blaue Parabel verlaufen zwischen dem grünen Kreis und dessen Tangente. Deshalb haben sie alle dieselbe Tangente in P. Der schwarze Kreis liegt im Innern der roten Parabel und zwischen Q und E liegt die blaue Parabel innerhalb des schwarzen Kreises. Wollten wir die Parabeltangenten als die einfacheren betrachten, so könnten wir die Kreistangenten definieren durch diese Einquetschung zwischen zwei Parabeln mit gleicher Tangente. Um also für weitere Graphen Tangenten zu definieren, können wir uns aussuchen, ob wir die neuen Graphen mit Parabeln oder mit Kreisen kontrollieren wollen.

Dieser Text handelt von Funktionen als Fernziel und von Termumformungen als Handwerkszeug. Deshalb beschreibe ich, wie man die Gleichungen der beiden Parabeln im Bild findet. Zunächst der schwarze Kreis:

Kreisgleichung $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

Untere Hälfte als Graph $\text{kr}(x) = -\sqrt{1 - x^2} + 1$

Steigung in $P \perp$ Radius $P = (a, \text{kr}(a)), m = -\left(\frac{\text{kr}(a) - 1}{a - 0}\right)^{-1} = \frac{a}{1 - \text{kr}(a)}.$

Tangente $\ell_a(x) = m \cdot (x - a) + \text{kr}(a)$

Ansatz rote Parabel $p(x) := b \cdot x^2 + c$

Steigung $p'(a) \quad m = b \cdot 2a \Rightarrow b = \frac{m}{2a}$

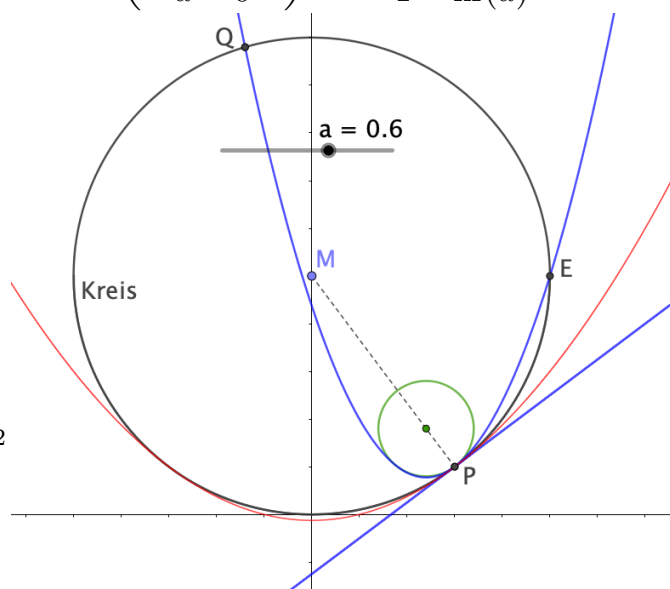
Wert $p(a) = \text{kr}(a) \Rightarrow c = \text{kr}(a) - b \cdot a^2.$

Blaue Parabel $q(x) := \ell_a(x) + d \cdot (x - a)^2$

Wert $q(1) = 1 \Rightarrow d = (1 - \ell_a(1))/(1 - a)^2$

Steigung blau $q'(x) = m + d \cdot 2(x - a)$

Scheitel blau $q'(s) = 0, q(s) \leq q(x)$



Ich halte es für eine wichtige Übung, Parabeln und Kreise so zu skalieren und zu verschieben, dass vorher formulierte Ziele erreicht werden.

Variationen

In diesem Abschnitt werden die Erfahrungen aus den vorhergehenden Seiten kombiniert, um Verallgemeinerungen und Verbesserungen zu erreichen.

Da (auf der Schule) die Potenzen mit rationalen Exponenten vor den Anfängen der Differentialrechnung behandelt werden, gibt es nur die Definition $a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m$. Wegen $\sqrt[n]{1/a} = 1/\sqrt[n]{a}$ ziehen wir nur Wurzeln aus Zahlen $a \geq 1$.

Damit das nicht auf magische Taschenrechnerergebnisse reduziert ist, halte ich einfache Approximationsverfahren für n -te Wurzeln für wichtig.

Das **Wurzelziehen mit der dritten binomischen Formel** (Seite 16) kann auf dritte Wurzeln ausgedehnt werden, wenn man die Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ von Seite 10 so benutzt:

Voraussetzung $1 \leq s^3 < a$, gesucht: $\sqrt[3]{a}$

3. binomische Formel $a - s^3 = (\sqrt[3]{a} - s)((\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{a})s + s^2)$,

oder
$$\sqrt[3]{a} = s + \frac{a - s^3}{(\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{a})s + s^2}.$$

Einsetzen einer Näherung x für $\sqrt[3]{a}$ im Nenner der rechten Seite liefert die

Verbesserungsfunktion $x \mapsto f_s(x) := s + \frac{a - s^3}{x^2 + sx + s^2}.$

Beobachtung $x < \sqrt[3]{a} \Rightarrow f_s(x) > \sqrt[3]{a}$, $x > \sqrt[3]{a} \Rightarrow f_s(x) < \sqrt[3]{a}$

Zielpunkt $f_s(x) = x \Rightarrow x^3 - s^3 = a - s^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}.$

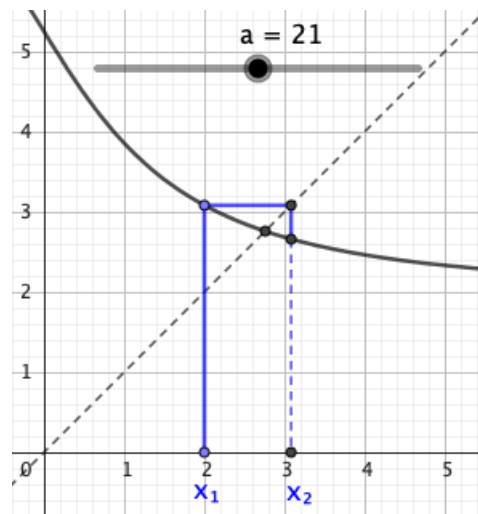
Bemerkung 1 Das Verfahren ist alternierend, weil die Verbesserungsfunktion fallend ist. So muss man nicht über Fehler nachdenken, der Abstand zweier aufeinander folgender Näherungen zeigt den Fehler.

Bild mit $a = 21$, $s = 2$.

Die blauen Linien zeigen, wie man zeichnerisch von x_1 zu x_2 kommt: Alternierend, weil der Graph fällt. Und dem Zielpunkt näher rückend, weil für die Steigung gilt

$$0 > m > -1,$$

je flacher, um so schneller am Ziel.



Bemerkung 2 Die dritte binomische Formel besitzt Verallgemeinerungen auf alle höheren Potenzen (und sieht dann aus, wie die Summenformel der geometrischen Reihe (mit $q = \frac{x}{a}$):

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) = a^4\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} + 1\right),$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}), \quad q = \frac{x}{a}.$$

Das schneller approximierende **Wurzelziehen mit Prozentrechnung** (Seite 12) kann mit denselben Worten auf n -te Wurzeln verallgemeinert werden. Für dritte Wurzeln $\sqrt[3]{a}$ sind die beiden Verbesserungsfunktionen (durch Dritteln der prozentualen Unterschiede):

$$f(x) = x(1 + \frac{a - x^3}{3a}) = \frac{1}{3}(4x - \frac{x^4}{a}), \quad f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = a$$

$$g(x) = x(1 + \frac{a - x^3}{3x^3}) = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2}), \quad g(x) = x \Leftrightarrow x^3 = a$$

$$n\text{-te Wurzeln: } f(x) = x(1 + \frac{a - x^n}{n \cdot a}), \quad g(x) = x(1 + \frac{a - x^n}{n \cdot x^n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ich habe *alternierende Verfahren* zur approximativen Berechnung irrationaler Wurzeln so gelobt, dass die Frage entsteht, ob man die oberen und unteren Approximationen von Seite 12 so mitteln kann, dass daraus ein alternierendes Verfahren wird. Dabei helfen uns in diesem Fall – und vor irgendwelchen Beweisen aus der Differentialrechnung – die schon berechneten Steigungsfunktionen. Sie sind:

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1 - \frac{x^2}{a}) \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2}).$$

Da f' in der Nähe von $x = \sqrt{a}$ ungefähr dreimal so groß wie g' ist, sieht das so aus, als ob die Verbesserung g dreimal so gut wie f ist! Dazu zunächst ein numerisches Beispiel. Wir verkleinern und vergrößern $\sqrt{31}$ um 0.01, iterieren mit f bzw. g und vergleichen die Abstände der Iterationen von $\sqrt{31}$:

$$\sqrt{31} = 5.5677643628, \quad x_0 = \sqrt{31} - 0.01, \quad y_0 = \sqrt{31} + 0.01$$

$$x_1 = f(x_0) = 5.5677374382, \quad y_1 = g(y_0) = 5.567773327,$$

$$v = (\sqrt{31} - x_1)/(y_1 - \sqrt{31}) = 3.00359.$$

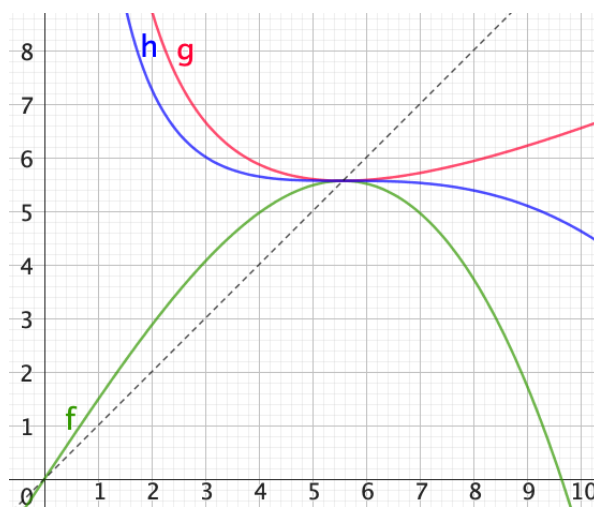
Das Verhältnis ist in der Tat ungefähr 3. Deshalb definieren wir die neue Verbesserungsfunktion (deren Steigungsfunktion wir schon ausrechnen können) so:

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x - \frac{x^3}{a})$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

$$h(x) := (f(x) + 3g(x))/4,$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3}{8}(2 - \frac{x^2}{a} - \frac{a}{x^2}) \\ &= \frac{-3}{8} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{x} \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$



Später wird der Monotoniesatz der Differentialrechnung lehren, dass eine Funktion h mit *negativer* Steigungsfunktion h' eine *fallende* Funktion ist.

Die neue Verbesserungsfunktion h sollte also wieder *alternierende* Approximationen liefern, was wir numerisch überprüfen:

$$x_0 = 5, \quad x_1 = h(x_0) = 5.5709677419 > \sqrt{31}, \quad x_2 = h(x_1) = 5.5677643623 < \sqrt{31}.$$
$$\sqrt{31} = 5.5677643628$$

Diese Approximationen sind wirklich abwechselnd zu klein und zu groß.

*Überraschen sollte aber auch, dass schon die **zweite** Verbesserung nur noch in der zehnten(!) Nachkommastelle von $\sqrt{31}$ verschieden ist.*

Diese enorm schnelle Verbesserung wird in der Differentialrechnung erklärt mit Hilfe des Monotoniesatzes und der doppelten Nullstelle bei $x = \sqrt{a}$ von

$$h'(x) = \frac{-3}{8} \frac{a}{x^2} \left(\frac{x^2}{a} - 1 \right)^2 \leq 0.$$

Termumformungen, insbesondere die binomischen Formeln, tragen offenbar wesentlich zum Verständnis von Funktionen bei. Wir brauchen das 10-stellige Wurzelziehen nicht geheimnisvollen Algorithmen im Taschenrechner zu überlassen, wir können es mit eigenen Mitteln verstehen.