

Arbeiten und Argumentieren mit einfachen Bruchtermen (Version 18.3.2026)

1. Einfache Bruchterme bei ähnlichen Dreiecken
2. Einfache Bruchterme beim Ohmschen Gesetz
3. Geometrische Irrationalitätsbeweise mit ähnlichen Rechtecken
4. Die Herleitung der Linsenformel nutzt zwei Paare ähnlicher Dreiecke
5. Strahlensatz und Bruchterme liefern die rationalen Punkte auf dem Einheitskreis

Ausblick:

6. Tangenten an den Graph von $f(x) = 1/x$ durch Vergleich mit Kreisen



Ähnlichkeit zelebrieren

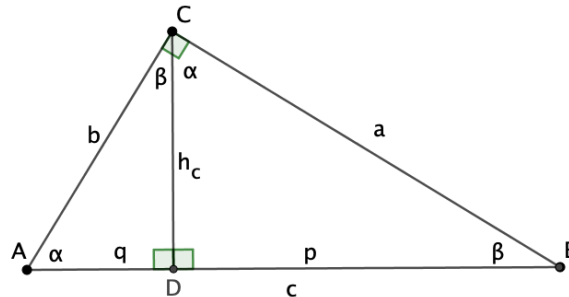
1. Bruchterme, ähnliche Dreiecke, Satzgruppe des Pythagoras

Den einfachsten Bruchtermen begegnet man bei ähnlichen Dreiecken. Aus der Winkelsumme im Dreieck folgt, dass die Höhe h_c eines rechtwinkligen Dreiecks ($\gamma = 90^\circ$) dieses in Dreiecke teilt, die zum Ausgangsdreieck ähnlich sind. Daher gelten folgende Gleichungen zwischen einfachst möglichen Bruchtermen:

$$(1) \quad \frac{a}{b} = \frac{p}{h_c} = \frac{h_c}{q}$$

$$(2) \quad \frac{b}{c} = \frac{q}{b} = \frac{h_c}{a}$$

$$(3) \quad \frac{a}{c} = \frac{p}{a} = \frac{h_c}{b}$$



Eine wichtige Äquivalenz-Umformung einer Gleichung zwischen zwei solchen Bruchtermen besteht darin, die Gleichung mit dem Produkt der Nenner zu multiplizieren. Das verbindet obige Ähnlichkeitsrelationen mit der Satzgruppe des Pythagoras:

Die zweite Gleichung in (1) liefert den *Höhensatz* $p \cdot q = (h_c)^2$.

Die erste Gleichung in (2) liefert eine Hälfte des *Satzes von Euklid*: $b^2 = q \cdot c$.

Die erste Gleichung in (3) liefert die andere Hälfte des *Satzes von Euklid*: $a^2 = p \cdot c$.

Aus dem Satz von Euklid folgt der Pythagoras: $a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c = c^2$.

Dieser Beweis hätte wohl nicht zur Berühmtheit dieses Satzes geführt. Ich glaube, die Berühmtheit beruht auf den vielfältigen, reizvollen Flächenverwandlungen, die den Satz des Pythagoras beweisen. Trotz dieser Vielfalt sind mir keine Anwendungen, die auf der Flächenformulierung beruhen, bekannt. Die ja häufigen Anwendungen beruhen alle darauf, dass der Satz aus der Länge der Katheten die Länge der Hypotenuse *ausrechnet*. Das kommt in dem Ähnlichkeitsbeweis offenbar auch nicht vor und wenn man nur diesen Beweis kennt, dann würde der Satz wohl lauten:

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe auf der längsten Seite das Dreieck in zwei zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke.

Mit der Umkehrung:

Falls die Höhe auf der längsten Seite das Ausgangsdreieck D in zwei zu D ähnliche Dreiecke teilt, so ist auch D rechtwinklig.

Das reicht natürlich nicht an die Schönheit der antiken Flächenformulierung heran.

Umgekehrt liefern Flächensätze Bruchgleichungen: $2F = ah_a = bh_b \Leftrightarrow a : b = h_b : h_a$.

Einfache Bruchterme treten auch in der Prozentrechnung auf, vgl. Text T2. Ganz ähnlich ist bei den meisten Rechnungen das Dividieren unvermeidlich, daher kommen Bruchterme auch vor, wenn die Ausgangsformeln noch ohne Brüche sind.

Eine erste *physikalische* Anwendung einfacher Bruchterme gehört zum

Ohmschen Gesetz

2. Bruchterme und Ohmsches Gesetz

Wenn eine Spannungsquelle die Spannung U liefert und dann durch einen angeschlossenen Stromkreis der Strom I fließt, dann sagt man

Der Stromkreis hat den Widerstand $R = \frac{U}{I}$.

Betrachtet man den Stromkreis als fest und die Spannung als regelbar, so ist R eine Konstante. Das ergibt eine *lineare* Beziehung zwischen Strom I und Spannung U , das **Ohmsche Gesetz**: $U = R \cdot I$

Nun soll ein Stromkreis betrachtet werden, in dem der Strom von der Spannungsquelle wie in der Zeichnung durch zwei parallel geschaltete Widerstände R_1, R_2 zurück zum anderen Pol der Spannungsquelle fließt.

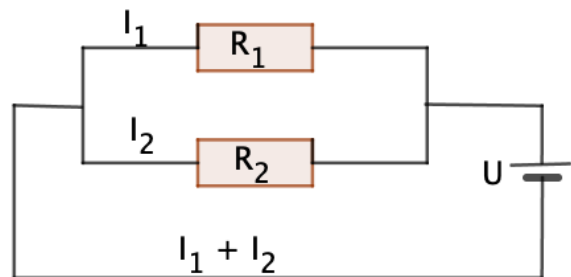
Frage: Wie kann man den Widerstand dieses Stromkreises aus R_1 und R_2 ausrechnen?

Durch jeden der beiden Widerstände fließt der Strom nach dem Ohmschen Gesetz:

also $I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}$

mit dem Gesamtstrom $I_1 + I_2$.

Gesamtwiderstand: $R = \frac{U}{I_1 + I_2}$



also $R = \frac{U}{I_1 + I_2} = \left(\frac{U}{\frac{U}{R_1}} + \frac{U}{\frac{U}{R_2}} \right) \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, meist: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Ein trauriger Zusatz

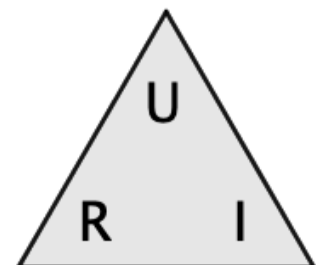
Ich habe eben die Formeln

$$U = R \cdot I, R = \frac{U}{I}, I = \frac{U}{R}$$

als “offensichtlich äquivalent” benutzt. Außerhalb des Gymnasiums in einer Situation, in der es nicht um symbolisches Rechnen und Formelverständnis ging sondern um häufiges Benutzen dieser Äquivalenz, wurde das schon vor dem Jahr 2000 so erklärt:

Das Ohmsche Dreieck

Will man wissen, wie eine dieser Größen von den beiden anderen abhängt, so hält man diesen Buchstaben zu. Dann liest man ab, ob die beiden anderen Buchstaben nebeneinander stehen (also zu multiplizieren sind) oder übereinander stehen (also durcheinander zu teilen sind). Inzwischen wird diese “Erklärung” sogar in der MNU für das Gymnasium empfohlen.



Ein schönes Beispiel für argumentationsleere Rezeptlehre – statt Mathematik.

3. Rechtecke mit rationalen oder irrationalen Seitenverhältnissen

Rechtecke mit den rationalen Seitenlängen $\frac{j}{n}, \frac{k}{n}$ kann man offenbar mit Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ pflastern. Falls j und k einen gemeinsamen Faktor haben, kann man auch mit größeren Quadraten pflastern. Die größte mögliche Seitenlänge ist $\frac{\text{ggT}(j,k)}{n}$. Es ist nicht nötig, dass die Seitenlängen selbst rational sind, es kommt nur auf deren Verhältnis an. Ist etwa e eine Strecke mit irrationaler Länge, so läßt sich ein Rechteck mit den Seitenlängen $j \cdot e, k \cdot e$ offensichtlich mit $j \cdot k$ Quadraten der Seitenlänge e pflastern. Die größt-möglichen pflasternden Quadrate haben die Seitenlänge $\text{ggT}(j, k) \cdot e$. Man braucht den ggT nicht auszurechnen, denn: Verkleinert man ein Rechteck R_1 zu einem Rechteck R_2 , indem man ein Quadrat abzieht, dessen Kantenlänge gleich der kleineren Kantenlänge von R_1 ist, so gilt:

Quadrate, mit denen man R_1 pflastern kann, pflastern auch R_2 und umgekehrt, denn: Sei t die Seitenlänge von Quadraten, mit denen man R_1 pflastern kann. Dann hat R_1 ganzzahlige Vielfache von t als Seitenlängen, etwa $s_1 = n_1 \cdot t > s_2 = n_2 \cdot t$. Die Seitenlängen von R_2 sind dann: $s_1 - s_2 = (n_1 - n_2) \cdot t = n'_1 \cdot t, s_2 = n_2 \cdot t$.

Und das kann man wiederholen: In dem gezeichneten Rechteck mit den Seitenlängen s_1, s_2 kann man zweimal ein Quadrat der Seitenlänge s_2 wegnehmen, bis ein Rechteck entsteht, dessen *größere* Seite die Länge s_2 hat. Dann ist die kleinere Seitenlänge $s_3 = s_1 - 2s_2$. Von dem $s_2 \times s_3$ -Rechteck kann man wieder zwei Quadrate wegnehmen. Übrig bleibt ein Rechteck, das mit drei Quadraten der Seitenlänge $s_4 = s_2 - 2s_3$ gepflastert werden kann.

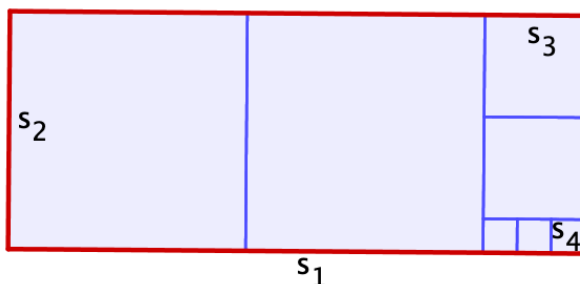
Gezeichnetes Beispiel:

$$s_1 - 2 \cdot s_2 = s_3 < s_2$$

$$s_2 - 2 \cdot s_3 = s_4 < s_3$$

$$s_3 - 3 \cdot s_4 = 0$$

Quadrate der Seitenlänge s_4 pflastern das $s_1 \times s_2$ -Rechteck. Es



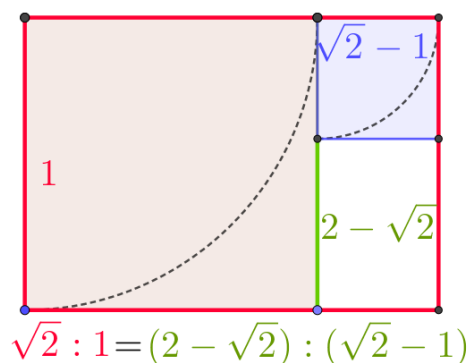
Es gilt: $s_3 = 3s_4, s_2 = 2s_3 + s_4 = 7s_4, s_1 = 2s_2 + s_3 = 17s_4$.

Daher ist $s_1 : s_2 = 17 : 7$ und $s_4 = 5s_2 - 2s_1, 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17 = \text{ggT}(17, 7)$.

Dies geometrische Verfahren, das schon aus der Antike stammt, benötigt nicht, dass die Seitenlängen s_1, s_2 selber rational sind. Nur ein rationales Verhältnis ist wichtig. Das Verfahren ähnelt sehr genau der algorithmischen Berechnung des ggT. Es kann deshalb auch als Erinnerungsstütze für den ggT-Algorithmus betrachtet werden. Bei einem rationalen Seitenverhältnis $s_1 : s_2 = m : n$ endet das Verfahren immer mit einem Quadrat der Seitenlänge s_e , für die gilt: $s_1 : s_2 : s_e = m : n : \text{ggT}(m, n)$.

Falls das Seitenverhältnis irrational ist, kann dies Abziehen von Quadraten natürlich nicht zu einem Ende kommen. Kann es trotzdem nützlich sein? Wir probieren das am DIN-Format aus. Die Definition der DIN-Rechtecke ist, dass beim Zusammenfallen auf die Hälfte ein ähnliches Rechteck entsteht, also:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{0.5s_1}{s_2} \quad \text{z.B. } s_2 = 1, s_1 = \sqrt{2}$$



Man sieht im Bild: Verkleinert man das $(\sqrt{2} \times 1)$ -DIN-Rechteck zunächst um das rötliche Quadrat, so entsteht ein Rechteck, das schmaler ist als ein DIN-Rechteck. Verkleinert man weiter um das blaue Quadrat, so entsteht das weiße Rechteck, **das ähnlich zu dem Ausgangsrechteck ist.**

Beim weiteren Wegnehmen von Quadraten passiert dasselbe immer wieder, das Verfahren bricht nicht ab wie bei rationalen Verhältnissen.

Wir sehen also einen geometrischen Irrationalitätsbeweis vor uns!

Ein berühmtes Verhältnis, dessen Irrationalität schon in der Antike bekannt war und das in der Baukunst viel verwendet wurde, ist der *goldene Schnitt*. Er ist definiert als Teilung einer Strecke, sodass gilt

Gesamtlänge : größerem Abschnitt = größerer Abschnitt : kleinerem Abschnitt

Ein *goldenes Rechteck* hat entsprechend ein Seitenverhältnis

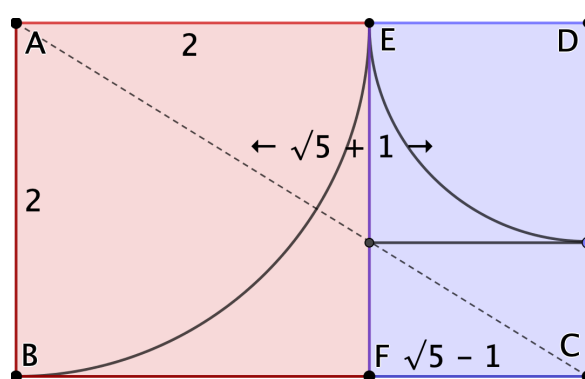
$$g := s_1 : s_2 = s_2 : (s_1 - s_2) \Leftrightarrow g \cdot (g - 1) = 1 \Leftrightarrow g = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Für das gezeichnete goldene Rechteck bedeutet das: Nimmt man das rötliche Quadrat weg, so ist das übrig bleibende blaue Rechteck *ähnlich*, also wieder ein goldenes Rechteck. Wieder kann das Wegnehmen von Quadraten *nicht* nach endlich vielen Schritten enden, wie es bei rationalen Verhältnissen der Fall ist.

Wir sehen einen weiteren geometrischen Irrationalitätsbeweis vor uns.



Florenz



Goldener Schnitt

Sind dies isolierte Beispiele oder kann man mit Termumformungen die Situation allgemeiner verstehen?

Als erste allgemeine Situation gehen wir von einem $q \times 1$ - Rechteck aus, also mit den Seitenlängen $s_1 = q > s_2 = 1$. Wir nehmen an, dass nach Abzug von n nebeneinander liegenden Quadraten (mit $n < q < n + 1$) ein ähnliches $s_2 \times s_3$ - Rechteck entsteht mit $s_3 = (q - n) < s_2$. Was folgt daraus für q ? Erstens: q ist nicht rational. Zweitens:

$$\frac{q}{1} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \frac{1}{q-n} \Leftrightarrow \underline{q^2 - nq = 1} \Rightarrow q = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1} > 1$$

Wir sehen, dass q Lösung der unterstrichenen *quadratischen Gleichung* ist.

Den goldenen Schnitt erhält man mit $n = 1$ und $n = 2$ liefert $q = 1 + \sqrt{2}$.

Wir nehmen nun an, dass das im ersten Schritt erhaltene $1 \times (q - n)$ - Rechteck *nicht* ähnlich zu dem $q \times 1$ - Rechteck ist, aber dass wir nach Abzug von m nebeneinander liegenden Quadraten der Seitenlänge $(q - n)$ ein ähnliches Rechteck erhalten, sodass q irrational sein muss. (Wie im ersten Schritt ziehen wir zuerst von der längeren Seite so oft Quadrate ab, bis sie die neue kürzere Seite ist.) Wir haben dann

Bedingung an m $m \cdot (q - n) < 1 < (m + 1) \cdot (q - n)$

Neue kürzere Seite $s_4 = s_2 - m \cdot s_3 = 1 - m \cdot (q - n) < s_3$

Ähnlichkeit $\frac{q}{1} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_3}{s_4} = \frac{q-n}{1-m \cdot (q-n)} \Rightarrow q$ ist irrational

Quadratische Gleichung $q - m \cdot q^2 + mn \cdot q = q - n \Leftrightarrow \underline{q^2 - nq = \frac{n}{m}}$

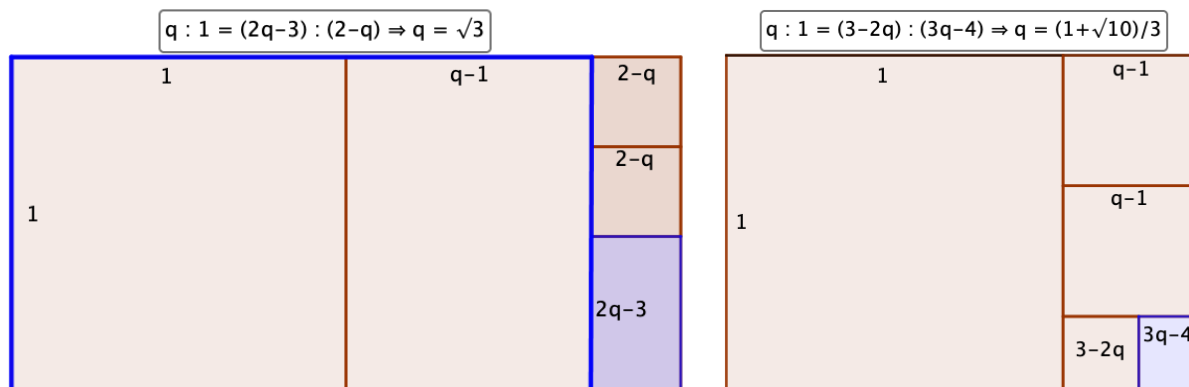
Wieder folgt, dass q irrationale Lösung einer quadratischen Gleichung ist!

Das Beispiel des DIN-Formats zeigt, dass man im zweiten Schritt mehr Möglichkeiten hat. Dort wurde nur *ein* Quadrat abgezogen und ein ähnliches Rechteck erreicht, die für m formulierte Bedingung gibt aber $m = 2$ und dann kein ähnliches Rest-Rechteck. Für kleinere m , also falls $(m + 1)(q - n) < 1$ gilt, ist $s_4 = s_2 - m \cdot s_3 > s_3$ und das Seitenverhältnis des Rest-Rechtecks kann mit $s_1 : s_2 = q : 1$ so verglichen werden:

$$\frac{s_4}{s_3} = \frac{1 - m \cdot (q - n)}{q - n} = \frac{q}{1} \Leftrightarrow q^2 + (m - n)q = 1 + mn.$$

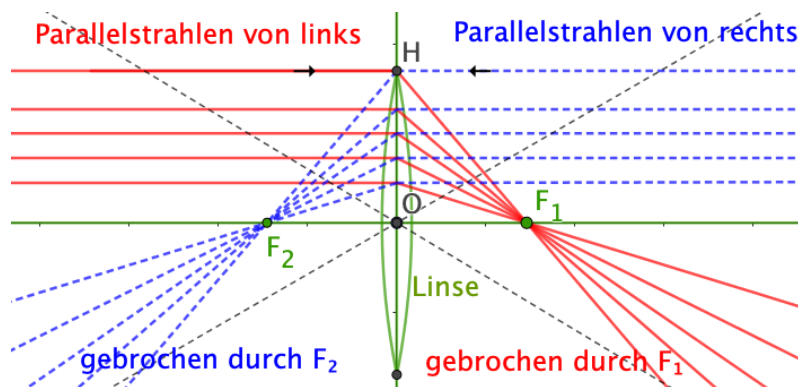
Hier gibt $n = 1, m = 1$ wie erwartet $q = \sqrt{2}$, das DIN-Format.

Statt weiterer Rechnungen (bei denen in Zähler und Nenner nur in q lineare Terme auftreten, also quadratische Gleichungen für q liefern) hier noch Bilder zweier geometrischer Irrationalitätsbeweise:



4. Dünne Linsen, Modellierung, Abbildungsformeln

Eine dünne Linse ist ein rotationssymmetrischer Glaskörper, durch den parallel zur Rotationsachse von links kommende Lichtstrahlen (rot) so gebrochen werden, dass sie durch den rechten “Brennpunkt” F_1 gehen. Ebenso werden von rechts kommende, zur Rotationsachse parallele Lichtstrahlen (blau) so gebrochen, dass sie durch den linken “Brennpunkt” F_2 gehen. Strahlen durch O werden nicht gebrochen (schwarz). Der Abstand f der Brennpunkte von der Linse charakterisiert die Linse.

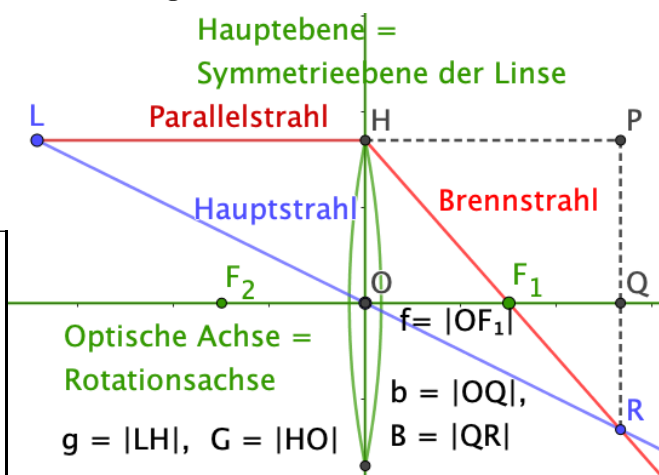


Solche Linsen erzeugen die Bilder in Fotoapparaten und korrigieren als Brillen Sehfehler. Für dünne Linsen gibt es ein einfaches geometrisches Modell, in dem die genaue Form der Linsenoberflächen gar nicht vorkommt:

Die *geometrische Optik* beschreibt die Ausbreitung von Licht mit *Lichtstrahlen*.

Die Abbildung durch dünne Linsen (grün) wird durch deren Symmetrieebene, die optische Achse und die symmetrisch zur Linse liegenden Brennpunkte F_1, F_2 so modelliert:

Strahlen durch den Mittelpunkt der Linse (“Hauptstrahlen”, blau) gehen ungebrochen durch die Linse. Strahlen senkrecht zur Hauptebene (rot) werden so gebrochen, dass sie durch den Brennpunkt gehen.



Durch diese einfachen Regeln ist das Abbildungsverhalten der Linse vollständig modelliert. Das (geometrische) Bild R (rechts) eines Gegenstandspunktes L (links) bekommt man als Schnitt des Hauptstrahls (blau) von L durch O mit dem Parallelstrahl-Brennstrahl (LHR, rot).

Außer dieser zeichnerischen Konstruktion brauchen wir die sogenannte Linsenformel, die die Abbildung $L \rightarrow R$ mit einfachen Bruchtermen beschreibt.

Diese *Linsenformel der Physik* folgt aus den ähnlichen Dreiecken HOL und QRO sowie HOF_1 und RQF_1 , wobei man aus der Physik nur die Bezeichnungen kennen muss:

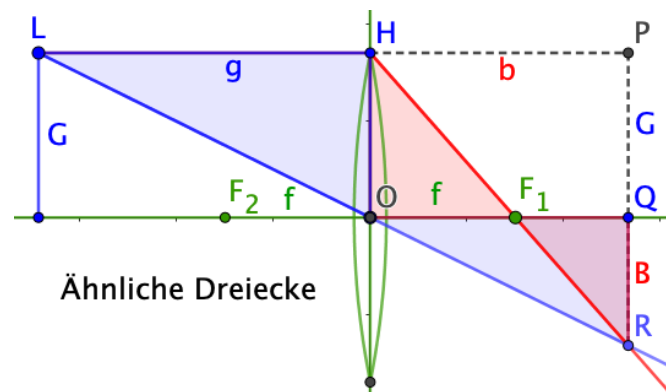
g = Gegenstandsweite = Abstand des Gegenstandspunktes L von der Hauptebene,
also $g = |HL|$,

G = Gegenstandsgröße = Abstand des Gegenstandspunktes von der optischen Achse,
also $G = |HO|$,

$f = |OF_1| = |OF_2|$ = Brennweite der Linse,

b = Bildweite = Abstand des Bildpunktes R von der Hauptebene,
also $b = |QO|$,

B = Bildgröße = Abstand des Bildpunktes von der optischen Achse,
also $B = |QR|$.



Damit findet man die **Linsenformel** als Eigenschaft ähnlicher Dreiecke:

Ähnlichkeit $HOL \sim QRO$ $B : G = b : g$

Ähnlichkeit $HOF_1 \sim RQF_1$ $(b - f) : f = B : G$

daher $(b - f) : f = b : g$ oder $\frac{b}{f} = 1 + \frac{b}{g}$

nach Division durch b die Linsenformel : $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$

und aufgelöst nach f, b, g $f = \frac{b \cdot g}{b + g}$, $b = \frac{f \cdot g}{g - f}$, $g = \frac{f \cdot b}{b - f}$.

Die Linsenformel zeigt $b, g > f$. Das bedeutet: Der Gegenstandspunkt L muss größeren Abstand als die Brennweite von der Hauptebene haben, damit der Bildpunkt R existiert. Und auch R ist weiter als f von der Linse entfernt.

Natürlich gehen vom Gegenstandspunkt nicht nur die beiden zur Konstruktion benutzten Strahlen aus. Das beschriebene Linsenmodell ist nur gut, wenn *alle* vom Gegenstandspunkt L ausgehenden (und die Linse treffenden) Strahlen so gebrochen werden, dass sie auch durch den Bildpunkt R gehen, dort also auch im Experiment ein sichtbares Bild liefern. Die modellierte Linsenabbildung $L \rightarrow R$ ist als Abbildung von Punkten definiert. Es ist ihr nicht unmittelbar anzusehen, dass sie das gewünschte Verhalten hat. Dies nachzurechnen verschiebe ich auf einen anderen Text.

5. Rationale Punkte auf dem Einheitskreis

Da die dezimalen Taschenrechner mit Brüchen nicht korrekt umgehen, ist es interessant, auszurechnen, dass die rationalen Punkte auf dem Kreis so dicht liegen wie auf der x -Achse. – Wähle auf der Tangente im Punkte $T = (0, 1)$ an den Einheitskreis den *rationalen* Punkt $R = (2r, 1)$. (Die Verwendung von $2r$ statt r führt zu üblichen Formeln.) Verbinde R mit $Z = (0, -1)$ und schneide die Strecke ZR mit dem Kreis in $P = (x, y)$. Berechne x, y (ohne quadratische Gleichung, warum siehe *) unten) so:

Kreisgleichung:

$$(1 + y)(1 - y) = x^2$$

Strahlensatz:

$$2r : 2 = x : (1 + y)$$

$$x = r \cdot (1 + y)$$

In Kreisgleichung einsetzen

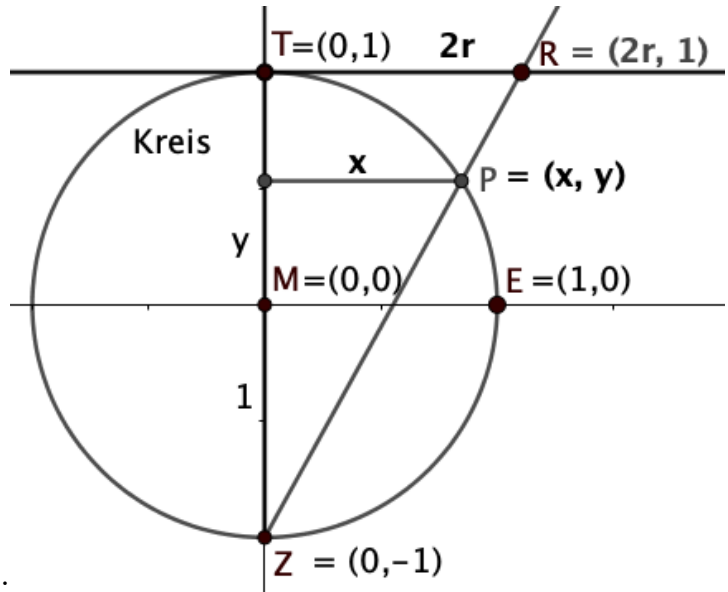
und durch $(1 + y) \neq 0$ kürzen:

$$1 - y = r \cdot x$$

$$1 + y = \frac{x}{r} \quad (= 0 \text{ in } Z)$$

Addiere, multipliziere mit $\frac{r}{1+r^2}$:

$$x = \frac{2r}{1+r^2}, \quad y = 1 - r \cdot x = \frac{1-r^2}{1+r^2}.$$



Für jedes rationale r sind damit auch x, y rational. Mit

$$x = \frac{j}{n}, \quad y = \frac{k}{n}, \quad j, k, n \in \mathbb{N}$$

hat man das Pythagoreische Tripel

$$j^2 + k^2 = n^2, \quad \text{Beispiel: } r = \frac{2}{3} \Rightarrow (j, k, n) = (12, 5, 13).$$

Umgekehrt liefert jedes Pythagoreische Tripel $j, k, n \in \mathbb{N}$ natürlich einen rationalen Punkt $P = (x, y) = (\frac{j}{n}, \frac{k}{n})$ auf dem Einheitskreis. Die Strahlensatzformel oben zeigt, dass dann auch $2r = 2x : (1 + y)$ rational ist. Man erhält also alle Pythagoreischen Tripel auf diese Weise. (Mehr zu Pythagoreischen Tripeln: Text T4.)

Siehe auch Text A6, S.2: Addition von Kreispunkten mit den Additionstheoremen.

*) Man kann sich fragen, warum der Punkt P bestimmt werden konnte, ohne eine quadratische Gleichung zu lösen. Der Wurzelsatz von Viète beantwortet diese Frage. Jede Gerade durch zwei rationale Punkte Z, R kann durch eine Gleichung $ax + by + c = 0$ mit rationalen Koeffizienten a, b, c beschrieben werden. In unserem Fall kommen keine horizontalen Geraden vor. Daher ist $a \neq 0$ und wir können $x = -\frac{by+c}{a}$, y in die Kreisgleichung einsetzen. Das ergibt eine quadratische Gleichung $y^2 + py + q = 0$ mit *rationalen* p, q . Da Z auf dem Kreis liegt, ist eine Lösung $y_1 = -1$ bekannt. Nach Viète ($y_1 \cdot y_2 = q$, $y_1 + y_2 = -p$) ist die andere Lösung $y_2 = -q = -p + 1 \in \mathbb{Q}$.

Wie bei den quadratischen Termen möchte ich mit einem Ausblick auf die Behandlung von Funktionen enden – unter Benutzung binomischer Formeln und einfacher Bruchterme.

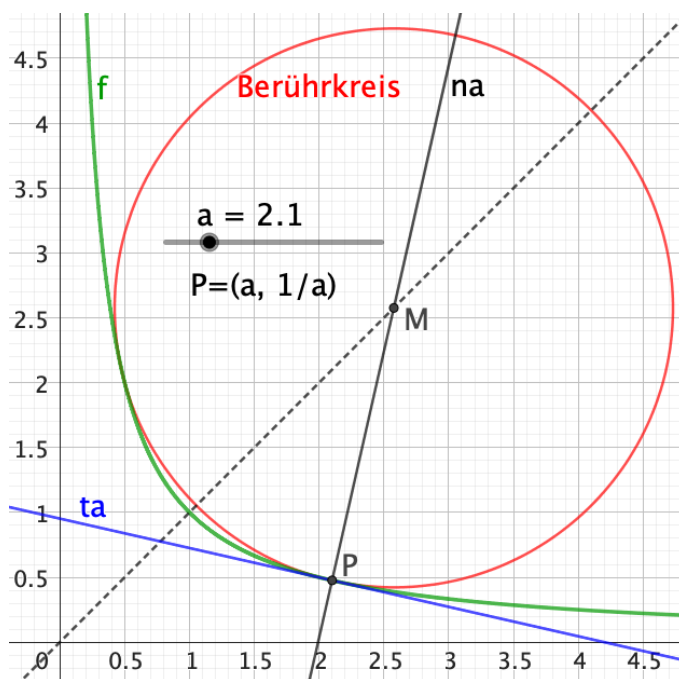
Tangenten an den Graph von $f(x) = 1/x$ durch Vergleich mit Kreisen

Wir wollen zeigen, dass der Graph von $f(x) = 1/x$ an jeder Stelle

$$P = (a, 1/a)$$

zwischen dem roten Kreis und der blauen *Kreistangente* ta verläuft. Der Kreis berührt daher den Graphen besser als seine eigene Tangente! Das berechtigt uns, diese Gerade auch

Tangente des Graphen zu nennen.



Zuerst suchen wir eine Gerade durch den Punkt P , die unterhalb des Graphen verläuft. Das Bild legt nahe, dass die rechtsseitigen Sehnen flacher, die linksseitigen steiler sind als die gesuchte Gerade. Wir berechnen also zunächst diese Steigungen.

$$\text{rechtsseitig} \quad x > a > 0 \Rightarrow \frac{1/x - 1/a}{x - a} \cdot \frac{ax}{ax} = \frac{-1}{ax} > \frac{-1}{a^2}$$

$$\text{linksseitig} \quad 0 < x < a \Rightarrow \frac{1/a - 1/x}{a - x} \cdot \frac{ax}{ax} = \frac{-1}{ax} < \frac{-1}{a^2}$$

$$\text{Testgerade:} \quad ta(x) = \frac{-1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} \stackrel{\text{Beh.}}{\leq} \frac{1}{x}$$

$$\text{Differenz:} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{-1}{a^2}(x - a) = \frac{1}{xa^2} \cdot (a^2 - ax + x(x - a)) = \frac{(x - a)^2}{xa^2} \geq 0.$$

Wir wählen den Kreismittelpunkt M als Schnittpunkt zwischen der Normale in P und der Symmetrieachse $x = y$. Wir entnehmen der Elementargeometrie:

Das Produkt der Steigungen zu einander senkrechter Geraden ist -1 .

$$\text{Normale:} \quad na(x) = a^2 \cdot (x - a) + \frac{1}{a},$$

$$x_M = na(x_M) \Rightarrow x_M \cdot (1 - a^2) = \frac{1}{a} - a^3 = \frac{(1 - a^2)(1 + a^2)}{a}$$

$$\text{Mittelpunkt M:} \quad x_M = \frac{1}{a} + a = y_M. \quad \text{Radius}^2 = (x_M - a)^2 + (y_M - \frac{1}{a})^2 = \frac{1}{a^2} + a^2.$$

Ein Punkt liegt *außerhalb* eines Kreises, wenn sein Abstand zum Mittelpunkt größer als der Radius ist. Dann rechnet man am besten $Abstand^2 - Radius^2 \geq 0$. Das muss also für die Punkte $(x, y = 1/x)$ des Graphen nachgerechnet werden, vorwärts und rückwärts mit binomischen Formeln, in die einfache Bruchterme eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 (x - x_M)^2 + (1/x - y_M)^2 - \frac{1}{a^2} - a^2 &= \\
 x^2 - 2x(a + \frac{1}{a}) + (a + \frac{1}{a})^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}(a + \frac{1}{a}) + (a + \frac{1}{a})^2 - \frac{1}{a^2} - a^2 &= \\
 (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x})(a + \frac{1}{a}) + (a + \frac{1}{a})^2 &= \\
 \left((x + \frac{1}{x}) - (a + \frac{1}{a}) \right)^2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Damit kein Missverständnis entsteht:

Wir haben keine Grenzwertüberlegungen angestellt. Wir haben nur mit Hilfe der binomischen Formeln festgestellt, dass der Graph von $f(x) = 1/x$ sich an jeder Stelle $(a, 1/a)$ zwischen einem Kreis und dessen Tangente hindurchzwängt. Da wir vor dieser Rechnung (und der entsprechenden für die Parabel) Tangenten nur von Kreisen kennen, wird durch diese Vergleichsrechnung eine Ausdehnung des Begriffs "Tangente" ermöglicht, schon ehe Begriffe der Analysis eingeführt werden. Das sollte nicht zu sehr verwundern, weil die Tangenten dieser Kurven schon in der griechischen Antike, also lange vor der Erfindung der Differentialrechnung, bekannt waren.