Fehler, Prozente, binomische Formeln
und wie deren Kombination überraschende Ergebnisse liefert.
(Version 21.8.2025)

Ziel auch dieses Textes ist, zu zeigen, dass man durch zielstrebiges Arbeiten schon mit sehr einfachen Termen unerwartete Resultate bekommen kann. Es ist gut, frühzeitig zu lernen, wie enorm leistungsfähig dies symbolische Rechnen ist.

Hier wollen wir Fehler, Prozentrechnung und binomische Formeln kombinieren. Dazu müssen zuerst diese Begriffe wiederholt werden. Das liefert zum Beispiel die Einsicht, dass (kleine) prozentuale Fehler sich beim Quadrieren ungefähr verdoppeln. Das kann umgekehrt benutzt werden, Näherungen für Quadratwurzeln zu verbessern – in nicht zu komplizierten Fällen sogar ohne Taschenrechner.

Unerwartet und etwas schwieriger ist, dass auch beim Bilden des Inversen sich *kleine* prozentuale Fehler kaum ändern. Kombination mit der dritten binomischen Formel liefert ein einfaches Verfahren, Quadratwurzeln genau zu berechnen. Entscheidendes Hilfsmittel ist ein aus der dritten binomischen Formel gewonnener einfacher Bruchterm. Fehler werden mit Hilfe von Prozentrechnung kontrolliert.

Eine zweite Umformung der dritten binomischen Formel in einen Bruchterm liefert einen Irrationalitätsbeweis für Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen, die *keine* Quadratzahlen sind. Technisch ist dazu nötig einen Doppelbruch durch Erweitern in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln. – Der Beweis ist indirekt. Falls die Wurzel *rational* wäre, gäbe es einen Bruch mit *kleinstem* Nenner, der gleich der Wurzel ist. Der aus der dritten binomischen Formel hergeleitete Bruchterm liefert aber eine Darstellung der Wurzel mit *kleinerem* Nenner, also einen Widerspruch.

Für jedes dieser Ergebnisse wird mit kurzen Umformungen einfacher Terme zielstrebig gearbeitet. Daher werden einerseits die Regeln für Termumformungen geübt, andererseits hat man ein Ziel vor Augen, das man mit diesen Umformungen erreichen will.

Binomische Formeln

1. binomische Formel : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
auch : $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.
Einsetzen von $b = -c$: $(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$
heißt auch 2. binomische Formel.
3. binomische Formel : $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$,
denn : $(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b) + b\cdot(a-b)$.

Ich glaube, man kann sagen, dass diese Termumformungen die wichtigsten sind, die vorkommen.

1. Fehler, Prozente und wie man damit umgeht.

In ihren ersten Jahren begegnen Kinder nur genauen Zahlen. Später wächst die Bedeutung von Zahlen, die nicht genau sind, z.B. Ergebnisse von Messungen, die man nicht besser machen kann, oder Irrationalzahlen, deren Werte man ja nie als endliche Dezimalzahlen genau angeben kann. Welche Verabredungen haben sich im Umgang mit ungenauen Zahlen durchgesetzt? – Wir werden die Verabredungen mit *einfachen Termen* ausdrücken.

Falls x ein Messergebnis ist, so teilen die Experimentatoren üblicher Weise Fehlerschranken zu dem mitgeteilten Ergebniswert a mit, z.B.:

$$x = a \pm 0.01 \quad \text{oder} \quad |x - a| \leq 0.01, \text{ Bedeutung} : a - 0.01 \leq x \leq a + 0.01.$$

Eine häufige Zusatzverabredung ist, den mitgeteilten Messwert a nur auf so viele Stellen anzugeben, dass die Fehlerangabe sich nur auf die *letzte* Stelle auswirkt. Durch die Benutzung der Taschenrechner ist diese Verabredung unzuverlässig geworden: Multipliziert man z.B. einen auf drei Stellen gemessenen Kreisradius mit 2π, so ist die Rechnerausgabe für den Umfang 10-stellig. Das notwendige Runden entfällt oft aus Bequemlichkeit, aber das 10-stellige Ergebnis ist eben nicht so genau, wie es aussieht.
So ähnliche Angaben werden auch bei Irrationalzahlen gemacht, z.B.:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad |\sqrt{2} - 1.41| < 0.04.$$

Falls man die Definition der Irrationalzahl gut genug versteht, wird oft zusätzlich angegeben, auf welche Weise man bessere Näherungen erhalten kann.

Im täglichen Leben werden Unterschiede, Abweichungen oder Veränderungen nicht wie beschrieben als "absolute" Zahlenwerte angegeben, sie werden meistens als *Prozentangaben* formuliert. Z.B. bedeutet *"Zucker ist 2025 um 4% teurer als 2024"*:

Egal, welche Menge Zucker man betrachtet,
der Preis ist 2025 um den Faktor 1.04 größer als 2024.

Die Erklärung für diese Verabredung liegt in dem aus dem Lateinischen stammenden Wort *Prozent*. Es bedeutet *pro Hundert*. Mit einer Vergrößerung um *ein Prozent* ist gemeint, dass die betrachtete Größe um ein Hundertstel ihres Anfangswertes wächst. In Formeln:

$$\text{Anfangsgröße } = a, \quad \text{Wachstum um } 1\% \text{ ergibt die Endgröße } a + \frac{a}{100} = a \cdot 1.01,$$

$$\text{Anfangsgröße } = a, \quad \text{Wachstum um } p\% \text{ ergibt die Endgröße } a + a \cdot \frac{p}{100} = a \cdot (1 + \frac{p}{100}).$$

Weil im Sprachgebrauch *Prozente addiert werden*, passieren leicht Fehler wie folgender: Wir haben einmal eine um 50% reduzierte Ware *umsonst* bekommen, weil es an diesem Tag für alle reduzierten Produkte einen weiteren Rabatt von 50% gab. Aber so sind Prozente *nicht* gemeint: Die 50% des zweiten Rabatts sind **nicht** 50% des ursprünglichen Preises, sondern 50% des *reduzierten* Preises, also die Hälfte der Hälfte des ursprünglichen Preises, also ein Viertel oder 25% des ursprünglichen Preises. Um solche Fehler zu vermeiden, sollte man beim Rechnen mit Prozenten die multiplikativen Formeln verwenden: Bei einer Reduktion um 30% sollte man nicht 30% *subtrahieren* sondern mit $(1 - \frac{30}{100}) = 0.7$ *multiplizieren*. Eine zweimalige Reduktion um 30% ergibt dann mühelos eine Reduktion um den Faktor $0.7 \cdot 0.7 = 0.49$, also eine Reduktion um 51% auf 49% des Ausgangswertes.

2. Verhalten der Fehler bei Addition und Multiplikation.

Prozentuale Änderungen heißen auch *relative* Änderungen, denn sie werden "relativ" zu der Anfangsgröße so ausgerechnet:

$$\frac{\text{Endgröße} - \text{Anfangsgröße}}{\text{Anfangsgröße}} = \text{Änderungsfaktor} - 1 = ((\text{Änderungsfaktor} - 1) \cdot 100)\%.$$

Da eine Verwechslung von absoluten und relativen Änderungen ein sehr großer Fehler ist, werden relative Änderungen praktisch immer in Prozent angegeben, obwohl das Rechnen mit den Änderungsfaktoren einfacher ist, weil es ohne das Umrechnen mit "100" auskommt.

Absolute und relative Fehler verhalten sich bei Addition von oder Multiplikation mit *genauen* Zahlen c verschieden, beinahe entgegengesetzt: Sei x die ungenau bekannte Zahl und a der mitgeteilte Wert. Dann hat man diesen wichtigen Unterschied:

$(x + c) - (a + c) = x - a$	– Absolute Fehler ändern sich bei Addition von c nicht.
$\dfrac{c \cdot x - c \cdot a}{c \cdot a} = \dfrac{x - a}{a}$	– Relative Fehler ändern sich bei Multiplikation mit c nicht.

Wegen der multiplikativen Natur der Prozente ist es ein Fehler zu glauben, dass eine anfängliche Addition von 5% durch eine folgende Subtraktion von 5% rückgängig gemacht würde. Die multiplikative Notation zeigt zusammen mit der *dritten binomischen Formel*, einen wie großen Fehler dieser Irrtum macht:

$$a \cdot (1 + 0.05) \cdot (1 - 0.05) = a \cdot (1^2 - 0.05^2) < a.$$

Und die *erste binomische Formel* zeigt (wieder zusammen mit der multiplikativen Notation), um wie viel besser man dasteht, wenn man zweimal $\frac{p}{2}\%$ gut geschrieben bekommt, als auf einmal $p\%$:

$$a \cdot (1 + \frac{p}{200}) \cdot (1 + \frac{p}{200}) = a \cdot (1 + \frac{p}{100} + (\frac{p}{200})^2) > a \cdot (1 + \frac{p}{100}).$$

Diese Korrekturen der durch die additive Sprache nahe gelegten Fehler sind vor allem im Finanzwesen wichtig. In anderen Situationen sorgen die ungenauen Zahlen dafür, dass auch die Prozentzahlen selber nur ungefähr gemeint sind und *höchstens* zweistellig angegeben werden. Das erlaubt schnelle Überschlagsrechnungen im Kopf. Sind außerdem die Prozentzahlen *klein* ($p \ll 10$), so kann man die quadratischen Abweichungen vom additiven Verhalten (z.B. in den beiden vorhergehenden Beispielen) *ignorieren*. Das muss genauer erklärt werden.

Wenn für eine Vergleichszahl a und eine nicht so genau bekannte Zahl x gilt:

$$a \cdot 1.009 \leq x \leq a \cdot 1.011,$$

dann wird das oft zusammengefasst als: *x weicht von a höchstens um ungefähr* 1% *ab.*

Will man nun *a zweimal* um 1% vergrößern, so findet man mit der *ersten binomischen Formel*

$$a \cdot 1.01 \cdot 1.01 = a \cdot (1 + 0.02 + 0.0001) \approx a \cdot (1 + 0.02),$$

wobei die 0.0001 <u>mit Recht</u> ignoriert wird, weil die 1 in 1% ja schon nicht als *genau* 1 bekannt war. Man erhält also (außer im Finanzwesen) eine Vergrößerung um 2%.

3. Verhalten relativer Fehler beim Quadrieren.

Für *kleine* Prozentzahlen $p\% \leq 5\%$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Weicht } x \text{ von dem mitgeteilten Wert } a \text{ um höchstens } p\% \text{ ab,}\\ \text{so weicht } x^2 \text{ von dem Wert } a^2 \text{ höchstens um ungefähr } 2p\% \text{ ab}\\ \text{und } \sqrt{x} \text{ ist von } \sqrt{a} \text{ höchstens um ungefähr } 0.5p\% \text{ verschieden.}\end{array}}$$

Nachgerechnet mit der *ersten binomischen Formel* :

$$1 - \frac{p}{100} \leq \frac{x}{a} \leq 1 + \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad (1 - \frac{p}{100})^2 \leq \frac{x^2}{a^2} \leq (1 + \frac{p}{100})^2 \approx 1 + \frac{2p}{100},$$

denn : $(\frac{p}{100})^2 \leq 0.05 \cdot \frac{p}{100} \ll \frac{2p}{100}$, kann ignoriert werden.

Beispiel "Genauigkeit verbessern mit Prozentrechnung":

14^2 ist 2% kleiner als 200, deshalb ist 14 ungefähr 1% kleiner als $\sqrt{200}$. Daher ist eine *Vergrößerung* von 14 um 1%, also 14.14, viel näher an $\sqrt{200}$, nämlich $14.14^2 \approx 199.94$, also nur noch 0.03% kleiner als 200.

Wiederholung (nicht im Kopf): Vergrößert man 14.14 um $\frac{1}{2}\cdot 0.03\%$, so ergibt sich 14.142121, quadrieren zeigt die Verbesserung: $14.142121^2 = 199.99959$.

(14.14^2 im Kopf: $14.14^2 \approx 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot 0.14 = 196 + 3.92$, Fehler: $0.14^2 \approx 0.02$.)

Schon bei den Babyloniern

Nicht in der Sprache der Prozentrechnung wohl aber als mathematische Idee haben schon die Babylonier diesen Trick beim Wurzelziehen verwendet. Ich habe die Geschichte so verstanden, dass deren Techniken auf den gefundenen Tontafeln als Zahlenbeispiele mitgeteilt werden. In dem Buch [Franz Lemmermeyer, Mathematik à la Carte – Babylonische Algebra] wird die Methode der Babylonier so mit *Termen* ausgedrückt:

Um eine Näherung a für $\sqrt{N}$ durch Addition von h zu verbessern, wird $a + h$ mit der *ersten binomischen Formel* quadriert: $(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$, mit dem Ziel, dass dies gleich N sein soll. Dann wurde schon damals h^2 als sehr klein gegen $2ah$ ignoriert und h berechnet als

$$(B) \qquad h = \frac{N - a^2}{2a}, \text{ also } a + h = a + \frac{N - a^2}{2a} = \frac{1}{2}(a + \frac{N}{a}).$$

Es ergibt sich also (mit einfachen Termumformungen!) die nach Heron benannte bekannteste Verbesserung einer Näherung a. Dabei ist die prozentuale Veränderung von a^2, nämlich $p\% = (\frac{2ah}{a^2} \cdot 100)\%$, in der Tat etwa doppelt so groß wie die prozentuale Vergrößerung $\frac{h}{a}$ von a.

In der Heronschen Formel wird der Mittelwert zwischen einer zu großen und einer zu kleinen Näherung für $\sqrt{N}$ gebildet. Wir sehen im nächsten Abschnitt, dass die relativen Fehler von a und N/a ungefähr gleich groß sind und sich daher gegenseitig fast neutralisieren. Das erklärt die enorme Verbesserung, die die Heronsche Formel liefert.

4. Verhalten relativer Fehler beim Bilden des Inversen.

Vielleicht ist es überraschend, dass sich kleine (ungefähre) Prozente auch mit der Bildung des **Inversen** $x \mapsto x^{-1}$ gut vertragen:

Weicht x von dem mitgeteilten Wert a um $p\% \leq 5\%$ ab, so weicht x^{-1} von dem Wert a^{-1} ungefähr um $p\%$ ab.

Zunächst ein verdeutlichendes Zahlenbeispiel:

$$100 \text{ ist } 1\% \text{ größer als } 99, \text{ denn } \frac{100-99}{100} = \frac{1}{100} = 1\%$$

$$\frac{1}{100} \text{ ist } 1\% \text{ kleiner als } \frac{1}{99}, \text{ denn } \frac{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} \cdot \frac{100}{100} = \frac{1}{99} \approx 1\%.$$

Behandlung mit Termumformungen:

Voraussetzung: $-\frac{p}{100} \leq \frac{x-a}{a} \leq +\frac{p}{100}$ oder $a \cdot (1 - \frac{p}{100}) \leq x \leq a \cdot (1 + \frac{p}{100})$.

Behauptung: $\frac{-p}{100} \leq \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} \leq \frac{+p}{100}$ (rechte Ungleichung gilt ungefähr)

Beweis:

(1) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{x} - 1$ (Doppelbruch mit a erweitern)

(2) $\frac{1}{1 + \frac{p}{100}} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{1}{1 - \frac{p}{100}}$ (Termumformung der Voraussetzung)

(3) $1 - \frac{p}{100} \leq \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$ (wegen $(1-b) \cdot (1+b) = 1 - b^2 \leq 1$)

(4) $\frac{1}{1 - \frac{p}{100}} = 1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{100}} \approx 1 + \frac{p}{100}$, (da $\frac{1}{1 - \frac{p}{100}} \approx 1$).

(5) $-\frac{p}{100} \leq \frac{a}{x} - 1$ (Zeile 3 eingesetzt in Zeile 2)

(6) $\frac{a}{x} - 1 \leq \frac{p}{100}$ (Zeile 4 eingesetzt in Zeile 2)

Zeile 1 mit Zeilen 5 und 6 ergibt die Behauptung.

Es ist nützlich, dies Verhalten relativer Fehler beim Bilden von Inversen zu kennen. Denn das Bilden der Inversen im Kopf ist meistens mühsam und es hilft, wenn man schon vorher weiß, dass sich dabei relative Fehler kaum ändern.

Wer die Prozentrechnung soweit beherrscht, kann mit der dritten binomischen Formel ein beinahe magisch wirkendes Kunststück vorführen:

5. Berechnung und Verbesserung von Quadratwurzel-Näherungen ohne Analysiskenntnisse.

Die *dritte binomische Formel* liefert

$$(\sqrt{91}-9)\cdot(\sqrt{91}+9) = 91-9^2 = 10, \quad \text{also:} \quad \sqrt{91} = 9 + \frac{10}{\sqrt{91}+9}.$$

Wenn man statt $\sqrt{91}$ im Nenner eine Zahl r_1 mit $9 \le r_1 \le 10$ einsetzt, so liefert die rechte Seite eine Zahl r_2 mit $9 < r_2 < 10$, genauer:

$$r_2 := 9 + \frac{10}{r_1+9}, \quad \text{wobei sogar} \quad 9\tfrac{10}{19} \le r_2 \le 9\tfrac{10}{18}.$$

Man hat offensichtlich, dass aus zu kleinen Näherungen zu große werden und umgekehrt:

$$r_1 < \sqrt{91} \;\Rightarrow\; r_2 > \sqrt{91}, \quad r_1 > \sqrt{91} \;\Rightarrow\; r_2 < \sqrt{91}, \quad r_1 = r_2 \;\Leftrightarrow\; r_1 = \sqrt{91}.$$

Wir wollen mit Hilfe von *Prozentrechnung* zeigen, dass der prozentuale Unterschied zwischen r_2 und $\sqrt{91}$ ungefähr um den Faktor 36 *kleiner* ist als der prozentuale Unterschied zwischen r_1 und $\sqrt{91}$. Man kann also sehr leicht Näherungen verbessern und den Fehler sehen, da die Wurzel immer *zwischen* r_1 und r_2 liegt.

Beispiele:
$r_1 = 9 \;\Rightarrow\; r_2 = 9.555\ldots,\; r_2^2 \approx 91.31 > 91.$
$r_1 = 9.5 \;\Rightarrow\; r_1^2 = 90.25 < 91,\; r_2 \approx 9.54054,\; r_2^2 \approx 91.022 > 91.$
$r_1 = 9.54054 \;\Rightarrow\; r_2 \approx 9.53936,\; r_2^2 \approx 90.99939 < 91.$

Herleitung der Verbesserung allein mit Prozentrechnung:

Angenommen der relative Fehler von r_1 sei $p\% \le 5\%$. Zu r_1 wird im Nenner die *fast gleich große* Konstante 9 addiert, dabei ändert sich der absolute Fehler nicht, der relative Fehler aber sinkt ungefähr auf $\frac{p}{2}\%$. Weil kleine relative Fehler bei Inversenbildung etwa gleich bleiben und Multiplikation mit 10 den relativen Fehler nicht ändert, hat der Bruch $10/(r_1+9)$ ebenfalls einen relativen Fehler von ungefähr $\frac{p}{2}\%$. Außerdem hat dieser Bruch einen wenig von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Wert. Zu diesem Bruch wird die ungefähr 18 mal so große Konstante 9 addiert, um r_2 zu erhalten. Dabei sinkt der relative Fehler ungefähr um den Faktor 18 auf den relativen Fehler von r_2, wie behauptet auf $\frac{p}{36}\%$.

Beziehung zur babylonischen Heronformel (B), Seite 4

Da dieser Text ja auch im symbolischen Rechnen üben soll, schreiben wir allgemeiner (hier sind r_1 und r_2 Variable, a, b, N sind *feste* Zahlen, sogenannte Parameter):

$$a^2 \le N \le b^2 \;\Rightarrow\; (\sqrt{N}-a)\cdot(\sqrt{N}+a) = N - a^2 \text{ und wegen}$$
$$\sqrt{N} := a + \frac{N-a^2}{\sqrt{N}+a} \text{ schließlich}: \quad r_2 := a + \frac{N-a^2}{r_1+a}, \; (\text{mit } \; a \le r_1 \le b \; \text{ erlaubt}).$$

Setzt man hier den erlaubten Wert $r_1 = a$ ein, so erhält man Formel (B) von Seite 4.

Wir haben jetzt so viel mit ungefähren Prozentzahlen gerechnet und kleine Fehler ignoriert, dass ich nochmal klarstellen möchte: Im Finanzwesen sind Prozente vertraglich festgelegte *genaue* Zahlen, die auch viele Dezimalziffern haben können. Nur im übrigen täglichen Leben sind Prozente auf meistens zwei Stellen gerundete Zahlen, die auf Schätzungen beruhen und nicht auf genauen Definitionen. Trotzdem kann man überraschende Argumente mit ihnen machen.

6. Ein Irrationalitätsbeweis mit denselben Mitteln.

Fast dieselbe Umformung der *dritten binomischen Formel* und eine *Vereinfachung eines Doppelbruch-Terms* durch Erweitern ermöglicht *ohne* weitere Begriffe ein ganz andersartiges Beweisargument, das zeigt:

Natürliche Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, haben irrationale Quadratwurzeln.

Wir beweisen nur ein Beispiel und beginnen wie eben: Die dritte binomische Formel liefert

$$(\sqrt{91}-9)\cdot(\sqrt{91}+9) = 91-9^2 = 10, \quad \text{also auch:}$$

$$(\star) \qquad \sqrt{91} = -9 + \frac{10}{\sqrt{91}-9}.$$

Setzt man in $(\star)$ wie eben im Nenner für $\sqrt{91}$ eine Näherung r_1 ein, so berechnet diese Formel einen Wert r_2 mit erheblich *größerem* relativen Fehler als r_1. So eine Formel scheint zunächst nutzlos.

Setzt man jedoch einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit $9 < \frac{p}{q} < 10$ im Nenner ein, so ergibt die linke Seite der Formel $(\star)$ einen (meistens anderen) Bruch mit *kleinerem Nenner* :

$$\text{Aus } \; 9 < \frac{p}{q} < 10, \;\text{ also }\; 9\cdot q < p < 10\cdot q \;\text{ und }\; 0 < p-9\cdot q < q, \;\text{ folgt}$$

$$-9 + \frac{10}{\frac{p}{q}-9}\cdot\frac{q}{q} = -9 + \frac{10\cdot q}{p-9\cdot q} = \frac{-9\cdot p + 91\cdot q}{p-9\cdot q},$$

also wirklich ein Bruch mit kleinerem Nenner. Nun die überraschende Anwendung:

Wäre $\sqrt{91}$ **rational**, so gäbe es auch einen Bruch $\frac{p}{q} = \sqrt{91}$ mit *kleinstem Nenner* (unter allen Brüchen, die gleich $\sqrt{91}$ sind). Setze diesen Bruch rechts in die Formel $(\star)$ ein und erhalte (wegen $9 < \frac{p}{q} = \sqrt{91} < 10$) eine Darstellung von $\sqrt{91}$ mit *kleinerem Nenner*. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von $\frac{p}{q}$, das ja den kleinst möglichen Nenner haben sollte. Daher kann $\sqrt{91}$ *nicht* rational sein.

Alle vorgeführten Rechnungen sind Termumformungen mit so einfachen Termen, dass sich Schülerinnen und Schüler vorstellen können, wofür die Terme Abkürzungen sind. Sie rechnen nach den *Regeln für Termumformungen*, aber gleichzeitig verfolgen sie ein Ziel, das nicht durch die Regeln definiert sondern ohne sie formuliert ist. Ungleichungen kommen in umgangssprachlich formulierbaren Kontexten vor.