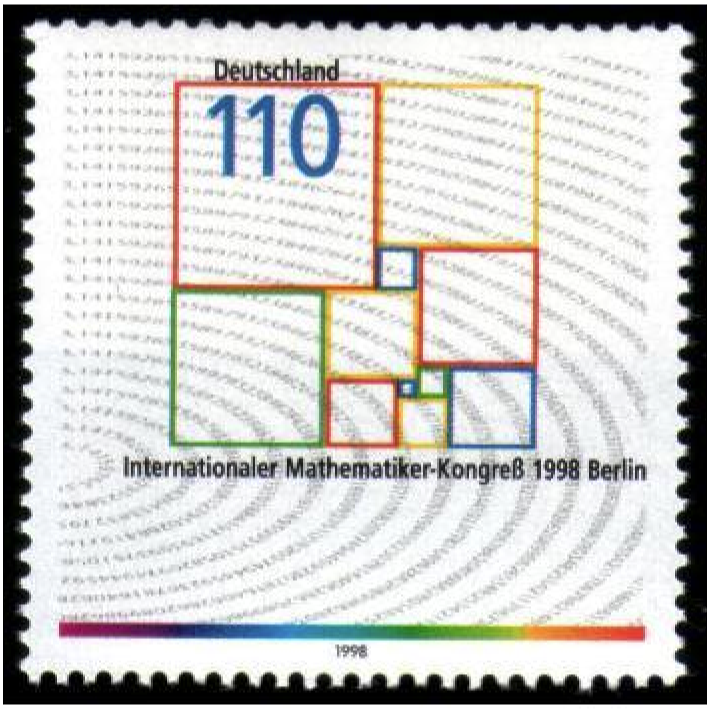
Zielstrebiges Arbeiten mit einfachen Termen. (Version 18.8.2025)

Voraussetzung: Variable und Terme seien wie in Barth, Algebra 7 Seiten 1-24, definiert https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth : als bequemes und eindeutig interpretierbares Kommunikationsmittel etwa zum Bezeichnen geometrischer Figuren oder zur Formulierung der Rechengesetze. Bevor das Üben von Termumformungen auf Seite 25 beginnt, soll an einem geometrischen Problem gezeigt werden, dass sich durch zielstrebiges Arbeiten mit wirklich sehr einfachen Termen Lösungen dieses Problems finden lassen, die durch Probieren nur von Personen mit ganz außergewöhnlicher Geduld gefunden werden können.

Das geometrische Problem, nämlich:

> *Setze lauter verschieden große Quadrate zu einem Rechteck zusammen!*

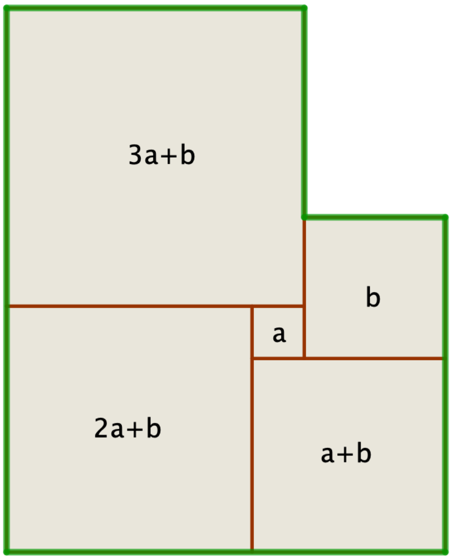
würden wohl die meisten Menschen für unlösbar halten, wenn sie nicht die abgebildete Briefmarke betrachten könnten.



Im Folgenden wird gezeigt, wie sich derartige Rechteck-Pflasterungen durch Rechnung mit sehr einfachen Termen finden lassen.

Natürlich ist dies geometrische Problem eher eine Kuriosität, aber es erlaubt, ein Ziel zu formulieren, mit dessen Hilfe zielstrebiges Arbeiten mit Termen geübt werden kann. Dieses *symbolische Rechnen* war ein enormer wissenschaftlicher Fortschritt.

Wie könnte man beginnen? Wir legen zunächst zwei Quadrate, für deren Kantenlängen wir die Variablen a und b benutzen, nebeneinander. Dann legen wir andere Quadrate darum herum und zwar so, dass die Anzahl der Ecken der zusammengesetzten Figur nicht größer wird, also gleich sechs bleibt. Die Kantenlängen der drei nächsten Quadrate lassen sich in sehr einfacher Weise aus a und b ausrechnen. Die erhaltene Figur kommt auf der Briefmarke in der Mitte unten vor, es sieht also wie ein guter Anfang aus.



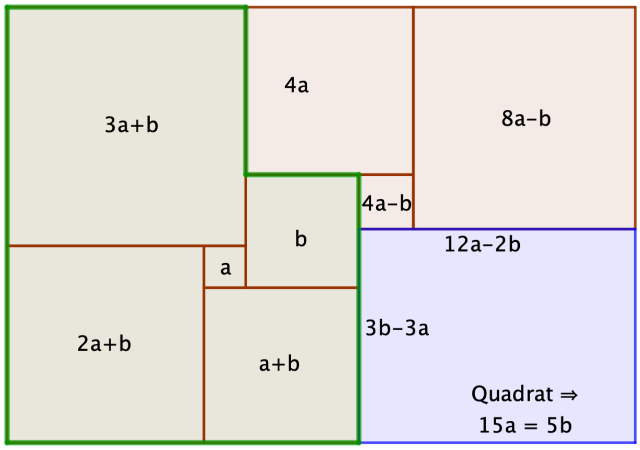
Rechts oben kann eine weiteres Quadrat so eingesetzt werden, dass die äußere Eckenzahl weiter sechs bleibt. Das nächste Bild zeigt, wie der Versuch beendet werden kann.

Nachdem die nächsten drei Quadrate mit den Kantenlängen $4a$, $4a-b$, $8a-b$ angefügt sind, ergänzt das blaue Rechteck mit den Kantenlängen $12a-b$, $3b-3a$ die Figur zu einem Rechteck. Die beiden Rechteckseiten sind nun gleich lang, wenn die Gleichung

$$12a - 2b = 3b - 3a \text{ oder } 3a = b$$

gilt. Wir haben also ein Rechteck so mit Quadraten gepflastert, dass keine zwei, die gleich groß sind, nebeneinander liegen.

Trotzdem haben wir unser Ziel nicht erreicht, weil vier Quadratgrößen *doppelt* vorkommen: $a = 4a - b$, $a + b = 4a$, $2a + b = 8a - b \ldots$.

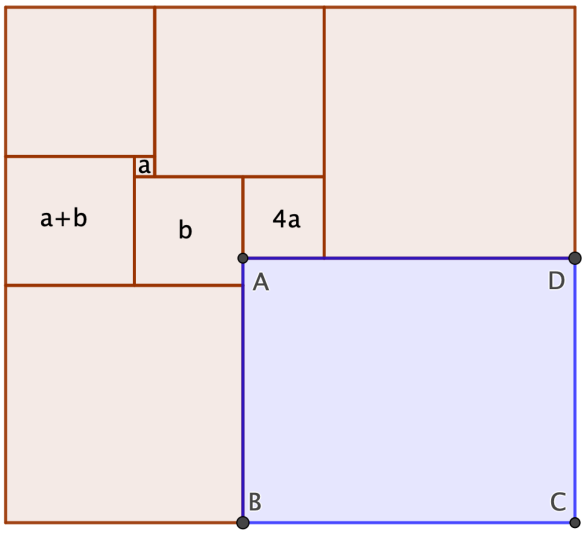


Wir machen also einen weiteren Versuch, bei dem die störende Punktsymmetrie vermieden wird. Da die Strategie nun vollständig beschrieben ist, kann dieser zweite Versuch schon als Aufgabe formuliert werden:

Berechne zunächst die Seitenlängen aller roten Quadrate - wieder mit einfachen Termen mit den Variablen a, b. Dann berechne die beiden Seitenlängen des blauen Rechtecks und setze sie gleich. Die einfachste ganzzahlige Lösung ist $a = 1$, $b = 7$. Es bleibt noch zu überprüfen, dass wirklich alle neun Quadrate verschieden groß sind:

$$1, 7, 8, 9, 10, 4, 14, 15, 18.$$

Wir haben also ein Rechteck mit neun verschieden großen Quadraten gepflastert!



Man kann dies Beispiel leicht zu einer Lösung mit 10 Quadraten verändern: Bevor das Quadrat links unten und das Rechteck rechts unten angefügt werden, lege noch ein Quadrat mit der Kantenläng $b - 4a$ in die Ecke A. Vergrößere das rote Quadrat links unten entsprechend und berechne die Seiten des neuen Rechtecks.

Diese Aufgabe sollte zeigen, wie leistungsfähig das symbolische Rechnen selbst mit sehr einfachen Termen ist. Man muss also nicht weitere Lösungen suchen. Für an dem Problem selber Interessierte ist hier noch eine Skizze für eine andere Lösung mit 9 Quadraten. Auch diese kann zu einer Lösung mit 10 Quadraten verändert werden, indem an der Ecke A ein weiteres Quadrat mit der Kantenlänge $b - a$ hinzugefügt wird. – Auch die Briefmarke kann jetzt behandelt werden, beginne die Berechnung mit unserer 5-quadratigen Anfangsfigur auf der Briefmarke, Mitte unten. – Es ist möglich, sich weitere Muster für 11 oder mehr Quadrate auszudenken.