# Differentialgeometrie I, WS00/01

**H. Karcher, Bonn**



Die Übungsaufgaben sind wesentlicher Teil dieser Vorlesung.

## 0. Kommentiertes Inhaltsverzeichnis

# 1. Bogenlänge, Konvexität, Beispiele

Definition der Bogenlänge in metrischen Räumen $M$ für (stetige) Kurven $c : [a,b] \to M$ mit Hilfe von Einteilungen $\mathfrak{T}$ , $a = t_0 < t_1, \ldots, < t_n = b$ durch

$$\text{Länge}\,(c) := \sup_{\mathfrak{T}} \sum_{j=1}^{n} d(c(t_j), c(t_{j-1})) \text{ falls } < \infty.$$

Satz: Die Bogenlängenfunktion $l : [a,b] \to [0, \text{Länge}\,]$, $l(t) := \text{Länge}\,(c|_{[a,t]})$ ist stetig.
Beweis. Wähle zunächst eine Einteilung von $[a,b]$, so daß die Approximationssumme bis auf $\epsilon$ an das Supremum heran reicht. Füge $t$ in die Unterteilung ein und verfeinere die Teilintervalle vor und nach $t$ so, daß alle Punkte dieser beiden Teilintervalle von $c(t)$ einen Abstand $< \epsilon$ haben. Dann ist die Bogenlängenfunktion in diesen Teilintervallen höchstens um $2\epsilon$ von $l(t)$ verschieden.

Satz: Jede (stetige) rektifizierbare Kurve kann nach der Bogenlänge parametrisiert werden.
Bilde $s \in [0, l(b)]$ auf irgendeinen Punkt $c(t)$ mit $l(t) = s$ ab.

Satz: Für stetig differenzierbare Kurven in normierten Vektorräumen, also für $c : [a,b] \to V, |.|$, gilt:

$$l'(t) = |c'(t)|, \text{ also Länge}\,(c|_{[a,t]}) = \int_a^t |c'(\tau)|\, d\tau.$$

Beweis. Wegen $|c(t_2) - c(t_1)| = |\int_{t_1}^{t_2} c'(\tau)\, d\tau| \le \int_{t_1}^{t_2} |c'(\tau)|\, d\tau$ ist das Integral $\int_a^b |c'(\tau)|\, d\tau$ obere Schranke für alle Approximationssummen.
Wegen $|c(t) - c(t_1)|/|t - t_1| \le |l(t) - l(t_1)|/|t - t_1| \le \int_{t_1}^{t} |c'(\tau)|\, d\tau/(t - t_1)$ ist $t \mapsto l(t)$ bei $t_1$ (stetig) differenzierbar mit Ableitung $l'(t_1) = |c'(t_1)|$.

Falls in $M$ je zwei Punkte $p, q$ **rektifizierbar verbindbar** sind, so definieren wir eine neue Metrik auf $M$, die **innere Metrik**, durch

$$d_{inner}(p,q) := \inf\{\text{Länge}\,(c);\ c \text{ ist rektifizierbar mit } c(0) = p, c(1) = q\}.$$

Satz: Für jede rektifizierbare Kurve $c$ gilt $\text{Länge}\,(c) = \text{Länge}_{\,inner}(c)$.
Denn jede Approximationssumme für $\text{Länge}_{\,inner}(c)$ hat $\text{Länge}\,(c)$ als obere Schranke.

Damit **Konvergenz** bezüglich beider Metriken dasselbe ist, verlangen wir sogar **Verbindbarkeit durch kurze Kurven**:
Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung $U$ so daß jedes $q \in U$ durch eine Kurve $c$ mit $p$ in $U$ verbindbar ist, für die gilt: $\text{Länge}\,(c) \le \text{Const}_U \cdot d(p,q)$.

Satz: Halbstetigkeit der Bogenlänge. Sei $\{c_m\}$ eine Folge rektifizierbarer Kurven in $M$ mit gleichmäßig beschränkter Länge und gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzkurve $c_\infty$, so ist $c_\infty$ rektifizierbar und es gilt sogar:

$$\text{Länge}\,(c_\infty) \le \liminf \text{Länge}\,(c_m).$$

Beweis. Man kann annehmen, die Kurven seien alle mit $[0,1]$ parametrisiert. Zu jeder Unterteilung $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_K = 1$ und jedem $\epsilon > 0$ wähle $n^*$ so, daß $n \ge n^* \Rightarrow 2K \cdot d(c_\infty(t_k), c_n(t_k)) < \epsilon$. Dann ist die zugehörige Approximationssumme für Länge $(c_\infty)$ wegen der Dreiecksungleichung höchtens Länge $(c_n) + \epsilon$.
( $d(c_\infty(t_k), c_\infty(t_{k-1})) \le d(c_\infty(t_k), c_n(t_k)) + d(c_n(t_k), c_n(t_{k-1})) + d(c_n(t_{k-1}), c_\infty(t_{k-1}))$.)

Als letzte Voraussetzung über $M$ verlangen wir, daß abgeschlossene Kugeln **kompakt** sind. Dann gibt es kürzeste Verbindungen in $M$:

Satz: HOPF-RINOW I oder EXISTENZ VON ARZELA-ASCOLI KÜRZESTEN.
Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es eine Verbindungskurve $c$ mit Länge $(c) = d_{inner}(p,q)$.

Beweis. Betrachte eine Minimalfolge von Kurven $c_n$ deren Längen gegen $d_{inner}(p,q)$ konvergieren. Wir können sie proportional zur Bogenlänge mit $[0,1]$ parametrisieren, sie sind dann gleichmäßig Lipschitz stetig. Mit der Kompaktheit der Kugeln wird eine Teilfolge konstruiert, deren Werte an allen Stellen $t = Z * 2^{-k}, Z \in \mathbb{N}, 0 \le Z \le 2^k$ konvergieren. Daraus folgt (mit der gleichmäßigen Lipschitzschranke), daß diese Teilfolge gleichmäßig gegen eine Grenzkurve $c_\infty$ konvergiert. Nach Wahl von $c_n$ als Minimalfolge, wegen der Halbstetigkeit und wegen der Definition der inneren Metrik gilt schließlich:

$$\text{Länge}\,(c_\infty) \le \liminf \text{Länge}\,(c_n) = d_{inner}(p,q) \le \text{Länge}\,(c_\infty).$$

Vermischt mit diesen Sätzen haben wir Beispiele betrachtet und dabei über **konvexe Mengen** in normierten Vektorräumen (manchmal mit euklidischer Norm) bewiesen:

Satz: Die Einheitskugeln von Normen, $K := \{v \in V;\ |v| \le 1\}$, sind konvex. Umgekehrt definiert jede konvexe, kompakte, symmetrische ($v \in K \Rightarrow -v \in K$) und eine Nullumgebung enthaltende Menge $K$ eine Norm: $|v| := 1/\sup\{\lambda;\ \lambda \cdot v \in K\}$.

Satz: Die Ränder ebener beschränkter konvexer Gebiete sind rektifizierbar.
Beweis. Liegt eine konvexes Polygon $P$ im Innern eines konvexen Polygons $Q$, so kann man durch Verlängern jeweils einer Seite von $P$ ein Stück von $Q$ abschneiden. Wegen der Dreiecksungleichung wächst die Länge der äußeren Polygone nicht. Nach endlich vielen Schritten hat man längenverkleinernd das äußere Polygon auf $P$ reduziert. Daher haben die Längen der Sehnenpolygone $P$ eines ebenen beschränkten konvexen Gebietes, das also in einem Parallelogramm $Q$ enthalten ist, den Umfang von $Q$ als obere Schranke. – Daraus folgt auch:

Satz: Liegt eine geschlossene konvexe Kurve im Innengebiet einer anderen, so hat die äußere die größere Länge.

Folgerung: Auf dem Rand kompakter konvexer Mengen läßt sich die innere Metrik einführen, weil jeder ebene Schnitt durch zwei Randpunkte eine rektifizierbare Verbindungskurve liefert.

Satz: Ist $K$ kompakt und konvex und ist $p \notin K$, so gibt es einen eindeutig bestimmten **nächsten Punkt** $\pi(p) \in K$, und die Hyperebene $H$ senkrecht auf der Verbindung $p\pi(p)$ und durch $\pi(p)$ läßt $K$ auf der von $p$ abgewandten Seite. Sie heißt daher **Stützhyperebene** und wird mit dem Einheitsvektor $n = n(p) := (p - \pi(p))/|p - \pi(p)|$ beschrieben als

$$H = \{x \in V;\ \langle x, n\rangle = \langle \pi(p), n\rangle\}.$$

In jedem Randpunkt $r \in \partial K$ gibt es eine solche Stützhyperebene.
Beweis. Die Kugel um $p$ durch $\pi(p)$ enthält keine Punkte von $K$ im Innern. Läge nun irgend ein Punkt $q \in K$ auf der $p$ zugewandten Seite der Hyperebene, so wäre die Strecke $\overline{\pi(p)q}$ in $K$ und würde das Innere der Kugel treffen. – Zu jedem Randpunkt $r$ gibt es eine Folge $p_n \notin K$ mit $\lim p_n = r$; die Stützhyperebenen in $\pi(p_n)$ (evtl. eine Teilfolge) konvergieren gegen eine Stützhyperebene in $r$ (benutze die in der Beschreibung von $H$ verwendeten Stützfunktionen $x \mapsto \langle x, n(p)\rangle$).

Der Begriff "konvex" läßt also Analysis und Geometrie eng zusammen arbeiten. Noch ein Beispiel dazu:

Satz: Für die Hessesche von $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gelte $T^2 f \geq 0$. Dann sind die *Subniveaus* von $f$, also die Mengen $N_w := \{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) \leq w\}$, konvex.

Weitere Beispiele metrischer Räume, in denen die bisher gewünschten Voraussetzungen erfüllt sind.
1) Betrachte die Graphen stetig differenzierbarer $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$ in $\mathbb{R}^{n=c+d}$, also $G_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n\}$. Sei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar mit $c(0) = p, c(1) = q$. Die Ableitung von $f$ ist auf dem kompakten Bild von $c$ beschränkt, $|Tf| \leq L$. Daher gilt:

$$|p - q|_{\mathbb{R}^d} \leq \text{Länge}\,(f \circ c) \leq \sqrt{1 + L^2} \cdot \text{Länge}\,(c).$$

Damit sind $(p, f(p)),\ (q, f(q)) \in G_f$ so kurz rektifizierbar verbindbar, daß die euklidische Unterraummetrik auf $G_f \subset \mathbb{R}^n$ und die innere Metrik auf $G_f$ lokal äquivalent sind. Offenbar sind abgeschlossene Kugeln kompakt.

2.) Auf $O(n)$ haben wir eine Metrik definiert durch:

$$d(A, B) := \max\{|A \cdot x - B \cdot x|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\} = d(\mathrm{id}, A^{-1}B).$$

Mit Hilfe der Normalformen orthogonaler Abbildungen haben wir "kurze" Verbindungen zwischen $A, B \in SO(n)$ gefunden. (Die Besprechung ist nicht ganz fertig.)

3.) Wir haben verschiedene Mengen geometrischer Objekte, insbesondere die Menge der Geraden durch 0 in $\mathbb{R}^n$, zu metrischen Räumen gemacht.

4.) Wir haben begonnen, auf den Bildern von Abbildungen $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n,\ \mathrm{rang}(TF) = d$, eine innere ("Riemannsche") Metrik zu definieren.

**3.+ 4. Woche** 3.11. - 10.11.2000

Beispiele von Arzela-Ascoli Kürzesten:

1.) In der Banachebene $\mathbb{R}^2,\ |(x,y)| := \max(|x|,|y|)$ gibt es überabzählbar viele Kürzeste zwischen zwei Punkten; wegen der geraden Stücke auf dem Rand der Einheitskugel ist die Dreiecksungleichung unerwartet häufig **nicht** strikt. Viele Kürzeste sind nicht differenzierbar (aber natürlich Lipschitz stetig).

2.) Auf dem Zylinder $Zyl := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ h(x,y,z) := x^2 + y^2 = R^2\}$ finden wir alle Kürzesten, weil die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to Zyl,\ (x,y) \mapsto (R\cos(x/R),\ R\sin(x/R),\ y)$ **längentreu** ist. Kürzeste in $Zyl$ sind Bilder unter $F$ von Kürzesten in $\mathbb{R}^2$, also Schraubenlinien (und Spezialfälle).

3.) Auf der Zweisphäre $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ h(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ finden wir, daß die Großkreise ( = ebene Schnitte durch $0 \in \mathbb{R}^3$) einzige Kürzeste sind. Wegen der großen Isometriegruppe genügt es, Verbindungen vom Nordpol zu anderen Punkten zu betrachten. Wir beschreiben $\mathbb{S}^2$ mit sphärischen Polarkoordinaten:

$(\theta,\varphi) \mapsto F(\theta,\varphi) := (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, also Kurven als $c(t) := F(\theta(t),\varphi(t))$.

Dann gilt für die Länge stetig differenzierbarer $c$:

$\text{Länge}(c) = \int |\dot c(t)| dt = \int |\dot\theta^2(t) + \sin^2(\theta)\dot\varphi^2(t)| \geq \int |\dot\theta(t)| \geq \dot\theta(t) = \theta(1).$

Gleichheit gilt für monoton parametrisierte Großkreisbögen, höchstens der Länge $\pi$.

## 2. Krümmung von Kurven, verallgemeinerbare Definitionen

Wir geben drei konzeptionell verschiedene Definitionen; die letzte sieht am kompliziertesten aus, aber sie verwendet nur die Bogenlänge und "senkrecht stehen"; daher läßt sie sich am leichtesten verallgemeinern – zunächst auf sphärische Kurven.

1.) Wir schreiben einen Kreis hin, der an der Stelle $s_0$ bis zur zweiten Ableitung mit der Kurve $c$ übereinstimmt:

$$\begin{aligned} k(s) :=& c(s_0) + c''/|c''|^2(s_0) + \\ & \frac{1}{|c''(s_0)|}\left(c'(s_0)\sin(|c''(s_0)|(s-s_0)) - \frac{c''}{|c''|}(s_0)\cos(|c''(s_0)|(s-s_0))\right) \end{aligned}$$

Dieser Kreis approximiert am besten (nämlich mit einem $o((s-s_0)^2)$-Fehler), er heißt **Krümmungskreis** und sein Radius ist der Krümmungsradius, $= 1/|c''(s_0)|$.

2.) Anschaulich betrachtet rotieren die Normalen längs "stärker" gekrümmter Kurven "schneller". Wir wollen also die Krümmung mit der Rotationsgeschwindigkeit der Normalen messen. – Außerdem wollen wir den Kreis $\varphi \mapsto \exp(i\cdot\varphi)$ als positiv umlaufen und

positiv gekrümmt verabreden, den Kreis $\varphi \mapsto \exp(-i \cdot \varphi)$ dagegen als negativ umlaufen und negativ gekrümmt ansehen, wie in der Funktionentheorie. Daher verabreden wir die 90°-Drehung im Gegenuhrzeigersinn als die **positive** und bezeichnen sie mit $\mathrm{Rot}(90°)$. Dem entsprechend unterscheiden wir *innere* und *äußere* Normalen einer Kurve $c$, bei $\dot{c}(t) \neq 0$ ist $\mathrm{Rot}(90°)\dot{c}(t)$ innere und $-\mathrm{Rot}(90°)\dot{c}(t)$ äußere Normale. – Schließlich verabreden wir für diese erste Krümmungsdiskussion, daß die Kurve $c$ nach der Bogenlänge parametrisiert sein soll; *diese Konvention wird meist signalisiert, indem der Parameter mit $s$ und die Ableitung mit $c'(s)$ bezeichnet wird, also immer* $|c'(s)| = 1$.
Äußere Normale: $n(s) := -\mathrm{Rot}(90°)c'(s)$, also

$$n'(s) := -\mathrm{Rot}(90°)c''(s) \perp n(s).$$

Die Geschwindigkeit der Normalenrotation ist also $= |c''(s)|$, oder besser mit Berücksichtigung des Vorzeichens $= \langle n'(s), c' \rangle = \langle c'', \mathrm{Rot}(90°)c'(s) \rangle = det(c'(s), c''(s))$.

3.) Anschaulich betrachtet sollten die "Parallelkurven" einer "stärker" gekrümmten Kurve schneller wachsende Länge haben als die einer "schwächer" gekrümmten, man betrachte z.B. konzentrische Kreise. Wir verfolgen diese Idee rechnerisch:
Äußere Parallelkurven (Definition): $c_\epsilon(s) := c(s) + \epsilon \cdot n(s),\ n(s) := -\mathrm{Rot}(90°)c'(s)$.
Länge $(c_\epsilon|_{[a,s]}) = \int_a^s |c'_\epsilon(\sigma)| d\sigma = \int_a^s \sqrt{\langle c' + \epsilon n', c' + \epsilon n' \rangle}(\sigma) d\sigma$.
Wir messen "Änderungsgeschwindigkeit der Länge" durch die Ableitung nach $\epsilon$:
$\frac{\partial}{\partial \epsilon}$Länge $(c_\epsilon|_{[a,s]})\big|_{\epsilon=0} = \int_a^s \langle c', n' \rangle(\sigma) d\sigma$.
Und wir interessieren uns jetzt für die Längenänderung "kleiner" Stücke der Kurve $c$, daher differenzieren wir auch noch nach $s$:

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \epsilon}\text{Länge}\,(c_\epsilon|_{[a,s]})\big|_{\epsilon=0} = \langle c', n' \rangle(s).$$

*Zusammenfassung.* Aus allen drei anschaulichen Vorstellungen ergibt die Rechnung, daß "Krümmung" durch **dieselbe Formel** präzisiert wird.

Wir definieren daher die **Krümmungsfunktion** $\kappa(s)$ einer Kurve $c$ mit äußerer Normale $n$ durch

$$\kappa(s) := \langle c', n' \rangle(s) = \langle \mathrm{Rot}(90°)c', c'' \rangle(s), \quad |\kappa| = |c''|.$$

**Umparametrisieren**: Ist die Kurve $t \mapsto c(t)$ nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist die Ableitung der Längenfunktion $d/dt\ l(t) = |\dot{c}(t)|$. Daher ist $c' = \dot{c}/|\dot{c}|$, $n(t) = -\mathrm{Rot}(90°)\dot{c}/|\dot{c}|(t)$ und $d/ds = d/dt \cdot 1/|\dot{c}|$. Daher haben wir auch für *beliebige* Parametrisierungen "dieselbe" Formel für die Ableitung der äußeren Normalen:

$$\dot{n}(t) = \kappa(t) \cdot \dot{c}(t). \quad \text{Auch: } \kappa(t) = \det(\dot{c}, \ddot{c}) \cdot |\dot{c}|^{-3}(t).$$

Ich habe diskutiert, warum die ersten beiden Ansätze sich weniger gut zum Verallgemeinern eignen. Für **sphärische Kurven** $c : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ können wir die Rechnung mit den Parallelkurven direkt nachmachen: Wir parametrisieren $c$ nach der Bogenlänge $s$ und beschreiben die an $\mathbb{S}^2$ tangentiale *äußere Normale* von $c$ als $n = c' \times c$. Ferner erreichen wir die Parallelkurve im Abstand $\epsilon$, indem wir die Kürzeste (Großkreis) in Richtung $n(s)$ das Stück $\epsilon$ verfolgen, also:

$$c_\epsilon(s) = \cos\epsilon \cdot c(s) + \sin\epsilon \cdot n(s).$$

Dann wird wieder

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \epsilon}\text{Länge}\,(c_\epsilon|_{[a,s]})\big|_{\epsilon=0} = \langle c', n'\rangle(s),$$

aber die Interpretation ist etwas anders als vorher, weil $n'$ und $c'$ (bei etwas komplizierteren Beispielen als diesem) nicht mehr proportional sind. Wir müssen zunächst Beispiele ansehen.

Kreise auf $\mathbb{S}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert, mit Tangential- und Normalfeld:

$$\begin{aligned} k(s) &:= \big(\sin r \cdot \cos(s/\sin r),\ \sin r \cdot \sin(s/\sin r),\ \cos r\big), \\ k'(s) &= \big(-\sin(s/\sin r),\ \cos(s/\sin r),\ 0\big), \\ n(s) &= \big(\cos r \cdot \cos(s/\sin r),\ \cos r \cdot \sin(s/\sin r),\ \sin r\big). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Krümmung: $\kappa(s) = \text{ctg } r$. Also für kleine $r$ ungefähr wie im Euklidischen $\sim 1/r$, aber $\text{ctg}(\pi/2) = 0$. Der Kreis vom Radius $\pi/2$ ist ein Großkreis, also (stückweise) **Kürzeste**, wir erhalten also: *Wie in $\mathbb{R}^2$ sind auch in $\mathbb{S}^2$ Kürzeste ungekrümmt.* Dies betrachte ich als erstes Indiz einer erfolgreichen Verallgemeinerung.
Außerdem: Die Krümmung ctg $r$ eines Breitenkreises in der Metrik der Kugel ist gleich der euklidischen Krümmung dieses Kreises, betrachtet als Kurve im Tangentialkegel der Kugel.

*Wieviel weiß man über eine Kurve, wenn man ihre Krümmungsfunktion kennt?*
Satz: Zu jeder stetigen Krümmungsfunktion $\kappa(s)$ gibt es in den metrischen Räumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^2$ eine bis auf die Anfangsdaten eindeutig bestimmte Kurve mit der gegenen Krümmungsfunktion.

Beweis in $\mathbb{R}^2$. Betrachte unsere die Krümmung definierenden Gleichungen $n'(s) = \kappa(s)\cdot c'(s)$ bzw. $c''(s) = -\kappa(s) \cdot n(s)$, und interpretiere sie bei gegebenem $\kappa$ als Differentialgleichung für $(n,\ c')$. Dann gibt es zu gegebenen Anfangsdaten **genau eine** Lösung $s \mapsto (n(s),\ c'(s))$ und zu der zweiten Komponente genau eine Stammfunktion $\tilde{c}(s) := c(0) + \int_0^s c'(\sigma)d\sigma$. Nun muß man noch zeigen, daß die so hingeschriebene Kurve $\tilde{c}$ tatsächlich das gegebene $\kappa$ als

Krümmungsfunktion hat. Dazu genügt es, zu zeigen, daß die durch die Differentialgleichung bestimmte Lösung $s \mapsto (n(s),\ c'(s))$ für jedes $s$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^2$ liefert.

**Hilfssatz** (Charakterisierung von ON-Basifeldern durch Differentialgleichungen).
a) Sei in $\mathbb{R}^d$ eine Schar von ON-Basen $s \mapsto e_j(s),\ j = 1 \dots d$, gegeben. Dann lassen sich die Ableitungen durch die Basis ausdrücken:

$$e_j'(s) = \sum_{n=1}^{d} a_{jn}(s) \cdot e_n(s),\ \textbf{notwendig gilt:}\ a_{jn} = -a_{nj}.$$

b) Liest man die vorherige Zeile bei gegebenen $a_{jn}(s) = -a_{nj}(s)$ als Differentialgleichung, so besteht jede Lösung zu **orthonormalen Anfangsdaten** für alle $s$ aus orthonormalen Vektoren $\{e_j(s); j = 1 \dots d\}$.
Beweis zu a). Die Koeffizienten der Linearkombination von $e_j'(s)$ sind $\langle e_j'(s), e_n(s)\rangle$; aber durch Differenzieren der konstanten Funktionen $h_{jn}(s) := \langle e_j(s), e_n(s)\rangle$ findet man

$$a_{jn}(s) + a_{nj}(s) = \langle e_j'(s), e_n(s)\rangle + \langle e_j(s), e_n'(s)\rangle = h_{jn}'(s) = 0.$$

Beweis zu b). Zu einer Lösung $\{e_j(s)\}$ der Differentialgleichung definiere die Funktionen $h_{jn}(s) := \langle e_j(s), e_n(s)\rangle$, mit $h_{jj}(0) = 1,\ h_{j\neq n}(0) = 0$ wegen der Voraussetzung orthonormaler Anfangsdaten. Differentiation dieser Funktionen und Einsetzen der Differentialgleichung für die $e_j(.)$ ergibt:

$$\begin{aligned} h_{jn}'(s) &= \sum_k a_{jk}(s)\langle e_k(s), e_n(s)\rangle + \sum_k a_{nk}(s)\langle e_j(s), e_k(s)\rangle \\ &= \sum_k a_{jk}(s)h_{kn}(s) + \sum_k a_{nk}(s)h_{jk}(s). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen werden durch die **konstanten Funktionen** gelöst, die die richtigen Anfangsdaten (0 oder 1) haben. Der Eindeutigkeitssatz beweist Hilfssatz Teil b) und damit den Satz über Kurven in $\mathbb{R}^2$.

Beweis in $\mathbb{S}^2$. Zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten sphärischen Kurve $s \mapsto c(s) \in \mathbb{S}^2$ ist $s \mapsto \{c(s), c'(s), n(s) := c'(s) \times c(s)\}$ eine Schar von ON-Basen in $\mathbb{R}^3$. Für die Ableitung dieser Basen gilt Hilfssatz Teil a); zusammen mit der Definition der Krümmung $\kappa(s) = \langle n'(s), c'(s)\rangle$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} c(s) \\ c'(s) \\ n(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c(s) \\ c'(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

Dies ist bei gegebenem $\kappa(s)$ wieder eine Differentialgleichung mit schiefsymmetrischer Koeffizientenmatrix. Zu gegebenen orthonormalen Anfangsdaten besteht die (eindeutige) Lösung aus ON-Basen, der erste Basisvektor ist dann eine sphärische Kurve mit dem zweiten als Tangentialfeld und dem dritten als äußerem Normalenfeld, also mit dem gegebenen $\kappa(s)$ als Krümmungsfunktion. 8.11.2000

Kurven in $\mathbb{R}^3$. Man kann die Rechnung zur Länge von Parallelkurven wiederholen, das führt dazu, daß eine *unter Isometrien invariante* Definition der Kurvenkrümmung die folgende ist:

$$\kappa(s) := |c''(s)|.$$

Beachte: Krümmung muß ohne Vorzeichen definiert werden, weil man mit einer 180°-Drehung einen (anscheinend) positiv umlaufenen Kreis in einen negativ umlaufenen umwenden kann. – In Aufgabe 10 wird angeleitet, nicht ebene geschlossene Raumkurven konstanter Krümmung zu konstruieren.

Um die 2-dimensionale Kurventheorie nachzumachen, suchen wir eine mit Isometrien verträgliche Schar von ON-Basen längs der gegebenen Kurve $c$. Unter der *Voraussetzung:* $c'' \neq 0$ (oder: $\{c'(s), c''(s)\}$ sind linear unabhängig) haben wir die

**Frenet-Basis:** $\{\ c'(s),\ e_2(s) := c''/|c''|(s),\ e_3(s) := c' \times e_2(s)\ \}$.

Die schiefsymmetrische Matrix, die die Ableitung dieser Vektoren beschreibt, hat nach Definition der Krümmung als erste Zeile: $(0\ \kappa\ 0)$. Daher fehlt zum vollständigen Ausfüllen nur $\langle e_2', e_3\rangle(s) =: \tau(s)$. Das liefert die **Frenet Gleichungen:**

$$\begin{pmatrix} c'(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c'(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix}.$$

Mit denselben Argumenten wie vorher gilt ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz. – Ich behandele die höherdimensionale Version der Frenet-Theorie nicht, da die Voraussetzungen zu unerfreulich werden: In $\mathbb{R}^d$ muß eine Frenet-Kurve die ersten $d-1$ Ableitungen *linear unabhängig* haben, so daß z.B. in $\mathbb{R}^4$ die ebenen Kurven keine Frenet-Kurven mehr sind. Trotzdem gibt es Fragen, die die Frenet-Theorie beantwortet: Eine Kurve in $\mathbb{S}^2$ ist immer eine Frenet-Kurve in $\mathbb{R}^3$, nämlich: $\langle c, c'\rangle = 0 \Rightarrow 0 = \langle c, c'\rangle' = \langle c', c'\rangle + \langle c, c''\rangle$, also $c'' \neq 0$! Daher gehört die Frage: "Kann man an $\kappa(s), \tau(s)$ feststellen, ob die Kurve $c$ eine sphärische Kurve ist?" in den Bereich der Frenet-Theorie.

Wir definieren die Begriffe *Schmiegebene* und *Schmiegkugel* einer Frenet-Kurve. Eine Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3;\ \langle x - c(s_0), N\rangle\}$ heißt "Schmiegebene", falls die Funktion $h(s) := \langle c(s) - c(s_0), N\rangle$, die angibt, wie "schnell" die Kurve aus der Ebene herausläuft, mit möglichst vielen Ableitungen in $s_0$ verschwindet. Aus $h'(s_0) = 0,\ h''(s_0) = 0$ folgt $N = e_3(s_0)$.

Analog heißt eine Kugel $K := \{x \in \mathbb{R}^3;\ \langle x-m, x-m\rangle - R^2 = 0\}$ “Schmiegkugel”, wenn die das Abheben von der Kugel beschreibende Funktion $h(s) := \langle c(s)-m, c(s)-m\rangle - R^2$ bei $s = s_0$ mit möglichst vielen Ableitungen verschwindet:
$h(s_0) = 0 \Rightarrow R := |c(s_0) - m|$,
$h'(s_0) = 0 \Rightarrow \langle c'(s_0), c(s_0) - m\rangle = 0$,
$h''(s_0) = 0 \Rightarrow \langle c''(s_0), c(s_0) - m\rangle = -\langle c'(s_0), c'(s_0)\rangle$,
$h'''(s_0) = 0 \Rightarrow \langle c'''(s_0), c(s_0) - m\rangle = 0$.
Hieraus soll der Radiusvektor $m - c(s_0)$ als Linearkombination der Frenet-Basis berechnet werden; dazu fehlt nur, $c'''$ durch Differenzieren der Frenet-Gleichungen zu berechnen:

$$c''' = (\kappa \cdot e_2)' = \kappa' \cdot e_2 + \kappa \cdot e_2' = \kappa' \cdot e_2 + \kappa \cdot (-\kappa \cdot c' + \tau \cdot e_3):$$

$$m(s) = c(s) + 1/\kappa(s)^2 \cdot c''(s) - \kappa'/(\kappa^2 \cdot \tau)(s) \cdot e_3(s).$$

Nun läßt sich die geometrische Frage leicht beantworten: Für sphärische Kurven ist offensichtlich die Schmiegkugel von $s$ unabhängig. Umgekehrt folgt aus $m'(s) = 0$ auch die Konstanz des Radius (nachrechnen). Beim Differenzieren von $m(s)$ fallen alle Terme weg, außer denen proportional zu $e_3$:

$$m'(s) = (\tau/\kappa - \big(\kappa'/(\kappa^2 \cdot \tau)\big)')(s) \cdot e_3(s).$$

Diese (nicht übersichtliche) Bedingung an $\kappa, \tau$ charakterisiert die sphärischen Kurven.

**5. Woche** 15.11. - 17.11.2000

## 3. Weitere metrische Räume mit Arzela-Ascoli Kürzesten.

Kleinigkeiten: Abstand $d(x, A) := \inf\{d(x, a); a \in A\}$ zwischen Punkt $x$ und Teilmenge $A$.
Anwendung: Abstand von Bahnen von Isometriegruppen: $d(G{*}m_1, G{*}m_2) := d(m_1, G{*}m_2)$ (Unabhängigkeit vom Repräsentanten $m_1 \in G * m_1$ prüfen!)
$\epsilon$-Umgebung einer Menge $A$: $U_\epsilon(A) := \{x \in M; d(x, A) \le \epsilon\}$.
Hausdorff-Abstand zwischen kompakten Mengen $A, B$ (Dreiecksungleichung prüfen):

$$d(A, B) := \inf\{\epsilon;\ A \subset U_\epsilon(B) \text{ und } B \subset U_\epsilon(A)\}$$

Für zusätzlich konvexe $A, B$ sind Minkowskis Summen:
$A \cdot (1-t) + B \cdot t := \{x = a \cdot (1-t) + b \cdot t; a \in A, b \in B\}, 0 \le t \le 1$ wieder konvex, diese Kurve im metrischen Raum der kompakten konvexen Mengen ist rektifizierbar und sogar Kürzeste. – Wir wollen bei den folgenden einfacheren Beispielen daran denken, daß Definitionen möglichst auch in komplizierteren Situationen anwendbar sein sollen.

Prototyp-Argument: Je zwei Punkte einer offenen zusammenhängenden Menge in $\mathbb{R}^d$ sind durch eine stetige Kurve, und dann sogar durch einen Polygonzug, also rektifizierbar, verbindbar. Arzela-Ascoli Kürzeste brauchen aber nicht zu existieren (offene Kreisscheibe ohne Mittelpunkt).

Mein Plan war, auf Niveaumengen $N_w := \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) := w\}$ stetig differenzierbarer Funktionen $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ Kürzeste zu identifizieren und metrische Kurvenkrümmung zu definieren. Es war jedoch ein Einschub nötig über die Ableitung von Funktionen, einerseits als Linearformen betrachtet, andererseits als Gradientenvektor. Dieser ist dreiteilig:
1.) Abstrakte Zusammenfassung (nicht aufgeschrieben),
2.) Polarkoordinaten für die Euklidische Ebene,
3.) Riemannsche Metrik für den Graph einer Funktion.
*Bemerkung*: Ich schreibe Spaltenvektoren als $(a; b)$, Zeilenvektoren als $(a, b)$.
In ebenen Polarkoordinaten ist die Länge einer Kurve $c(t) = (r(t); \phi(t))$ berechenbar als: Länge $(c) = \int(\dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \cdot \dot{\phi}(t)^2)^{1/2}dt$. Mit anderen Worten, wir verwenden die von $r$ abhängigen Skalarprodukte:

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_r \\ w_\phi \end{pmatrix} \right\rangle_{Polar} := v_r \cdot w_r + r^2 \cdot v_\phi \cdot w_\phi.$$

Für die Ableitung einer Funktion $h : (r; \phi) \mapsto h(r, \phi)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}(h \circ c)^{\cdot}(t) = Th|_{c(t)} \cdot \dot{c}(t) &= \frac{\partial}{\partial r}h \cdot \dot{r}(t) + \frac{\partial}{\partial \phi}h \cdot \dot{\phi}(t) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}h \\ r^{-2}\frac{\partial}{\partial \phi}h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{Polar} = \left\langle \mathrm{grad}_{\,Polar} h, \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{Polar}\end{aligned}$$

d.h. der *Gradient in Polarkoordinaten* berechnet sich aus den partiellen Ableitungen und aus der Fußpunktkoordinate $r$ als:

$$\mathrm{grad}_{\,Polar} h = (\frac{\partial}{\partial r}h;\ r^{-2}\frac{\partial}{\partial \phi}h).$$

Das nächste Beispiel geht ebenso:
Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wir wollen Graph $f := \{(x, f(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ mit seiner inneren Metrik betrachten, und wir betrachten $x$ als Koordinate des Punktes $(x, f(x))$. Eine Kurve $t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^d$ ist dann die Koordinatenbeschreibung der Kurve $t \mapsto (c(t), f(c(t)) \in$ Graph $f$. Ihre Länge berechnet man mit den von $x$ abhängigen sogenannten **Riemannschen Skalarprodukten** für $v, w \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle v,\ w\rangle_{Graph} := \langle v, w\rangle + (Tf_x \cdot v) \cdot (Tf_x \cdot w), \quad \text{Länge}\,(c) = \int \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle_{Graph}^{1/2} dt.$$

Wie im Fall der Polarkoordinaten werden Funktionen auf Graph $f$ als Funktionen der Koordinaten beschrieben, $x \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$. Natürlich gilt wieder:

$$(h \circ c)^{\cdot}(t) = Th|_{c(t)} \cdot \dot{c}(t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^j}h \cdot \dot{c}_j(t) = \langle \mathrm{grad}_{\,Graph} h,\ \dot{c}(t)\rangle_{Graph}.$$

Daraus finden wir mit der transponierten Abbildung $Tf^t$

$$\text{grad}_{Graph} h(x) = (\text{id} + Tf^t|_x \cdot Tf|_x)^{-1} \cdot (\frac{\partial}{\partial x^1}h; \ldots; \frac{\partial}{\partial x^d}h).$$

*Es ist wichtig, daß Sie die lineare Abbildung $Th$ und den vom verwendeten Skalarprodukt abhängigen Gradienten von $h$, die ja beide die Ableitung von $h$ beschreiben, sicher unterscheiden können.* 17.11.00

**6. Woche,** 22.11.-24.11.2000

Das Urbild eines Wertes $w$ einer stetig differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ nennen wir Niveaumenge $N_w := \{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = w\}$ von $h$. Beispiele wie $h(x, y) := x^2(1 - x^2) - y^2$, $w = 0$ ($N_w$ ist eine Kurve wie eine liegende acht) oder $h(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2,\ w = 0$ ($N_w$ ist ein Rotationskegel mit vertikaler Achse) zeigen: Niveaumengen sehen nicht überall wie "Flächen" aus, an Stellen $x \in N_w$ mit $\text{grad}\, h|_x = 0$ kann die Niveaumenge Singularitäten haben. *Wir betrachten zunächst nur Niveaumengen, auf denen z.B.* $\text{grad}\, h|_x = 0$ **nicht** *vorkommt.* Genauer machen wir die aus dem linearen Fall bekannte Voraussetzung, für lineares $h$ ist $h$ genau dann surjektiv, wenn der Rang gleich der Dimension $c$ des Bildes ist:

Falls für jeden Punkt $x \in N_w$ gilt $\text{rang}(Th|x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c) = c$, so können wir erstens schreiben $\mathbb{R}^n = \ker Th|x \oplus \mathbb{R}^c$, $\ker Th|x = \mathbb{R}^d$ und die Ableitung $Th$ mit partiellen Ableitungen ausdrücken, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^c$, $Th|x \cdot v = (T_1h|x \cdot v_1, T_2h|x \cdot v_2)$; die Höchstrangvoraussetzung sagt, daß $T_2h|x$ **invertierbar** ist. Die Aussage des Satzes über implizite Funktionen ist nun:

Zu jedem $p = (p_1, p_2) \in N_w$ gibt es eine Umgebung $U(p_1) \subset \mathbb{R}^d$ und eine differenzierbare Abbildung $h_2 : U(p_1) \to \mathbb{R}^c$ mit $h(x_1,\ h_2(x_1)) = w$; ferner: mit der Kettenregel gilt $Th_2|x_1 = -\left(T_2h|_x\right)^{-1} \cdot T_1h|_x,\ x = (x_1, h_2(x_1))$. Und: Der Graph von $h_2$ ist eine Umgebung von $p$ in $N_w$.

Kleine Stücke, auch "Standardumgebungen", in Niveaumengen sind also als Graphen beschreibbar.

Nun können wir die bereits vorgeführten Argumente wiederholen und bekommen: In den Standardumgebungen sind je zwei Punkte durch "kurze" rektifizierbare Kurve verbindbar (d.h. nicht länger als zweimal der Abstand). Zusammenhangskomponenten von Niveaumengen sind auch wegzusammenhängend, und ferner rektifizierbar zusammenhängend. Daher ist die innere Metrik für Niveaumengen definierbar, und zwar als vollständige Metrik. Offenbar sind abgeschlossene Kugeln kompakt. Daher funktioniert unser Arzela-Ascoli Beweis für die Existenz von Kürzesten. – *Wie sehen diese Kürzesten aus?* 22.11.2000

Als Beispiel zu dem vorhergehenden Satz behandeln wir zunächst die orthogonale Gruppe $O(n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit standard Skalarprodukt $\langle v, w\rangle|_{\mathbb{R}^n}$. Dazu definieren wir auf den quadratischen Matrizen $M(n,n) = \mathbb{R}^{n^2}$ ein Skalarprodukt. Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n,n)$, setze

$$\langle A, B\rangle := \text{spur}\,(A \cdot A^t) = \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}.$$

Die Matrixmultiplikation mit Elementen $U \in O(n)$, die per Definition auf $\mathbb{R}^n$ eine isometrische Operation ist, ist auch auf $M(n,n)$ isometrisch: $U \in O(n) \Rightarrow \langle A, B\rangle = \langle U \cdot A, U \cdot B\rangle = \langle A \cdot U, B \cdot U\rangle$. Außerdem gilt $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.
Symmetrische Endomorphismen, $S \in \text{Sym}(n) \Leftrightarrow \langle S \cdot v, w\rangle = \langle v, S \cdot w\rangle$ und
schiefsymmetrische Endomorphismen, $A \in \text{Skew}(n) \Leftrightarrow \langle A \cdot v, w\rangle = -\langle v, A \cdot w\rangle$
sind orthogonal wegen $\langle S, A\rangle = \text{spur}\, SA^t = \text{spur}\,(-SA) = -\text{spur}\, AS = -\langle A, S\rangle$.

Die quadratische Funktion $h : M(n,n) \to \text{Sym}(n),\ h(M) := M \cdot M^t$ hat als Urbild $h^{-1}(\text{id})$ offenbar die orthogonale Gruppe $O(n)$. Die Ableitung ist $Th|_{\text{id}}(A) = A + A^t$, also ist $\ker(Th|_{\text{id}}) = \text{Skew}(n)$ und $Th|_{\text{id}}$ ist auf dem orthogonalen Komplement $\text{Sym}(n)$ des Kernes Multiplikation mit 2. (Es genügt, diese eine Ableitung auszurechnen, denn für $U \in h^{-1}(\text{id})$ gilt $h(A) = h(A \cdot U)$, also $Th|_U(A \cdot U) = (Th|_{\text{id}})(A)$.)

Daher sind alle Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, d.h. wir haben die eben gezogenen Folgerungen: Je zwei "Punkte" der Zusammenhangskomponente $SO(n)$ von $h^{-1}(\text{id})$ sind durch eine Arzela-Ascoli Kürzeste verbindbar. Diese sollen identifiziert werden – *mit genau demselben Verfahren, das wir für $\mathbb{S}^2$ schon vorgeführt haben.*
Erste Voraussetzung ist, Ersatz für die Großkreise auf $\mathbb{S}^2$ zu finden. Wir differenzieren Matrixfunktionen: $P(M) := M^3,\ P(M+A) = M^3 + M^2A + MAM + AM^2 +$ in $A$ quadratische Terme, d.h. $TP|_M(A) = M^2A + MAM + AM^2$. Andere Potenzen entsprechend, ebenso konvergente Potenzreihen. Insbesondere:

$$\exp : M(n,n) \to M(n,n),\ \exp(M) := \text{id} + M + \sum_{k=2}^{\infty} M^k/k!$$

$$T\exp|_M(A) = A + (MA + AM) + \sum_{k=2}^{\infty}(M^kA + M^{k-1}AM + \ldots + AM^k)/(k+1)!$$

Daraus folgt zunächst $\exp(t_1A)\cdot\exp(t_2A) = \exp((t_1+t_2)A)$; mit $t \mapsto \exp(t\cdot A)$ haben wir also 1-Parameter Untergruppen der Endomorphismengruppe $Gl(n)$. Wegen $\exp(A)^t = \exp(A^t)$ gilt außerdem $\exp : \text{Skew} \to SO(n)$. Wir wollen sehen, daß genügend kurze Stücke *dieser 1-Parameter Untergruppen von $SO(n)$ die gesuchten Kürzesten in $SO(n)$ sind.*

Wir hatten Kurven $c : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ im Definitionsbereich der Polarkoordinatenabbildung $(\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi; \sin\theta\sin\varphi; \sin\theta)$ beschrieben durch $t \mapsto (\theta(t), \varphi(t))$ und hatten nachgerechnet: $|\dot{c}(t)| \geq \dot{\theta}(t)$ und daher Länge $(c) \geq \theta(1)$. Dies zeigt, daß Länge $(c)$ mindestens so groß ist wie die Länge des Meridians vom Nordpol $= c(0)$ zum Endpunkt von $c$.

Ebenso wollen wir jetzt Kurven $c : [0,1] \to SO(n),\ c(0) = \mathrm{id}$, im Definitionsbereich von $\exp : \mathrm{Skew}(n) \to SO(n)$ beschreiben als $t \mapsto A(t) \in \mathrm{Skew}$. Hauptaufgabe ist zu zeigen $|\dot{c}(t)| \geq \|A(t)\|^{\cdot}$, denn dann folgt: Länge $(c) \geq \|A(1)\| =$ Länge des Stückes $t \in [0,1] \to \exp(t \cdot A(1))$ einer 1-Parameter Untergruppe. Dazu müssen die Tangentialvektoren $A^{\cdot}(t)$ der Kurve in $\mathrm{Skew}(n)$ in ihren Radialanteil und dazu senkrechten Anteil zerlegt werden:

$$A^{\cdot}(t) = A^{\cdot}(t)^{rad} + A^{\cdot}(t)^{\perp}, \text{ mit } A^{\cdot}(t)^{rad} := \big\langle A^{\cdot}(t), A(t)\big\rangle \cdot A(t)/\|A(t)\|^2.$$

Als letztes brauchen wir, daß die Ableitung $T\exp$ sich ziemlich gut mit dem auf $M(n,n)$ verwendeten Skalarprodukt verträgt (analog wie bei den sphärischen Polarkoordinaten):

$$\exp : \mathrm{Skew} \to SO(n) \ \ \textbf{ist radial längentreu:} \ \ \big\langle T\exp|_A(B),\ T\exp|_A(A)\big\rangle = \big\langle B,\ A\big\rangle.$$

24.11.2000

**7. Woche,** 29.11.-1.12.2000

Wiederholende Gegenüberstellung von $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $SO(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Beide Teilmengen sind Niveaus quadratischer Funktionen, $h(x) := \langle x, x\rangle|_{\mathbb{R}^3}$ bzw. $h(M) := M \cdot M^t \in \mathrm{Sym}(n)$. Der Satz über implizite Funktionen ist anwendbar, die entsprechenden lokalen Koordinaten zeigen, daß wir innere Metrik und Arzela-Ascoli Kürzeste haben. Beide Niveaus sind *homogen* unter einer Isometriegruppe des umgebenden Raumes, $SO(3) : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ bzw. $SO(n) : M(n,n) \to M(n,n), L|_U(M) := U \cdot M$. Daher werden kürzeste Verbindungen mit einem speziellen Punkt ($Nordpol \in \mathbb{S}^2$, $\mathrm{id} \in SO(n)$) untersucht. In beiden Fällen kennen wir spezielle Kurven, Großkreise bzw. 1-Parameter Untergruppen, die als Kürzeste nachgewiesen werden sollen. Dazu werden Kurven $c$ auf $\mathbb{S}^2$ mit Hilfe einer Polarkoordinatenabbildung $P : (\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi; \sin\theta\sin\varphi; \cos\theta)$ beschrieben als $c(t) = P(\theta(t), \varphi(t)$; ganz entsprechend werden Kurven $c$ in einer Umgebung von $\mathrm{id} \in SO(n)$ mit Hilfe der Exponentialreihe beschrieben als $c(t) = \exp A(t),\ A(t) \in \mathrm{Skew}(n)$. Mit Hilfe der Ableitungen $TP$, $T\exp$ wird dann gezeigt:
für $\mathbb{S}^2$: $|\dot{c}(t)| = \big(\dot{\theta}(t)^2 + \sin^2\theta(t)\dot{\varphi}(t)^2\big)^{1/2} \geq |\dot{\theta}(t)| \geq \dot{\theta}(t)$, also Länge $(c) \geq \theta(1)$ =Länge des Meridians vom Nordpol nach $c(1)$, also ist der Meridian kürzeste Verbindung.
für $SO(n)$: $|\dot{c}(t)| \geq |\frac{d}{dt}\ |A(t)|| \geq \frac{d}{dt}\ |A(t)|$, also Länge $(c) \geq |A(1)|$ =Länge der Kurve $t \mapsto \exp(t \cdot |A(1)|)$; dieses Stück einer 1-Parameter Untergruppe ist also Kürzeste.

Aus der Formel für $T\exp|_A(B)$ und aus $\mathrm{spur}\, A^{l_1}BA^{n_1} = \mathrm{spur}\, A^{l_2}BA^{n_2}$, falls $l_1 + n_1 = l_2 + n_2$, folgt nun die angekündigte radiale Längentreue:

$$\big\langle T\exp|_A(B), T\exp|_A(A)\big\rangle = \big\langle \mathrm{B,A}\ \big\rangle$$

(Beachte: $\operatorname{spur}((\sum A^{k-1}B + \ldots + BA^{k-1})/k! \cdot A^n) = \operatorname{spur}((\sum A^{k-1}B)/(k-1)! \cdot A^n) = \operatorname{spur}(A^n \exp(A) \cdot B)$.
Dies wird für $A = A(t), B = \dot{A}(t) = \dot{A}(t)^{rad} + \dot{A}(t)^{\perp}$ benutzt und liefert mit $\frac{d}{dt}|A(t)| = \langle \dot{A}(t), A(t)\rangle / ||A(t)||^2$ die noch fehlende Ungleichung:
$|\dot{c}(t)| = \langle T\exp|_{A(t)}(\dot{A}(t)), T\exp|_{A(t)}(\dot{A}(t)^{rad} + \dot{A}(t)^{\perp})\rangle^{1/2} \geq |\dot{A}(t)^{rad}| \geq \frac{d}{dt}|A(t)|$.

Nach diesen beiden analogen Beispielen behandeln wir auch den folgenden Satz nach demselben Muster: Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ stetig differenzierbar, betrachte die Niveaumenge $N_w = \{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = w \in \mathbb{R}^c\}$. Setze ferner voraus, daß der Satz über implizite Funktionen anwendbar ist, also für jedes $p \in N_w$ sei $\operatorname{rang}(Th|_p) = c$. Dann besitzt jedes $p \in N_w$ eine Umgebung $U \subset N_w$, die sich als Graph (der implizit definierten) Funktion $h_2 : \ker(Th_p) \to \operatorname{bild}(Th_p),\ h(x, h_2(x)) = w$ beschreiben läßt. Dann kann man auf jeder Komponente von $N_w$ die innere Metrik definieren und die Arzela-Ascoli Kürzesten existieren in $N_w$. *Wie sehen sie aus*?
Strategie: a) Beschreibe Kandidaten (wie eben Großkreise oder 1-Parameter Gruppen),
b) zeige (in denselben Schritten wie eben), daß die Kandidaten lokal Kürzeste sind. 29.11.00

## 4. Herleitung der Differentialgleichung der Geodätischen

Wir wollen wie in der Variationsrechnung *notwendige* Bedingungen herleiten, die eine Kürzeste $c : [0,1] \to N_w \subset \mathbb{R}^n$ erfüllen muß. Da wir nicht beweisen können, daß die Arzela-Ascoli Kürzesten differenzierbar sind, und da wir andererseits von den Kandidaten *ohne Bezug auf ihre Herleitung* zeigen werden, daß sie Kürzeste sind, dürfen wir beim Auffinden der Kandidaten bequeme Zusatzvoraussetzungen machen: Wir werden für dreimal stetig differenzierbare Kürzeste eine Differentialgleichung zweiter Ordnung herleiten. Alle Lösungen der Dgl nennen wir **Geodätische**, und wir zeigen, daß genügend kurze Stücke von diesen tatsächlich *Kürzeste* sind.
Ich bespreche zwei Wege: Im ersten Fall suchen wir notwendige Bedingungen für Kurven $c : [0,1] \to Nw \subset \mathbb{R}^n$ von $p$ nach $q$, für die die Länge in $\mathbb{R}^n$, $\text{Länge}(c) = \int_0^1 |c'(s)| ds$, minimal ist unter der Nebenbedingung $\operatorname{bild}(c) \in N_w$. Im zweiten Fall benutze ich eine Parametrisierung $F : B^d \to N_w$ und suche notwendige Bedingungen für Kurven $\gamma : [0,1] \to N_w$, für die die Riemannsche Länge minimal ist,

$$\text{Länge}_{Riemann}(\gamma) = \int_0^1 \langle TF|_{\gamma(s)} \cdot \gamma'(s), TF|_{\gamma(s)} \cdot \gamma'(s)\rangle^{1/2} ds.$$

Da für $c = F \circ \gamma$ gilt $\text{Länge}_{\mathbb{R}^n}(c) = \text{Länge}_{Riemann}(\gamma)$ wird inhaltlich in beiden Fällen dasselbe Problem gelöst; obwohl die Formeln recht verschieden aussehen, sind auch die Argumentationsschritte dieselben (und evtl. aus der Variationsrechnung bekannt).
Weg I. Wir benutzen die lokale Parametrisierung, um Nachbarkurven $c_t$ so zu konstruieren, daß die Vektorfelder $V(s) := \frac{d}{dt} c_t(s)|_{t=0}$ in kleinen Umgebungen *jedes* Kurvenpunktes

$c(s_0)$ **beliebig** gewählt werden können. Für solche Kurven gilt dann, weil $c$ Kürzeste ist: $\text{Länge}\,(c_t) \geq \text{Länge}\,(c)$. Daraus folgt (setze voraus $|c'| = 1$):

$0 = \frac{d}{dt}\text{Länge}\,(c_t)|_{t=0} = \int_0^1 \langle \frac{d}{dt} c_t'(s), c_0'(s)\rangle = -\int_0^1 \langle \frac{d}{dt} c_t(s), \frac{d}{ds} c_0'(s)\rangle.$

Benutze dabei für die partielle Integration: $V(0) = 0, V(1) = 0$ und

$\frac{d}{ds}\langle \frac{d}{dt}\, c_t(s), \frac{d}{ds}\, c_t(s)\rangle = \langle \frac{d}{ds}\, \frac{d}{dt}\, c_t(s), \frac{d}{ds}\, c_t(s)\rangle + \langle \frac{d}{dt}\, c_t(s), \frac{d}{ds}\, c_t'(s)\rangle.$

*Indirekte Annahme*: Die Tangentialkomponente der zweiten Ableitung, $c''^{tan}(s_0)$ sei $\neq 0$. (Wegen Bogenlängenparametrisierung ist $c' \perp c''$, als Tangentialkomponente $c''^{tan}$ von $c''$ bezeichnen wir die Komponente von $c''$ tangential an die Niveaumenge $N_w$.)

Benutze die lokale Parametrisierung $F : B_r(0) \to N_w$, also die Beschreibung $c|_{[s_0-\delta, s_0+\delta]} = F \circ \gamma$, um die Nachbarkurven $c_t(s) := F(\gamma(s) + t \cdot v(s))$ so zu definieren, daß $\frac{d}{dt}\, c_t(s)|_{t=0} = \lambda(s) \cdot c''^{tan}(s),\ \lambda > 0$ in $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ und $= 0$ außerhalb. Dann folgt:

$\frac{d}{dt}\text{Länge}\,(c_t)|_{t=0} = \int_0^1 \langle V(s), c''(s)\rangle > 0$, im Widerspruch zu den eben abgeleiteten notwendigen Bedingungen.

Zusatz. Die damit hergeleitete Bedingung $c''^{tan} = 0$ ist unter Hinzunahme der Nebenbedingung $h(c(s)) = w$ eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$h(c(s)) = w$ ist äquivalent mit $h(c(0)) = w, \langle \text{grad}\, h|_{c(s)}, c'(s)\rangle = 0$, und dies ist äquivalent mit $h(c(0)) = w, \langle \text{grad}\, h|_{c(0)}, c'(0)\rangle = 0, \langle T\text{grad}\, h|_{c(s)}(c'(s)), c'(s)\rangle + \langle \text{grad}\, h|_{c(s)}, c''(s)\rangle = 0$.

Daher folgt die gesuchte Differentialgleichung (deren Lösungen $h \circ c = w$ erfüllen):

$$c''(s) = -\big\langle T\text{grad}\, h|_{c(s)}(c'(s)), c'(s)\big\rangle \cdot \text{grad}\, h/|\text{grad}\, h|^2(c(s)).$$

WEG II. Ich erinnere daran, daß zwar die zweite Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ durch eine Matrix (Hesse-Matrix) beschrieben wird, daß aber für höherdimensionale Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{c>1}$ schon die erste Ableitung durch die Jacobi-Matrix beschrieben wird, so daß die Matrixkonventionen keinen Platz für die Beschreibung der zweiten Ableitung lassen. Üblich sind entweder *Multiindices* oder etwas mehr Lineare Algebra: Die zweite Ableitung $T^2F|_x(v)$ approximiert die Differenz linearer Abbildungen $TF|_{x+v} - TF|_x$. Diese linearen Abildungen können auf ein weiteres Argument angewandt werden

$$T^2F|_x(v)(w) \sim TF|_{x+v}(w) - TF|_x(w).$$

Die Lineare Algebra interpretiert die linke Seite als *bilineare Abbildung* und der Satz von Schwartz über die Symmetrie der zweiten Ableitungen sagt, daß das Ergebnis von der Reihenfolge von $v, w$ bzw. $w, v$ unabhängig ist. Daher fassen wir die zweite Ableitung von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ auf als *symmetrische bilineare Abbildung*:

$$v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T^2F|_x(v, w) = T^2F|_x(w, v) \in \mathbb{R}^c.$$

Z.B. lautet dann die zweite Taylorapproximation:

$$F(x + v) = F(x) + TF|_x(v) + T^2F|x(v, v) + o(|v|^2).$$

Für die partielle Integration im folgenden benötigen wir Produkt- und Kettenregel:

$$\frac{d}{ds}\,\big\langle TF|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{dt}\,\gamma_t(s)),\quad TF|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{ds}\,\gamma_t(s))\big\rangle =$$
$$\big\langle T^2F|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{ds}\,\gamma_t(s),\frac{d}{dt}\,\gamma_t(s))+TF|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{ds}\,\frac{d}{dt}\,\gamma_t(s)),\quad TF|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{ds}\,\gamma_t(s))\big\rangle =$$
$$\big\langle TF|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{dt}\,\gamma_t(s)),\quad T^2F|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{ds}\,\gamma_t(s),d/ds\,\gamma_t(s))+TF|_{\gamma_t(s)}(\frac{d}{ds}\,\frac{d}{ds}\,\gamma_t(s))\big\rangle.$$

Wir haben wieder, weil $c = F\circ\gamma$ als differenzierbare Kürzeste vorausgesetzt wird und weil die vereinfachende Voraussetzung $|TF_\gamma(\gamma')| = 1$ gemacht wird,

$$0 = \tfrac{d}{dt}\,\text{Länge}\,(c_t)|_{t=0} = \tfrac{d}{dt}\,\text{Länge}_{\,Riemann}(\gamma_t)|_{t=0} =$$
$$\textstyle\int_0^1\big\langle \frac{d}{dt}(TF|_{\gamma_t}(\gamma_t'(s))),TF|_{\gamma_t}(\gamma_t'(s))\big\rangle = -\int_0^1\big\langle TF|_{\gamma_t}(\frac{d}{dt}\,\gamma_t(s)),\frac{d}{ds}\,TF|_{\gamma_t}(\gamma_t'(s))\big\rangle =$$
$$\textstyle\int_0^1\big\langle TF|_{\gamma_t}(v(s)),\ T^2F|_{\gamma_t}(\gamma_t'(s),\,\gamma_t'(s))+TF|_{\gamma_t}(\gamma_t''(s))\big\rangle.$$

Wir haben also wieder durch die partielle Integration die $s$-Ableitung des Variationsvektorfeldes $v$ in eine zweite Ableitung der Kurve $\gamma$ verwandelt. Wie im ersten Weg wird jetzt ausgenutzt, daß $v$ ein beliebiges Vektorfeld ist, also $TF|_\gamma(v(s))$ ein beliebiges an die Niveaumenge tangentiales Vektorfeld längs der als Kürzeste vorausgesetzten Kurve $c = F\circ\gamma$. Daher ist wieder notwendig, daß der tangentiale Anteil des rechten Skalarproduktargumentes verschwindet, also

$$\big(T^2F|_{\gamma_t}(\gamma_t'(s),\,\gamma_t'(s))+TF|_{\gamma_t}(\gamma_t''(s))\big)^{tangN_w} = 0.$$

Schließlich schreiben wir dies vollständig im Definitionsbereich von $F$, indem wir (unter Benutzung des Höchstrangs von $TF|_\gamma$) den Tangentialanteil der zweiten Ableitung im Urbild von $TF$ ausdrücken:

$$T^2F|_x(v,w)^{tang} = TF|_x\circ\Gamma|_x(v,w)$$

(Definition der symmetrischen bilinearen Abbildung $\Gamma$).

Die **Differentialgleichung der Geodätischen** lautet dann:

$$\gamma''(s)+\Gamma|_{\gamma(s)}(\gamma'(s),\gamma'(s)) = 0.$$

1.12.00

**8. Woche,** 8.12.2000

Die Rechnungen zur Differentiation der Länge von Kurvenscharen,

$$\tfrac{d}{d\epsilon}\text{Länge}\,(c_\epsilon) = -\textstyle\int_I\langle\frac{d}{d\epsilon}c_\epsilon(s),c_0''(s)\rangle ds \qquad\qquad (\text{Randterm} = 0)$$

wurde wiederholt, um noch einmal (mit dem Argument der Variationsrechnung) die Differentialgleichung der Geodätischen, $c''^{tang\,N_w} = 0$, herzuleiten. Hierbei ist entscheidend, daß das "Variationsvektorfeld" $v(s) := \frac{d}{d\epsilon}c_\epsilon(s)|_{\epsilon=0}$ so flexibel gewählt werden kann, daß für *jedes* $s$ tatsächlich *jeder* Tangentialvektor $v$ von $N_w$ mit Fußpunkt $c(s)\in N_w$ als Wert

$v = v(s)$ eines Variationsvektorfeldes auftreten kann. Hierzu haben wir die lokalen Graph-Koordinaten für die Niveaumenge benutzt.

*Definition der* **Krümmung von Kurven** *relativ zur inneren Metrik der Niveaumenge* $N_w$. Wir wählen in der eben wiederholten Rechnung das Variationsvektorfeld $v(s) \perp c'(s)$ und als Einheitsvektorfeld. Dann erfüllt die Kurvenschar $c_\epsilon(s)$ dieselben Zwecke wie früher eine Schar aus Parallelkurven, denn in der Ableitung $\frac{d}{ds}\frac{d}{d\epsilon}\text{Länge}\,(c_\epsilon) = -\langle \frac{d}{d\epsilon}c_\epsilon(s), c_0''(s)\rangle$ merkt man von der Parallelschar nicht mehr als $|v(s)| = 1,\ v(s) \perp c'(s)$. Den größten Wert, den diese Ableitung annehmen kann, bezeichnen wir in $\mathbb{R}^{n>2}$ als *Krümmung* der Kurve, genauer, um an die Definition mit Hilfe der inneren Metrik von $N_w$ zu erinnern, als **geodätische Krümmung** $\kappa_g(s) = |c''^{tang}(s)|$. Falls $N_w$ Dimension 2 hat, können wir wie in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^2$ die Krümmung *mit Vorzeichen* definieren. Z.B. für Niveauflächen von Funktionen $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ wählen wir durch $N(x) := \operatorname{grad} h/|\operatorname{grad} h|(x)$ ein Normalenvektorfeld der Fläche und damit zu jeder Kurve $c$ eine *äußere Normale* $v(s) := c'(s) \times N(c(s))$. *Damit definieren wir die* **geodätische Krümmung mit Vorzeichen** *durch*:

$$\kappa_g(s) = \langle v'(s),\ c'(s)\rangle = -\langle v(s),\ c''(s)\rangle, \quad \text{beachte } |c'(s)| = 1.$$

Eine Kurve $c : I \to N_w$ mit dieser Krümmung erfüllt dann die Differentialgleichung:

$$c'' = \langle c'', N\rangle \cdot N + \langle c'', v\rangle \cdot v =$$
$$-\langle c',\ T\operatorname{grad} h|_{c(s)}(c'(s))\rangle \cdot \operatorname{grad} h/|\operatorname{grad} h|^2(c(s)) - \kappa_g(s) \cdot c'(s) \times \operatorname{grad} h/|\operatorname{grad} h|(c(s).$$

*Umgekehrt*, ist eine Krümmungsfunktion $\kappa_g(s)$ gegeben, so ist die Lösung dieser Differentialgleichung zu den Anfangsdaten $c(0) \in N_w,\ c'(0) \perp \operatorname{grad} h(c(0))$ eine Kurve in $N_w$, deren geodätische Krümmung gleich der gegebenen Funktion $\kappa_g(s)$ ist! Dazu genügt es zu zeigen, daß jede solche Lösung $c$ in $N_w$ liegt, denn dann folgt erstens $c'' \perp c'$, also $\langle c', c'\rangle(s) = 1$ und zweitens ist die geodätische Krümmung dieser Lösungskurve nach Definition $-\langle c''(s),\ c'(s) \times N(c(s))\rangle$, also nach Einsetzen der Differentialgleichung tatsächlich $= \kappa_g(s)$. Und die Lösung liegt in $N_w$, denn die Ableitung von $\langle \operatorname{grad} h(c(s)), c'(s)\rangle$ ist nach Differenzieren und Einsetzen der Differentialgleichung null.

Damit haben wir die Theorie euklidischer ebener Kurven in die betrachteten metrischen Räume verallgemeinert. Beachte: Kandidaten für Kürzeste sind die ungekrümmten Kurven, die mit $\kappa_g(s) = 0$.

Ich habe wiederholt, was wir dabei über die Niveaumengen benutzt haben; vor allem: Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Existenz der Graphkoordinaten, und, falls die Zentren dieser Koordinaten nahe genug beieinander liegen, so sind die Koordinatenwechsel (dort wo sie definiert sind) bijektiv und bidifferenzierbar. Diese wichtigen Eigenschaften sind die Grundlage für die axiomatische Definition des Begriffs **differenzierbare Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^n$. – Ich werde diesen Begriff einüben, indem ich die Rechnung

vom Ende der letzten Woche in diesem axiomatischen Kontext wiederhole. Der nächste Satz ist dann:
Die durch $TF|_x \circ \Gamma(v,w) := T^2F|_x(v,w)^{tang}$ definierte und für die Differentialgleichung der Geodätischen sowie die Berechnung von $\kappa_g$ benötigte bilineare und symmetrische Abbildung $\Gamma$ läßt sich allein aus der Metrik berechnen (statt aus der Tangentialkomponente der zweiten Ableitung). 8.12.00

**9. Woche,** 13.-15.12.2000
Wiederholung: Ob man Ableitungen von $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der eindimensionalen partiellen Ableitungen berechnet (und sich dabei über die gewählten Basen im klaren sein muß) oder ob man basisunabhängig beste lineare Approximationen angeben kann (wie im Beispiel: $P: \; M(n,n) \to M(n,n), \; M \mapsto P(M) := M^3$ mit Hilfe der binomischen Formel $P(M+A) - P(M) = M^2A + MAM + AM^2 + O(\|A\|^2)$ ), hängt natürlich davon ab, wie die zu differenzierende Abbildung $F$ gegeben ist. In nicht auf Beispiele bezogenen allgemeinen Argumenten sollte man prägnante Bezeichnungen verwenden, die eine übersichtliche Formulierung der Differentiationsregeln erlauben. Oft sind die Differenzenquotienten leichter zu interpretieren, während für die Ableitungen bessere Rechenregeln zur Verfügung stehen; bis auf $\epsilon$-$\delta$-Fehler haben wir:

$$F(x+w) - F(x) \sim TF|_x(w), \; TF|_{x+v}(w) - TF|_x(w) \sim T^2F|_x(v,w).$$

Differentiationsregeln: $T_v(F \circ f)|_x = T(F \circ f)|_x(v) = TF|_{f(x)} \cdot Tf|_x(v)$

$$T^2(F \circ f)|_x(v,w) = T^2F|_{f(x)}(Tf|_x(v), Tf|_x(w)) + TF|_{f(x)} \circ T^2f|_x(v,w)$$

Nun sei $M$ eine $d$-dimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$; wir wiederholen die Herleitung der Differentialgleichung der Geodätischen. Die Änderung besteht darin, daß wir nicht mehr mit dem Satz über implizite Funktionen *konstruierte* (Graph-) Koordinaten haben, sondern *axiomatisch geforderte* lokale Koordinaten $F : B^d \to \mathbb{R}^n, \; x \in B^d \Rightarrow \text{rang}(TF|_x) = d$. Aus dieser Voraussetzung folgt offenbar lokal die "kurze rektifizierbare Verbindbarkeit"; für *zusammenhängende* Untermannigfaltigkeiten folgt daraus die globale rektifizierbare Verbindbarkeit, also die Existenz der inneren Metrik. Offenbar sind Kugeln kompakt, also existieren Arzela-Ascoli Kürzeste. Für genügend glatte Kürzeste $\gamma$ folgt aus dem Variationsargument die Differentialgleichung der Geodätischen für $\gamma$. Die Rechnung ist dieselbe wie am 1.12., aber wir müssen hervorheben, daß es für den indirekten Beweis genügt, nur Variationsvektorfelder zur Verfügung zu haben, die außerhalb einer Koordinatenumgebung null sind, innerhalb aber so gewählt werden können, daß aus der Annahme $(F \circ \gamma)''(s_0)^{tangential} \neq 0$ ein Widerspruch folgt.

Wenn man schließlich mit Mannigfaltigkeiten arbeitet, *muß man alle Argumente in den Definitionsbereichen lokaler Karten führen.* Wir bereiten das vor, indem wir auch für Untermannigfaltigkeiten anstreben, möglichst viele Eigenschaften im Definitionsbereich lokaler Karten zu beschreiben. Der Verlust an Anschaulichkeit wird kompensiert, weil man niedrigerdimensional rechnen kann. Die Riemannsche Metrik (Definition auf $B^d$: Für $x \in B^d$ setze: $g_x(v,w) := \langle TF_x \cdot v,\ TF_x \cdot w\rangle$ ) war das erste Beispiel dafür. Jetzt folgt die Differentialgleichung der Geodätischen: $\qquad TF \cdot (\ddot{c}(t) + \Gamma(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0.$

*Satz.* Die für die geodätische Differentialgleichung wichtige und (wegen der Höchstrang-Voraussetzung) durch

$$(T^2F|_x(v,w))^{tangential} = TF|_x \cdot \Gamma_x(v,w),\ x \in B^d,\ v,w \in \mathbb{R}^d$$

definierte **bilineare symmetrische Christoffelabbildung** $(v,w) \mapsto \Gamma_x(v,w)$ läßt sich aus der Riemannschen Metrik berechnen durch die Formel:

$$g_x(\Gamma_x(v,w),\ u) = -T_u g_x(v,w) + T_v g_x(w,u) + T_w g_x(u,v).$$

Beachte: Wie bei allen anderen Ableitungen haben wir $T_u g_x(v,w) \sim g_{x+u}(v,w) - g_x(v,w)$.

*Beweis* Wir differenzieren die Definition der Riemannschen Metrik:

$$\begin{aligned} T_u g_x(v,w) &:= \langle T^2F_x(u,v),\ TF_x \cdot w\rangle + \langle TF_x \cdot v,\ T^2F_x(u,w)\rangle \\ &= \langle T^2F_x(u,v)^{tangential},\ TF_x \cdot w\rangle + \langle TF_x \cdot v,\ T^2F_x(u,w)^{tangential}\rangle \\ &= g_x(\Gamma_x(u,v),\ w) + g_x(v,\ \Gamma_x(u,w)). \end{aligned}$$

Vertauscht man in der so erhaltenen Identität die Argumente $u,v,w$ zweimal zyklisch und kombiniert diese drei Gleichungen mit den Vorzeichen $-,+,+$ (wie in der Behauptung), so erhält man die gewünschte Formel, weil wegen der Symmetrie der Metrik $g(v,w) = g(w,v)$ und der Symmetrie der Christoffelabbildung $\Gamma(v,w) = \Gamma(w,v)$ die unerwünschten Christoffelterme (mit $\Gamma(u,v)$ und $\Gamma(u,w)$) herausfallen. 13.12.

## 5. Definition der Krümmung von Hyperflächen

Als $d$-dimensionale Hyperflächen bezeichnen wir $d$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^{d+1}$, z.B. Niveaus von Funktionen $f: \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^1, \mathrm{grad}\, f \neq 0$ oder (lokal) Bilder von Abbildungen $F: B^d \to \mathbb{R}^{d+1},\ \mathrm{rang}(TF|_x) = d$.

Vergleicht man Kugeln und Zylinder (beide homogen eingebettet, also überall "gleich" gekrümmt, weil die Definition nur akzeptabel ist, wenn sie mit Isometrien verträglich ist), so sieht man erstens, daß Approximation von Flächen durch Kugeln nicht so gut geeignet ist, Krümmungseigenschaften zu erfassen, wie die beste Approximation von Kurven durch Kreise; und man sieht zweitens, daß man nicht darum herum kommt zu akzeptieren, daß Flächen in verschiedenen Richtungen (an einem Punkt) verschieden gekrümmt sein

können.
Wir versuchen es mit dem zweiten Weg, Krümmung zu fassen, mit der Kippgeschwindigkeit der Normalen. Ich führe dies für Niveauflächen und Bildflächen parallel vor, weil das Konzept wichtiger ist als die beschreibenden Formeln. Für die Niveauhyperflächen einer Funktion können wir leicht ein Einheitsvektorfeld definieren, daß auf den Niveaus senkrecht steht:
Für $p \in \mathbb{R}^n, \operatorname{grad} f|_p \neq 0$ setze $N(p) := \operatorname{grad} f/|\operatorname{grad} f|(p)$. Ist dann $c : I \to f^{-1}(w) \subset \mathbb{R}^n$ Kurve in einem Niveau, so können wir leicht das Normalenfeld $N$ längs $c$ differenzieren:

$$(N \circ c)'(s) = \frac{T_{c'(s)}\operatorname{grad} f|_{c(s)}}{|\operatorname{grad} f|_{c(s)}|} - \big\langle T_{c'(s)}\operatorname{grad} f|_{c(s)}, \operatorname{grad} f\big\rangle\,(c(s)) \cdot \frac{\operatorname{grad} f|_{c(s)}}{|\operatorname{grad} f|_{c(s)}|^3}.$$

Für eine Bildfläche $F : B^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ beschreiben wir ein Normalenfeld ebenfalls als Abbildung, mit demselben Definitionsbereich wie $F$. Wegen der Voraussetzung $\operatorname{rang}(TF|_x) = d$ gibt es in jedem Punkt des Bildes zwei (entgegengesetzte) Einheitsnormalen, es gibt also zwei *stetige* Normalenfelder, wir wählen eines und bezeichnen es mit

$$N : B^d \to \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1},\ x \in B^d \Rightarrow N(x) \perp \operatorname{bild}(TF|_x).$$

Kurven $c$ im Bild von $F$ werden im Definitionsbereich beschrieben durch

$$\gamma : I \to B^d,\ c := F \circ \gamma.$$

Wieder differenzieren wir die Normale längs der Kurve:

$$\begin{aligned}(N \circ \gamma)'(s) &= T_{\gamma'(s)}N|_{\gamma(s)} \subset \operatorname{bild}(TF|_{\gamma(s)}) = N(\gamma(s))^\perp\\ &=: TF|_{\gamma(s)}\big(S|_{\gamma(s)} \cdot \gamma'(s)\big).\end{aligned}$$

Hier wird für jedes $x \in B^d$ eine lineare Abbildung $S_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert, die im Definitionsbereich von $N$ die Ableitung dieses Normalenfeldes beschreibt. Natürlich ist auch hier wesentlich die Höchstrangvoraussetzung über $F$, so daß *jeder* Vektor senkrecht zu $N(x)$ im Bild von $TF|_x$ liegt (ganz ähnlich wie bei der Definition der Christoffelabbildung).
Betrachte noch einmal die Rechnung zu den Niveauflächen, auch dort ergab sich die Kippgeschwindigkeit (also die Ableitung) der Normale als die *lineare* Abbildung $TN|_p : N(p)^\perp \to N(p)^\perp$, sogar genauer: $TN|_p$ ist die Komposition von $T\operatorname{grad} f$ mit der Orthogonalprojektion auf den Tangentialraum $N(p)^\perp$ des Niveaus.
Wir haben die Abbildung $S$ am Beispiel von Rotationsflächen ausgerechnet. Wir fanden eine $g_x(.,.)$-symmetrische Abbildung, deren Eigenvektoren tangential an die Meridiane und Breitenkreise waren. (Bitte nachrechnen und evtl. in den Übungen fragen.)
Tatsächlich gilt der *Satz*: Jede der Abbildungen $S_x$ ist $g_x(.,.)$-symmetrisch.
*Beweis.* Sei $\gamma : I \to B^d,\ v \in \mathbb{R}^d$. Differenziere $0 = \langle N \circ \gamma,\ TF|_{\gamma(s)}(v)\rangle|_{\mathbb{R}^n}$ :
$0 = \langle T_{\gamma'(s)}N|_{\gamma(s)},\ TF|_{\gamma(s)}(v)\rangle + \langle N \circ \gamma,\ T^2F|_{\gamma(s)}(\gamma'(s),\ v)\rangle,$

also folgt mit $\gamma(s) = x, \gamma'(s) = u$ und mit der Symmetrie der zweiten Ableitung $T^2F$ die Behauptung:

$$-\langle N(x),\ T^2F|_x(u,\ v)\rangle = \langle T_uN|_x,\ TF|_x(v)\rangle = \langle TF|_x(S\cdot u),\ TF|_x(v)\rangle = g_x(S\cdot u, v)$$

Die Abbildung $S_x$ heißt **Weingartenabbildung** oder **shape operator** der Hyperfläche; die zugehörige Bilinearform $b_x(v,w) := g_x(S_x \cdot v,\ w)$ heißt **zweite Fundamentalform**.

**10. Woche,** 20.12.2000

*Wiederholung*, Rotationsgeschwindigkeit von Vektorfeldern bei Kurven: Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $n : I \to \mathbb{R}^2$ das äußere Normalenfeld. Dann gilt $n'(s) = \kappa(s)\cdot c'(s)$. Definiere dazu $\alpha(s) := \int_0^s \kappa(\sigma)d\sigma$. Ich will anschaulicher machen, daß $\kappa$ die Rotationsgeschwindigkeit des Normalenfeldes $n$ (und dann natürlich auch die Rotationsgeschwindigkeit von $c' = \mathrm{Rot}(90°)\cdot n$ mit $c''(s) = -\kappa(s)\cdot n(s)$) ist. Dazu definiere ich das Vektorfeld $v(s) := c'(s)\cdot\cos\alpha(s) + n(s)\cdot\sin\alpha(s)$, bei dem $c'(s)$ um den Winkel $\alpha(s)$, also mit der *Rotationsgeschwindigkeit* $\kappa(s)$, zurückgedreht wird. Dies Vektorfeld sollte parallel sein, und in der Tat: Differenzieren ergibt $v'(s) = 0$.

*Akzente.* Bei der Behandlung von Untermannigfaltigkeiten wollen wir im Definitionsbereich lokaler Koordinaten $F : B^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ die Geometrie des Bildes von $F$ beschreiben. Beispiele: Riemannsche Metrik $g_x(v,w) := \langle TF_x\cdot v, TF_x\cdot w\rangle$, damit die Bogenlänge von $c := F\circ\gamma$ als $g$-Länge von $\gamma$. Die Differentialgleichung der Geodätischen $\gamma'' + \Gamma_\gamma(\gamma',\ \gamma')(s) = 0$ ist wirklich im Definitionsbereich von $F$ beschrieben, weil wir $\Gamma$ aus $g$, $Tg$ ausgerechnet haben, $2g_x(\Gamma_x(v,w),u) = -T_ug|_x(v,w) + T_vg|_x(w,u) + T_wg|_x(u,v)$. Auch die Krümmung haben wir letztes Mal im Definitionsbereich der lokalen Koordinaten beschrieben, weil wir die Rotationsgeschwindigkeit der Normale $N : B^d \to \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ längs einer Kurve $\gamma : I \to B^d$ im Definitionsbereich durch eine $g$-symmetrische lineare Abbildung $S_{\gamma(s)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ beschrieben haben:

$$TN_x(u) =: TF_x(S_x\cdot u).$$

Nun beoachten wir, daß – analog wie bei Kurven – die Längenänderung beim Übergang zu *Parallelflächen* $F_\epsilon := F + \epsilon\cdot N$ durch *dieselbe lineare Abbildung* $S$ beschrieben wird. Aus

$$TF_\epsilon = TF + \epsilon\cdot TN = TF\cdot(\mathrm{id} + \epsilon S)$$

berechnen wir die zu dieser Parametrisierung gehörige Riemannsche Metrik:

$$g_\epsilon(v,w) = g((\mathrm{id}+\epsilon S)\cdot v, (\mathrm{id}+\epsilon S)\cdot w), \text{ also}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial\epsilon}g_\epsilon(v,w)|_{\epsilon=0} = 2g(S\cdot v, w).$$

*Damit ist es ausreichend gerechtfertigt, die Weingartenabbildung $S$ (auch shape operator) als* **Krümmung der Hyperfläche** *zu bezeichnen.*

## Die Hyperflächengleichungen

Bisher haben wir eine Hyperfläche als gegeben angesehen und Metrik, Geodätische und

Krümmung durch Gleichungen beschrieben. Nun ändern wir den Standpunkt und betrachten Metrik und Krümmung als gegeben (und zwar als Abbildungen $x \mapsto g_x(.,.)$, $x \mapsto S_x(.)$, $x \in B^d$) und fragen, *wie weit ein parametrisiertes Hyperflächenstück* $F : B^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ *durch Metrik und Krümmung bestimmt ist.* Dann passiert etwas Ähnliches wie bei Kurven: Die zur Definition von Weingartenabbildung $S$ und Christoffelabbildung $\Gamma$ benutzten Gleichungen bekommen eine *zweite Interpretation*, sie sind nun Differentialgleichungen, die leicht einen Eindeutigkeitssatz zur Folge haben, aber schließlich auch zu der Existenzaussage führen: Falls Metrik und Krümmung berühmte notwendige Verträglichkeitsbedingungen erfüllen so gibt es tatsächlich (bis auf Anfangswerte eindeutig) ein Flächenstück mit dieser Metrik und dieser Krümmung.

**Die Hyperflächengleichungen**

$$TN|_x(u) = TF|_x(S_x \cdot u), \qquad \text{(Weingartenformel)}$$

$$T^2F|_x(v,w) = TF|_x(\Gamma_x(v,w)) - g_x(S \cdot v, w) \cdot N(x), \quad \text{(Gaußsche Ableitungsgleichung)}$$

Bemerkung. *Im größten Teil der Literatur wird zur Definition der Weingartenabbildung von* $\mathbb{S}^2$ *die* **innere** *Normale genommen, so daß die Gaußsche Normalenabbildung* $N$ *dann die orientierungsumkehrende Antipodenabbildung ist. Dem schließe ich mich nicht an. Da jedoch die Weingartenabbildung der Sphäre nach Meinung aller Autoren positive Eigenwerte haben soll, steht in der Literatur in der Weingartenformel das Minuszeichen, das bei mir in der Gaußschen Ableitungsgleichung steht. Meine bevorzugte Normale der Sphäre ist dann die* **äußere**; *sie wird auch in der Analysis bevorzugt:* $N = \operatorname{grad} r$, $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Da die Hyperflächengleichung nicht zu den im Grundstudium behandelten Differentialgleichungen gehört, ist der folgende Satz wichtig:

*Behauptung*: Betrachtet man die Hyperflächengleichung nur längs einer Kurve $\gamma : I \to B^d$, so vereinfacht sie sich zu einer **linearen gewöhnlichen Differentialgleichung.**

*Folgerung*: Eine Hyperfläche ist durch Metrik und Krümmung **eindeutig bestimmt** (natürlich bis auf die Wahl von Anfangsdaten $F(x_0) = F_0 \in \mathbb{R}^{d+1}, TF|_{x_0} = L_0$ mit $\langle L_0(v), L_0(w)\rangle = g_{x_0}(v,w)$ ), und falls zu der gegebenen Metrik und Krümmung überhaupt eine Hyperfläche gehört).

*Beweis.* Zur Herleitung der Gleichungen sei wieder eine Hyperfläche $F : B^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ mit Normalenfeld $N : B^d \to \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ sowie eine Kurve $\gamma : I \to B^d$ als *gegeben* angenommen. Definiere: $n : I \to \mathbb{R}^{d+1}$, $n(t) := N \circ \gamma(t)$ und $L : I \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d+1})$, $L(t) := TF|_{\gamma(t)}$. Differenziere mit der Kettenregel, benutze die Hyperflächengleichung und finde eine lineare Differentialgleichung für $(n(.); L(.))$:

$$\dot{n}(t) = L(t) \circ S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$$

$$\dot{L}(t)(.) = L(t) \circ \Gamma(\dot{\gamma}(t), .) - g_{\gamma(t)}(S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)),\ .\ ) \cdot n(t)$$

**11. Woche** 5.1.2001

# 6. Hyperbolische Geometrie

Bisher waren wir von metrischen Räumen ausgegangen, hatten dann Bogenlängen von Kurven und evtl. die innere Metrik definiert; zum Beispiel auf Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^d$ erhielten wir so Riemannsche Metriken. Die hyperbolische Geometrie definieren wir anders: Auf einer quadratischen Hyperfläche von $\mathbb{R}^{d+1}$ definieren wir mit Hilfe einer *indefiniten* Bilinearform $\langle\langle x, y\rangle\rangle := \sum_{j=1}^{j=d} x_j y_j - x_{d+1} y_{d+1}$ (genannt *Lorentzform*) auf jedem Tangentialraum ein *positiv definites* Skalarprodukt, also eine Riemannsche Metrik; Abstände in der Hyperfläche *definieren* wir als Infimum der Länge von Verbindungskurven. Die Hyperfläche wird so zu einem metrischen Raum (genannt *hyperbolischer Raum*), der nicht als Teilraum eines vorher gegebenen metrischen Raumes konstruiert wurde.
Die Hyperfläche $H$ ist das $-1$-Niveau der quadratischen Funktion $f(x) := \langle\langle x, x\rangle\rangle$; es handelt sich um ein zweischaliges Hyperboloid, wir betrachten die obere Hälfte. Die Ableitung von $f$ verschwindet nur auf dem Niveau $f(x) = 0$ bei $x = 0$.
Die orthogonale Gruppe $O(d, 1)$ der Lorentzform besteht aus allen Endomorphismen $A$ mit $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle\langle A \cdot x,\ A \cdot y\rangle\rangle$. Die orthogonale Gruppe $O(d)$ von $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ ist Untergruppe von $O(d, 1)$ und zwar Standgruppe des Punktes $(0; \ldots ; 1) \in H$.
*Satz.* Die Gruppe $O(d, 1)$ operiert *transitiv* auf $H$.
Wegen der $O(d)$-Rotationssymmetrie genügt es zu zeigen, daß der Scheitelpunkt $S := (0; \ldots ; 1)$ in jeden anderen Punkt des Meridians in der $x_1$-$x_{d+1}$-Ebene transportiert werden kann. Das gelingt mit den Lorentz-Isometrien:

$$A := \begin{pmatrix} \cosh r & 0 \ldots 0 & \sinh r \\ 0 & \ldots 1 \ldots & 0 \\ \sinh r & 0 \ldots 0 & \cosh r \end{pmatrix} \in O(d, 1)$$

Diese Abbildungen sind in $O(d, 1)$ wegen $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Wir parametrisieren $H$ mit Polarkoordinaten und berechnen die Riemannsche Metrik in diesen Koordinaten:

$$P : [0,\ \infty) \times \mathbb{S}^{d-1} \to H,\ P(r, e) := (\sinh r \cdot e;\ \cosh r)$$

Eine Kurve $c$ wird in Polarkoordinaten gegeben als $c(t) = P(r(t), e(t))$. Wir finden

$$\langle\langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle\rangle = \dot r(t)^2 + \sinh(r(t))^2 \cdot \langle \dot e(t), \dot e(t)\rangle.$$

Daraus folgt erstens, daß $r$ Bogenlängenparameter auf den Meridianen $r \mapsto (r, e = \mathit{const})$ ist. Zweitens ist jede andere Kurve vom Scheitel $S, r(0) = 0$, mindestens so lang wie der Meridian $r \mapsto (r, e(1))$:

$$|\dot{c}(t)|_H = \left(\dot{r}(t)^2 + \sinh(r(t))^2 \cdot \langle \dot{e}(t), \dot{e}(t)\rangle\right)^{1/2} \geq |\dot{r}(t)| \geq \dot{r}(t).$$

Also:

$$\text{Länge}_H(c) = \int_0^1 |\dot{c}(t)|_H dt \geq \int_0^1 \dot{r}(t) dt = r(1).$$

Daher sind die Meridiane Kürzeste. Außerdem sind sie *zweidimensionale ebene Schnitte* des Hyperboloids mit Ebenen durch die $(d+1)$-Achse in $\mathbb{R}^{d+1}$; mit Hilfe der Isometrien aus $O(d,1)$ können diese speziellen ebenen Schnitte in beliebige ebene Schnitte durch 0 abgebildet werden, und umgekehrt. Damit kennen wir alle Geodätischen in $H$ und wir wissen, daß sie Kürzeste sind.

Projiziert man die Hyperboloidschale von 0 aus auf die Tangentialebene $\mathbb{R}^d \times \{1\}$ im Scheitel, so ist das bijektive Bild von $H$ die (offene) Einheitsvollkugel, und die (geradlinigen) Sehnen sind die Bilder der Geodätischen. Dies Bild unter Zentralprojektion heißt Kleinsches Modell des hyperbolischen Raumes (und auch: Projektives Modell). 5.1.01

**12. Woche** 10.1.-12.1.2001

Wiederholung vom letzten Mal.

Weitere Analogien zur Sphäre: Für den Abstand von zwei Punkten $P, Q \in H$ gilt:

$$\cosh d_H(P,Q) = -\langle\langle P, Q\rangle\rangle,$$

und für zwei Tangentialvektoren $v, w$ in $P$, also $\langle\langle P, v\rangle\rangle = 0 = \langle\langle P, w\rangle\rangle$, gilt:

$$\cos \sphericalangle(v,w) = \langle\langle v, w\rangle\rangle.$$

Die folgende Herleitung der hyperbolischen Dreiecksformeln ist völlig analog zur Herleitung der entsprechenden sphärischen Formeln. Wie in der Euklidischen Ebene üblich seien $A, B, C$ die Ecken eines Dreiecks, $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel an diesen Ecken und $a, b, c$ die Längen der gegenüberliegenden Seiten. Euklidisch ergibt Orthogonalprojektion auf die Seite $c$ die "Projektionsforml": $a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = c$; die Höhe $h$ über der Seite $c$ berechnet sich als: $a \cdot \sin\beta = h = b \cdot \sin\alpha$ ("Sinussatz"); schließlich hat man den "Kosinussatz": $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Analoge, die Dreiecksgeometrie beherrschende Formeln werden hergeleitet. Der Fall $d+1 = 3$ genügt.

Mit den Isometrien aus $O(d,1)$ bringen wir $A$ in den Scheitel des Hyperboloids und $B$ in die vertikale Koordinatenebene durch die $x_1$-Achse. Dann haben die Eckpunkte folgende Koordinaten:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sinh c \\ 0 \\ \cosh c \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \sinh b \cos\alpha \\ \sinh b \sin\alpha \\ \cosh b \end{pmatrix}.$$

Außerdem geben wir eine Spiegelung $Sp \in O(d,1)$ an, die $A$ und $B$ vertauscht. Die Koordinaten des Punktes $Sp \cdot C$ berechnen sich einerseits via Matrixmultiplikation aus $\alpha, b, c$, andererseits analog zu $C$ direkt aus $a, \beta$:

$$Sp = \begin{pmatrix} -\cosh c & 0 & \sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix}$$

$$Sp \cdot C = \begin{pmatrix} \sinh a \cos \beta \\ \sinh a \sin \beta \\ \cosh a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cosh c \sinh b \cos \alpha + \sinh c \cosh b \\ \sinh b \sin \alpha \\ \cosh c \cosh b - \sinh c \sinh b \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Projekt.-satz \\ Sinussatz \\ Kosinussatz \end{pmatrix}$$

Anders als im Euklidischen kann man auch aus den drei Winkeln die Seitenlängen ausrechnen. Multipliziere zunächst Gleichung (1) mit $\cos \alpha$ und addiere Gleichung (1) nach Vertauschen von $b, c$:

$$\sinh a \cdot (\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) = \sinh b \cosh c \sin^2 \alpha$$

Nachdem man rechts den Sinussatz benutzt hat kann man durch $\sinh a$ kürzen und erhält den

"Winkelkosinussatz" : $\qquad \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c.$

Man überprüfe, daß man mit diesem Verfahren die analogen sphärischen Formeln herleiten kann (ein anderes Vorzeichen im Kosinussatz). Im Grenzwert kurzer Seitenlängen erhält man mit $\sinh x \sim x, \cosh x \sim 1$ aus den ersten beiden Formeln die Euklidischen Versionen, beim Kosinussatz benötigt man $\cosh x \sim 1 + x^2/2$ und vernachlässigt Fehler vierter Ordnung. Der Winkelkosinussatz hat den Grenzwert $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ oder $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. In Aufgabe 37 werden Anwendungen dieser Formeln geübt.

So wie man von der Erde durch Projektion gute Karten herstellt, so erleichtern es Karten oder Modelle, sich die hyperbolische Ebene vorzustellen. Die Zentralprojektion auf das Kleinsche Modell wurde schon beschrieben: Geodätische haben geradlinige Bilder. Stereographische Projektion vom unteren Scheitel $-S = (0; \ldots 0; -1)$ bildet die Einheitsvollkugel $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}; |x| < 1\}$ bijektiv auf das Hyperboloid ab durch die Formel

$$St(x) := \frac{1}{1 - \langle x, x \rangle} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 + \langle x, x \rangle \end{pmatrix} \in H \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

Diese Abbildung ist winkeltreu, vgl. Aufgabe 38. Die Urbilder der Geodätischen sind Kreise die senkrecht auf dem Rand der Einheitskugel $|x| < 1$ stehen. Die Rückseite von Blatt 11 zeigt ein regelmäßiges Vierzehneck in stereographischer Projektion. 10.1.01

Die Urbilder (unter $St$) ebener Schnitte von $H$ sind gegeben als

$$\{x \in \mathbb{R}^d;\ \langle a, 2x \rangle + b(1 + \langle x, x \rangle) + c(1 - \langle x, x \rangle) = 0\}.$$

Im Falle $b = c$ handelt es sich um ebene Schnitte durch das Projektionszentrum $(0; \ldots; -1)$, die Urbilder sind Sehnen der Kugel $|x| < 1$. Andernfalls bezeichne $m := -a/(b-c); r^2 := |m|^2 - (b+c)/(b-c)$, dann erfüllen die Urbilder die Kreisgleichung $\langle x - m, x - m \rangle = r^2$. Für Geodätische ist $c = 0$, $r^2 = |m|^2 - 1$, die Urbilder sind also Kreise, die den Rand der Einheitskugel senkrecht schneiden; siehe Rückseite von Blatt 11.
Kommentar zu Kleins Identifizierung der Kanten seines Vierzehnecks zu einer Fläche mit $\chi = -4$, also topologisch einer Sphäre mit drei Henkeln.
Wiederholung offener Fragen: (1) Kurventheorie in höheren Dimensionen, auch zur Anwendung auf die Hyperflächengleichung. (2) Sind kurze Stücke von Geodätischen tatsächlich Kürzeste? (3) Sei $G$ Isometriegruppe z.B. einer Riemannschen (Unter)-Mannigfaltigkeit $M$; wie kann man $M/G$ zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit machen? (Ein metrischer Raum ist $G/M$ schon.) Bei der Beantwortung hilft das folgende wesentliche Werkzeug:

## 7. Kovariante Ableitung

Ziel ist, in verschiedenen Situationen die nicht wirklich passende Euklidische Differentiation durch eine "bessere Ableitung" zu ersetzen. Dazu charakterisieren wir ein euklidisch paralleles Vektorfeld $v(t)$ längs einer Kurve $c(t)$ durch die Eigenschaft, daß die Ableitung $\dot{v}(t)$ möglichst klein ist. Diese Eigenschaft läßt sich verallgemeinern. Falls man Basen $\{v_j(t)\}$ aus längs $c$ *parallelen* Vektorfeldern finden kann, so lassen sich beliebige Vektorfelder als Linearkombinationen schreiben und mit der Produktregel differenzieren; $X(t) = \sum_{j=1}^{n} x^j(t) \cdot v_j(t)$ hat die neue Ableitung $\frac{d^{neu}}{dt} X(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}^j(t) \cdot v_j(t)$. – Es wird eine Weile dauern, bis man einsieht, daß hier nicht nur ein formaler Trick benutzt wird, sondern daß man eine wesentliche neue Struktur gefunden hat.
*Beispiel 1*, Differentiation im Normalenbündel einer Kurve $c$.
Es sei $v(t) \perp \dot{c}(t)$ ein normales Vektorfeld längs $c$. Durch Differenzieren von $\langle v(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$ findet man für die $\dot{c}(t)$-Komponente von $\dot{v}(t)$:

$$\dot{v}(t)^{\dot{c}} = -\langle v(t), \ddot{c}(t) \rangle \cdot \dot{c}(t).$$

$\dot{v}(t)$ wird möglichst klein, wenn wir verlangen: $\dot{v}(t)^{\dot{c}} = \dot{v}(t) = -\langle v(t), \ddot{c}(t) \rangle \cdot \dot{c}(t)$. Diese gewöhnliche Differentialgleichung liefert zu jedem Startwert $v(0) \perp \dot{c}(0)$ ein Vektorfeld $v(t) \perp \dot{c}(t)$. Dies ähnelt tatsächlich einer Parallelverschiebung, denn das Skalarprodukt $\langle v(t), \tilde{v}(t) \rangle$ zweier solcher "paralleler" Vektorfelder ist konstant, wir können also eine ON-Basis $v_j(0)$ fortsetzen zu einer ONBasis $v_j(t)$. Dabei impliziert $\langle v_j(0), \dot{c}(0) \rangle = 0$ auch $\langle v_j(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$, also wirklich eine Parallelverschiebung im Normalenbündel. – Zunächst haben wir nur eine kleine Rechtfertigung: Nach Aufgaben 16, 34 haben diese "parallelen" Vektorfelder geometrische Bedeutung: Sie liefern auf den Röhren die Orthogonaltrajektorien der Röhrenkreise, außerdem sind diese Kurven Krümmungslinien.

*Beispiel 2*, Differentiation von Tangentialfeldern von Hyperflächen längs Kurven.
Wir wählen die parametrisierte Beschreibung $F : B^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ mit Normalenfeld $N : B^d \to \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Betrachte eine Kurve $\gamma : I \to B^d, c := F \circ \gamma$ mit einem Tangentialfeld längs $c$: $v(t) := TF_{\gamma(t)}\nu(t)$. Verlangen wir wieder, daß $v(t)$ *möglichst wenig rotiert*, so finden wir durch Differenzieren von $\langle v(t), N \circ \gamma\rangle = 0$ die Normalkomponente:

$$\dot{v}(t)^N = -\langle v(t), TF_\gamma(S \cdot \dot{\gamma}(t))\rangle \cdot N \circ \gamma = g(\nu(t), S \cdot \dot{\gamma}(t)) \cdot N \circ \gamma.$$

Wieder rotiert $v(t)$ *minimal*, wenn die Komponente von $\dot{v}(t)$ tangential an die Hyperfläche null ist. Das ergibt wieder eine Differentialgleichung:

$$TF_\gamma \cdot (\dot{\nu}(t) + \Gamma_\gamma(\dot{\gamma}(t), \nu(t))) = 0 \text{ oder einfacher}$$
$$\dot{\nu}(t) + \Gamma_\gamma(\dot{\gamma}(t), \nu(t)) = 0.$$

Diese ist wieder zu jedem Anfangswert eindeutig lösbar und liefert an die Hyperfläche tangentiale Vektorfelder längs $c$. Das Skalarprodukt von zweien ist konstant, weil die Ableitung von $\langle v_1(t),\ v_2(t)\rangle$ null ist (wegen $\dot{v}_j(t) \sim N \circ \gamma$). Damit sind auch hier die Mindestanforderungen an eine verallgemeinerte Parallelverschiebung erfüllt. Außerdem sehen wir, daß das Tangentialfeld $\nu = \dot{\gamma}$ von Geodätischen "parallel" ist – analog wie bei Euklidischen Geraden. 12.1.01

**13. Woche** 17.1.-19.1.2001

*Variation zu Beispiel 2.* Wir bezeichnen wieder ein Vektorfeld $v$ längs einer Kurve $c = F \circ \gamma$ in einer parametrisierten Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ als *minimal rotierend*, wenn an jeder Stelle $t$ die Ableitung in $\mathbb{R}^n$ so klein wie möglich ist. Für jedes Normalenfeld $N$ ergibt Differenzieren von $\langle N \circ \gamma(t),\ v(t)\rangle = \langle N \circ \gamma(t),\ TF \cdot \nu(t)\rangle$, daß die Normalkomponente $\langle \dot{v}(t),\ N \circ \gamma(t)\rangle$ in Richtung $N$ durch den Wert $v(t)$ und durch die Ableitung der Normale $N \circ \gamma$ bestimmt ist. Wir können durch tangentiales Drehen *nur* die Tangentialkomponente beeinflussen und *fordern* daß sie null ist. Das führt im Definitionsbereich der Parametrisierung auf die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\dot{\nu}(t) + \Gamma_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \nu(t)) = 0.$$

Mit anderen Worten: Zu jedem Startvektor tangential an die Untermannigfaltigkeit in $\gamma(0)$ gibt es genau ein (durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmtes) *minimal rotierendes* Vektorfeld $\nu()$ längs $\gamma()$. Das Skalarprodukt von zwei solchen Vektorfeldern ist konstant, da $v_j(t) = TF_\gamma \cdot \nu_j(t)$ tangential und $\dot{v}_j(t)$ normal zur Untermannigfaltigkeit ist. Daher bezeichnen wir solche Vektorfelder als *im Riemannschen Sinne parallel.* Ihre Riemannsche Ableitung definieren wir als null, Linearkombinationen von parallelen Vektorfeldern $\nu_j(t)$, deren Koeffizienten Funktionen $x^j(t)$ sind, definieren wir wie im Euklidischen "komponentenweise". In Formeln: $\frac{D}{dt}\Sigma x^j(t) \cdot \nu_j(t) = \Sigma \dot{x}^j(t) \cdot \nu_j(t)$. Schließlich:

$$\frac{D}{dt}v(t) := (\frac{d}{dt}v(t))^{tang} = TF_\gamma(\frac{d}{dt}\nu(t) + \Gamma_\gamma(\dot{\gamma}(t), \nu(t)) = TF_\gamma(\frac{D}{dt}\nu(t)).$$

*Kovariante und kontravariante Vektoren.* Wir hatten schon betont, daß die beiden Beschreibungen der Ableitung einer Funktion $h$, nämlich Differential $dh$ und Gradient $\operatorname{grad} h$, sicher unterschieden werden müssen. Daran geht jetzt gar kein Weg mehr vorbei, da wir Kartenwechsel von (Unter)mannigfaltigkeiten behandeln müssen. Es seien $F : B^d \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{F} : \tilde{B}^d \to \mathbb{R}^n$ zwei lokale Beschreibungen derselben Untermannigfaltigkeit, d.h. es gibt einen *Koordinatenwechseldiffeomorphismus* $\Psi : \tilde{B}^d \to B^d$ mit $\tilde{F} = F \circ \Psi$. Wir stellen zusammen, wie dieselben Objekte auf der Untermannigfaltig $M^d$ in den beiden Karten beschrieben werden:
Kurven $c : I \to M^d$ durch Kurven $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{B}^d$ bzw. $\gamma : I \to B^d$ mit $\tilde{F} \circ \tilde{\gamma} = F \circ \gamma$, also $\Psi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
Deren Tangentialvektoren $c'(t)$ also durch $\tilde{\gamma}'(t)$ bzw. $\gamma'(t)$ mit $T\Psi_{\tilde{\gamma}} \cdot \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t)$.
Funktionen $h : M^d \to \mathbb{R}^1$ durch $\tilde{f} = h \circ \tilde{F}$ bzw. $f = h \circ F$, also $\tilde{f} = f \circ \Psi$.
Die Ableitung von $h$ also durch die Differentiale $d\tilde{f} = df \circ T\Psi$.

Wir halten fest: Die Jacobische $T\Psi$ des Koordinatenwechsels wird – in Übereinstimmung mit den Resultaten der linearen Algebra – bei der Transformation der Tangentialvektoren von Kurven *anders benutzt* als bei der Transformation von Differentialen (diese sind ja aus dem Dualraum jener). Nach Wahl einer Basis $e_1 \dots e_d$ für $\mathbb{R}^d$ werden die Koeffizienten der Linearkombination eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$, also $v = \Sigma_{j=1}^d v^j \cdot e_j$, als *Spaltenvektoren* notiert, mit *oberen Indices* geschrieben und als *kontravariante Komponenten* bezeichnet. Die Dualbasis wird $dx^j$ geschrieben, weil diese Linearformen auch die konstanten Ableitungen der Koordinatenfunktionen $x^j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ sind (diese sind definiert durch $x = \Sigma x^j(x) \cdot e_j$). Bezüglich dieser Dualbasis haben wir die Darstellung $df = \Sigma df(e_j) \cdot dx^j = \Sigma (df)_j \cdot dx^j$; die Koeffizienten heißen *kovariante Komponenten*, sie werden mit *unteren Indices* geschrieben und in Übereinstimmung mit der Matrixrechnung als *Zeilenvektoren* notiert.

Auch die Riemannsche Metrik $g$ und die Weingartenabbildung $S$ transformieren sich beim Koordinatenwechsel allein mit Hilfe der Jacobischen $T\Psi$, auch hier in beiden Fällen verschieden. (Man nennt die Metrik einen zweifach kovarianten Tensor, die Weingartenabbildung einen einfach ko- und einfach kontra-varianten Tensor).
Wichtig ist nun, wahrzunehmen, daß sich die Ableitung eines Vektorfeldes, z.B. die zweite Ableitung einer Kurve, beim Koordinatenwechsel **nicht** allein mit der Jacobischen verändert, auch die zweite Ableitung $T^2\Psi$ wird benötigt. Anders als wir das von der euklidischen Differentialrechnung gewöhnt sind, können wir also $\ddot{c}(t)$ nicht mehr als Vektorfeld auffassen.
Beobachten Sie: $\gamma''(t) = T^2\Psi(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t)) + T\Psi \cdot \tilde{\gamma}''(t)$.
**Satz** Die kovariante Ableitung verhält sich dagegen wie wir es gewohnt sind, sie trans-

formiert sich als *Vektor*, mit der Jacobischen allein: Seien $\tilde{\nu}(t)$ bzw. $\nu(t)$ Vektorfelder längs $\tilde{\gamma}(t)$ bzw. $\gamma(t)$ mit $\nu(t) = T\Psi \cdot \tilde{\nu}(t)$ (d.h. sie beschreiben dasselbe tangentiale Vektorfeld $v(t) = T\tilde{F} \cdot \tilde{\nu}(t) = TF \cdot \nu(t)$ längs $c = \tilde{F} \circ \tilde{\gamma} = F \circ \gamma$). Dann gilt:

$$T\Psi \cdot \frac{\tilde{D}}{dt}\tilde{\nu}(t) = \frac{D}{dt}\nu(t).$$

Zum Beweis: Differenzieren wir $TF \circ T\Psi = T\tilde{F}$ und nehmen die Tangentialkomponente, um das Transformationsverhalten der Christoffelabbildung zu bestimmen; auch dazu wird die zweite Ableitung benötigt, so daß $\Gamma$ ebenfalls kein Tensor ist. Aber die hier auftretende zweite Ableitung, nämlich

$$T\Psi \cdot \tilde{\Gamma} = \Gamma(T\Psi\ , T\Psi\ ) + T^2\Psi(\ ,\ ),$$

und die beim üblichen Differenzieren von $T\Psi \cdot \tilde{\nu} = \nu$ auftretende zweite Ableitung, nämlich

$$\tfrac{d}{dt}\nu(t) = T^2\Psi(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\nu}(t)) + T\Psi \cdot \tfrac{d}{dt}\tilde{\nu}(t)(t)$$

kompensieren sich in $\frac{D}{dt}\nu(t) = \frac{d}{dt}\nu(t) + \Gamma(\gamma'(t), \nu(t))$ bzw. $\frac{\tilde{D}}{dt}\tilde{\nu}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{\nu}(t) + \tilde{\Gamma}(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\nu}(t))$ gerade so, daß die Behauptung $T\Psi \cdot \frac{\tilde{D}}{dt}\tilde{\nu}(t) = \frac{D}{dt}\nu(t)$ übrig bleibt.

*Die Bedeutung dieses Resultates kann nicht überschätzt werden.* 19.1.01

**14.Woche.** 24.1. - 26.1.01

## 8. Riemannsche Differentialrechnung I

Wiederholung: Während im $\mathbb{R}^n$ die zweite Ableitung $\ddot{c}$ einer Kurve wieder ein Vektorfeld längs $c$ ist, ist das in Untermannigfaltigkeiten nicht so: In $\mathbb{R}^n$ betrachtet ist $\ddot{c}$ i.a. nicht tangential an die Untermannigfaltigkeit, und in Karten betrachtet transformiert sich die zweite Ableitung nicht richtig: Aus $\gamma = \Psi \circ \tilde{\gamma}$ folgt $\gamma'' = T\Psi \cdot \tilde{\gamma}'' + T^2\Psi(\tilde{\gamma}',\ \tilde{\gamma}')$. Von der kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes $\nu$ längs $\gamma$ aber hatten wir gezeigt, daß sie sich "richtig", also allein mit der Jacobischen, transformiert: $T\Psi \cdot \frac{\tilde{D}}{dt}\tilde{\nu}(t) = \frac{D}{dt}\nu(t)$.

Dies Differenzieren längs Kurven entspricht den euklidischen Richtungsableitungen. Wir wollen als nächstes Vektorfelder auf der Untermannigfaltigkeit differenzieren, im euklidischen sind deren Ableitungen Endomorphismenfelder: $\frac{d}{dt}X(p + t \cdot v)|_{t=0} = TX|_p(v) = T_vX|_p$.

Vektorfelder auf der Untermannigfaltigkeit werden in lokalen Karten beschrieben durch Abbildungen $\tilde{\xi} : \tilde{B}^d \to \mathbb{R}^d$ bzw. $\xi : B^d \to \mathbb{R}^d$ mit dem

$$\text{Transformationsverhalten } \xi \circ \Psi = T\Psi \cdot \tilde{\xi},$$

natürlich, denn dann folgt in $\mathbb{R}^n$: $TF(\xi(x)) = T\tilde{F}(\tilde{\xi}(\tilde{x}))$. Solche Vektorfelder können wir bereits längs Kurven *kovariant* differenzieren: Wenn wir definieren $\tilde{\nu}(t(:= \tilde{\xi}(\tilde{\gamma}(t))$ bzw. $\nu(t(:= \xi(\gamma(t))$, so erhalten wir

$$\tfrac{D}{dt}\xi(\gamma(t)) = T\xi|_\gamma \cdot \dot\gamma(t) + \Gamma_\gamma(\dot\gamma, \xi(\gamma))(t).$$

Entscheidend ist nun die Beobachtung, daß die rechte Seite **linear** von $\dot\gamma(t)$ abhängt, ganz genau so wie bei euklidischen Richtungsableitungen! Deshalb definieren wir die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $\xi : B^d \to \mathbb{R}^d$ als das *Endomorphismenfeld*:

$$x \mapsto D\xi|_x \text{ mit } \ D\xi|_x(\nu) := T\xi|_x(\nu) + \Gamma_x(\nu,\ \xi(x)).$$

Und der Name "Endomorphismenfeld" ist gerechtfertigt, denn aus dem Transformationsverhalten der kovarianten Richtungsableitungen folgt die "richtige" Transformation:

$$D\xi \cdot T\Psi = T\Psi \cdot D\tilde{\xi}.$$

Nach diesem ersten Erfolg wollen wir jetzt eine Riemannsche zweite Ableitung von Funktionen definieren, also die euklidische Rechnung

$$\frac{d}{ds} df|_{x+s\cdot k}(h)|_{s=0} = \mathrm{hesse} f|_x(k,h) = \frac{d}{ds}\langle \mathrm{grad}\, f(x+s\cdot k),\ h\rangle|_{s=0} = \langle \mathrm{Hesse} f|_x(k), h\rangle$$

verallgemeinern. In dieser Rechnung wird allerdings das *konstante* (oder parallele) Vektorfeld $h$ verwendet, das haben wir im Riemannschen Fall nicht. Aber die euklidische Rechnung ist nur wenig anders wenn wir statt $h$ ein beliebiges Vektorfeld $H(x)$ verwenden:

$$\frac{d}{ds} df|_{x+s\cdot k}(H(x+s\cdot k))|_{s=0} = \mathrm{hesse} f|_x(k, H(x)) + df_x \cdot (TH|_x \cdot k)$$

In dieser Form können wir sie Riemannsch einfach kopieren, indem wir das Vektorfeld $H$ *kovariant* differenzieren:

$$\frac{d}{ds} df|_{x+s\cdot k}(H(x+s\cdot k))|_{s=0} = \mathrm{hesse}_g f|_x(k, H(x)) + df_x \cdot (DH|_x \cdot k)$$

Von den hier auftretenden drei Termen sind der linke und der rechte invariant definiert (Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes benutzt nur $\Psi$ für die Fußpunkte und im übrigen die Jacobische $T\Psi$), also können wir diese Gleichung als Definition der Riemannschen Hesseform, $\mathrm{hesse}_g f$, ansehen. Durch Subtraktion der euklidischen und der Riemannschen Formel bekommen wir eine koordinatenabhängige Beschreibung (benutze die lokale Formel $DH\cdot k - TH\cdot k = \Gamma(k, H(x))$ ):

$$\mathrm{hesse}_g f|_x(k,h) = \mathrm{hesse} f|_x(k,h) - df_x \cdot (\Gamma_x(k,h)).$$

Auf der rechten Seite hat nur die Differenz, nicht jeder Term einzeln, eine Bedeutung *unabhängig von den verwendeten Koordinaten*; trotzdem lesen wir aus dieser lokalen Darstellung sofort ab, daß $\mathrm{hesse}_g f|_x(k,h)$ wie im euklidischen *symmetrisch* ist und, ebenfalls wie gewohnt, falls man Vektorfelder einsetzt, so hängt das Ergebnis $\mathrm{hesse}_g f|_x(H(x), K(x))$ an der Stelle $x$ nur von den Werten $H(x), K(x)$ ab, wie zwar die Bezeichnung erwarten läßt, wie es aber nicht aus der Definition offensichtlich ist. – Schließlich hat man auch denselben Zusammenhang zwischen Hesseform und Hesse-Endomorphismus wie im euklidischen, denn die kovariante Ableitung von Vektorfeldern erlaubt, das Riemannsche Skalarprodukt nach der Produktregel zu differenzieren:

$$\frac{d}{ds} g_{x+s\cdot k}(\mathrm{grad}\,_g f|_{x+s\cdot k}, H(x+s\cdot k)) = g_x(D\mathrm{grad}\,_g f|_x(k), H(x)) + g_x(\mathrm{grad}\,_g f, DH|_x \cdot k)$$
$$= \frac{d}{ds} df|_{x+s\cdot k}(H(x+s\cdot k))|_{s=0} = \mathrm{hesse}_g f(k, H(x)) + df_x \cdot (DH|_x \cdot k).$$

Die linken Seiten der beiden Zeilen sind gleich nach Definition von $\mathrm{grad}\,_g f$, auf der rechten Seite sind die jeweils zweiten Terme aus demselben Grund gleich, wir haben also wie behauptet

$$g_x(\mathrm{Hesse}_g f|_x(k), H(x)) := g_x(D\mathrm{grad}\,_g f|_x(k), H(x)) = \mathrm{hesse}_g f(k, H(x));$$

insbesondere ist der Riemannsche Hesse-Endomorphismus $g$-symmetrisch. *Damit haben wir einen nennenswerten Teil der euklidischen Differentialrechnung in die nicht mehr Vektorraum basierte Riemannsche Situation übertragen.* 24.1.01

Wiederholende Betonung der Produktregeln: Seien $X, Y$ Vektorfelder auf einer Riemannschen (bisher: Unter-)Mannigfaltigkeit, $\gamma$ sei eine Kurve, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt:

$$\frac{d}{dt} g(X,Y)\circ\gamma = g(D_{\dot\gamma(t)}X, Y) + g(X, D_{\dot\gamma(t)}Y)$$
$$\frac{d}{dt} df(X)\circ\gamma = \mathrm{hesse}_g f(\dot\gamma(t), X(\gamma(t))) + df(D_{\dot\gamma(t)}X)$$

Die iterierten Ableitungen von Funktionen in Richtung von Vektorfeldern hängen von der Reihenfolge ab, die **Lieklammer** $[X,Y]$ der Vektorfelder sagt, wie:

$$T_X(T_Y f) = \mathrm{hesse} f(X,Y) + df \cdot T_X Y, \quad \text{also:}$$
$$T_X(T_Y f) - T_Y(T_X f) = df \cdot (T_X Y - T_Y X) =: df \cdot [X,Y].$$

Diese euklidische Rechnung kann in jedem Koordinatensystem ausgeführt werden, und da die linke Seite unabhängig von der Karte Sinn macht, muß das auch rechts gelten. Zur Übung rechnen wir das nach. Dasselbe Vektorfeld auf der Untermannigfaltigkeit wird in zwei Karten durch zwei $\mathbb{R}^d$-wertige Abbildungen $X, \tilde X$ gegeben, wenn diese das richtige Transformationsverhalten haben, nämlich $X\circ\Psi = T\Psi\cdot\tilde X$. Differentiation längs einer Kurve $\tilde\gamma$, mit $\gamma' = T\Psi\cdot\tilde\gamma'$, ergibt das richtige Transformationsverhalten:

$$DX|_\gamma \gamma' = DX|_\gamma T\Psi\cdot\tilde\gamma' \;=\; T\Psi\tilde D\tilde X\cdot\tilde\gamma' = T\Psi\tilde D\tilde X\cdot(T\Psi)^{-1}\cdot\gamma'.$$

Die Bedeutung der Lieklammer beruht nicht nur auf der Formel für das Vertauschen iterierter Ableitungen, wie wir noch sehen werden. Wir beobachten jedoch sofort: Wegen der Symmetrie der Christoffelabbildung kann die Lieklammer mit *jeder Riemannschen Ableitung* genau wie im euklidischen berechnet werden:

$$\Gamma(X,Y) = \Gamma(Y,X) \;\Rightarrow\; D_X Y - D_Y X = T_X Y - T_Y X = [X,Y].$$

Ehe wir zu Beispielen und Anwendungen kommen, entwickeln wir die Riemannsche Differentialrechnung noch einen Schritt weiter. Weil die Weingarten Abbildung ein Endomorphismenfeld ist, und weil das kovariante Differential eines Vektorfeldes ein Endomorphismenfeld ist, wollen wir diese kovariant differenzieren. Um die Ähnlichkeit mit dem euklidischen Fall hervorzuheben, muß man nur auf die Verwendung der *parallelen* standard Basisfelder verzichten, dann ergibt die euklidische Produktregel für ein Endomorphismenfeld $A$ und Vektorfelder $Y, Z := A \cdot Y$:

$$T_X Z = (T_X A) \cdot Y + A \cdot T_X Y.$$

Hierbei verstehen wir, was $T_X A \sim (A_{(x+t\cdot X)} - A_x)/t$ bedeutet, weil wir im $\mathbb{R}^d$ Parallelverschiebung zur Identifizierung der Vektoren und Endomorphismen mit verschiedenen Fußpunkten verwenden. Offenbar ist ein Endomorphismenfeld genau dann parallel, wenn es bezüglich einer Basis aus parallelen Vektorfeldern durch eine konstante Matrix repräsentiert wird. Daher nennen wir im Riemannschen Fall ein Endomorphismenfeld $A$ *parallel längs einer Kurve* $\gamma$, wenn *für jedes parallele Vektorfeld* $Y$ *längs* $\gamma$ *auch* $A \cdot Y$ *parallel längs* $\gamma$ *ist.* Hieraus **folgt** dann die Riemannsche Produktregel für $Z := A \cdot Y$:

Produktregel: $$D_X Z = (D_X A) \cdot Y + A \cdot D_X Y.$$

In einem Teil der Literatur wird diese Gleichung als *Definition* von $(D_X A)$ angesehen, ich betrachte die Produktregel als Satz, der aus der darüber stehenden Definition eines parallelen Endomorphismenfeldes folgt.

Beispiele. Offenbar ist die Identität ein paralleles Endomorphismenfeld. – Die Ableitung von $A := f \cdot \mathrm{id}$, bzw. mit Fußpunkten $A|_x := f(x) \cdot \mathrm{id}|_x$, ist $D_X A \cdot Y = df(X) \cdot Y$. – Auf zweidimensionalen Flächen in $\mathbb{R}^3$, mit Normalenfeld $N$, haben wir die positive 90°-Drehung auf jedem Tangentialraum, also $\mathrm{Rot}(90°) \cdot v := N \times v$. Dies Endomorphismenfeld ist *parallel*. Denn, ein tangentiales Vektorfeld $X(t)$ längs einer Kurve $c(t)$ ist ja parallel, wenn $\dot{X}(t)$ proportional zu $N$ ist, $\dot{X}(t) \sim N$; aber das Vektorfeld $Y(t) := \mathrm{Rot}(90°) \cdot X(t)$ ist *ebenfalls parallel*, weil $\dot{Y}(t) \sim N$ aus der euklidischen Produktregel für $Y(t) = N \circ c(t) \times X(t)$ folgt.

Schließlich wenden wir uns den Flächengleichungen wieder zu. Für die zweite euklidische Ableitung der Immersion $F$ (gegeben als $n$ Funktionen $F = (F^1, \dots F^n)$ ) hatten wir

$$\mathrm{hesse} F(X,Y) := T^2 F(X,Y) = TF \cdot \Gamma(X,Y) - g(S \cdot X, Y) \cdot N.$$

Hier sind zwei von drei Termen nur in lokalen Koordinaten definiert, ohne invariante Bedeutung. Ohne die Gleichung inhaltlich zu verändern fassen wir die beiden nicht invarianten Terme zusammen: Wir erkennen den lokalen Ausdruck für die Riemannsche Hesseform wieder (die Weingartenformel sei, als zweite der Flächengleichungen, hinzugefügt):

$$\begin{aligned} \mathrm{hesse}_g F(X,Y) := D^2F(X,Y) &= -g(S\cdot X,Y)\cdot N. \\ TN\cdot Y &= TF\cdot S\cdot Y \end{aligned}$$

Nun differenzieren wir die Weingartenformel, und zwar gleich kovariant:

$$D^2N(X,Y) = D^2F(X,SY) + TF\cdot D_XS\cdot Y = -g(SX,SY)\cdot N + TF\cdot D_XS\cdot Y.$$

Auf der linken Seite ist die Riemannsche Hesseform (der drei Komponentenfunktionen $N=(N^1,N^2,N^3)$ ) *symmetrisch.* Daher muß auch die rechte Seite symmetrisch sein; der Normalanteil ist das von allein, beim Tangentialanteil ergibt sich, vermutlich unerwartet, eine *Bedingung an die Krümmung der Fläche, an die Weingartenabbildung*, nämlich die

**Codazzi Gleichung:** $$D_XS\cdot Y = D_YS\cdot X.$$ 26.1.01

**15.Woche.** 31.1. - 2.2.01
Wiederholung: Mir ist wichtig, daß die Produktregel:
$$D_X(A\cdot Y) = (D_XA)\cdot Y + A\cdot D_XY.$$
ein *Satz* ist, nicht wie in Teilen der Literatur die *Definition* von $D_XA$. Die Definition beruht auf der Riemannschen Parallelverschiebung längs Kurven und der aus dem euklidischen gewohnten Festsetzung: *Ein Endomorphismenfeld heißt parallel längs einer Kurve c, wenn seine Koeffizientenmatrix bezüglich einer* **parallelen Basis** *konstant ist.* Danach habe ich das Differenzieren der Flächengleichungen und obige Herleitung der Codazzi-Gleichung wiederholt.

*Eine Anwendung der Codazzi-Gleichung*: Voraussetzung: Die Eigenwerte der Weingartenabbildung $S_x$ in $x$ hängen zwar von $x$, nicht aber von der Richtung in $x$ ab, also: $S_x = f(x)\cdot \mathrm{id}_x$. Dann ist (Codazzi:) $0=(D_XS)Y-(D_YS)X = df(X)Y - df(Y)X$; da man $X(x),Y(x)$ linear unabhängig wählen kann, folgt $f(x)=\lambda = \mathit{const}$. Die Hyperfläche wird also bei $\lambda\neq 0$ durch Sphären vom Radius $1/\lambda$, sonst von Hyperebenen, quadratisch approximiert. Tatsächlich sind auch die Mittelpunkte dieser Sphären konstant:

$$T_X(F-\frac{1}{\lambda}N) = T_XF - \frac{1}{\lambda}TF\cdot S(X) = T_XF - \frac{1}{\lambda}TF\cdot\lambda X = 0.$$

Daher liegt das Bild von $F$ auf einer Sphäre vom Radius $\frac{1}{\lambda}$ um den *festen* Punkt $F-\frac{1}{\lambda}N$.

*Weitere Propaganda für die Lieklammer.* Es seien zwei Vektorfelder $X, Y$ (z.B. auf einer Untermannigfaltigkeit $M$) gegeben; wir betrachten deren Integralkurven, die unter milden Voraussetzungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind:

$f : \mathbb{R} \to M,\ f(0;p) := p,\ \ f'(s;p) = X \circ f(s;p),$

$g : \mathbb{R} \to M,\ g(0;p) := p,\ \ g'(t;p) = X \circ g(t;p).$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt $f(s + s_1; p) = f(s; f(s_1; p))$, eine wichtige Identität, die den Namen "$f$ ist Fluß des Vektorfeldes" rechtfertigt. Wir stellen folgende Frage: *Gibt es eine zweidimensionale Verallgemeinerung, also eine Abbildung*

$$F : \mathbb{R}^2 \to M,\ \textit{mit}\ \frac{\partial}{\partial s}F = X \circ F,\ \frac{\partial}{\partial t}F = Y \circ F\ \textit{und}\ F(0,0) = p\ ?$$

Notwendig ist zunächst $F(s,0) = f(s;p)$ und $F(0,t) = g(t;p)$. Von jeder dieser Anfangskurven ausgehend bekommt man zwei verschiedene Darstellungen für $F$:

$$F(s,t) = g(t; f(s;p)) \text{ und } F(s,t) = f(s; g(t;p))$$

Diese beiden werden einmal differenziert, und dann noch einmal:

(1) $\frac{\partial}{\partial t}F = Y \circ F$ und $\frac{\partial}{\partial s}F = X \circ F$; (2) $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F = T_X Y \circ F$ und $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}F = T_Y X \circ F$.

Damit folgt aus dem Satz von Schwarz $[X, Y] = 0$, mit anderen Worten: *Notwendig für die Existenz der gewünschten Abbildung $F$ ist das Verschwinden der Lieklammer $[X, Y]$ der beiden Vektorfelder.* Ich beweise jetzt nicht die Umkehrung, daß $[X, Y] = 0$ *hinreichend* für die Existenz von $F$ ist – offenbar muß man dafür beweisen, daß die beiden verschiedenen Kandidaten für $F$, nämlich $g(t; f(s;p))$ und $f(s; g(t;p))$ übereinstimmen. Durch diese Umkehrung wird der Name "Integrierbarkeitsbedingung" für die hinreichende Zusatzbedingung $[X, Y] = 0$ gerechtfertigt. Dies ist das einfachste Beispiel für die Art von Problemen, die bei einem Existenzbeweis für die Hyperflächengleichungen bestehen; die ebenfalls mit dem Satz von Schwarz hergeleiteten Codazzi-Gleichungen sind nämlich eine erste Integrierbarkeitsbedingung.

*Eine wichtige Anwendung der Lieklammer.* Die kovariante Ableitung hatten wir bisher *nur* für Riemannsche Metriken auf Untermannigfaltigkeiten des $/BR^n$ definiert. Da wir einerseits mit der hyperbolischen Metrik auch schon anders konstruierte Riemannsche Metriken kennen und da wir andererseits die Christoffelabbildung (*definiert* durch $T^2F^{tang} = TF \circ \Gamma$) allein aus der Metrik berechnen können, ergibt sich die Frage: *Existiert sogar für beliebige Riemannsche Metriken eine kovariante Ableitung*? Wir fordern die beiden wichtigsten, im Fall von Untermannigfaltigkeiten *bewiesenen* Eigenschaften nun axiomatisch:

(F1) Produktregel: $T_X(g(Y,Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$

(F2) Verträglich mit Lieklammer: $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.

In (F1) vertauschen wir die Argumente zweimal zyklisch und addieren mit den schon einmal nützlichen Vorzeichen (+,+,–):

$$\begin{aligned}
&T_X(g(Y,Z)) + T_Y(g(Z,X)) - T_Z(g(X,Y)) = \\
&g(D_XY,Z) + g(Y,D_XZ) + g(D_YZ,X) + g(Z,D_YX) - g(D_ZX,Y) - g(X,D_ZY) = \\
&g(D_XY,Z) + g(Y,[X,Z]) + g(X,[Y,Z]) + g(D_XY,Z) - g(Z,[X,Y])
\end{aligned}$$

Dies Resultat können wir so sortieren, daß der gesuchte Term $g(D_XY,Z)$ durch lauter schon bekannte Terme ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned}
2g(D_XY,Z) = {} & T_X(g(Y,Z)) + T_Y(g(Z,X)) - T_Z(g(X,Y)) + \\
& - g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y])
\end{aligned}$$

Diese notwendig geltende **Koszul-Formel** nehmen wir jetzt als *Definition* von $D_XY$ und weisen die Forderungen (F1), (F2) nach. Alle Terme rechts außer dem letzten sind entweder in Paaren oder allein symmetrisch in $X, Y$. Vertauscht man daher in der Koszul-Formel $X$ und $Y$, so findet man $2g(D_XY - D_YX, Z) = 2g(Z,[X,Y])$, also den Beweis von (F2). Schreibt man die Koszul-Formel auch für $2g(Y, D_XZ)$ auf und addiert, so heben sich rechts außer $2T_X(g(Y,Z))$ alle Terme (in Paaren) heraus, d.h. auch (F1) ist bewiesen. 31.1.01

Wiederholung der Herleitung der Koszul-Formel. Außerdem differenzieren wir euklidisch nach der Produktregel:

$$T_X(g(Y,Z)) = (T_Xg)(Y,Z) + g(T_XY,Z) + g(Y,T_XZ)$$

und ziehen das Resultat von (F1) ab:

$$(T_Xg)(Y,Z) = g((D_XY - T_XY),Z) + g(Y,(D_XZ - T_XZ)).$$

Wegen (F2) ist die Differenz $D_XY - T_XY$ symmetrisch in $X, Y$, daher können wir diese Differenz ebenso berechnen wie früher die Christoffelabbildung $\Gamma$: Nämlich in der letzten Formel $X, Y, Z$ zweimal zyklisch vertauschen und mit (++–) addieren, dann mit der Symmetrie von $D_XY - T_XY$ vereinfachen. Nicht unerwartet ergibt sich dieselbe lokale Formel wie früher:

$$\begin{aligned}
2g((D_XY - T_XY),Z) &= -T_Z(g(X,Y)) + T_X(g(Y,Z)) + T_X(g(Y,Z)) \\
&=: g(\Gamma(X,Y),Z)
\end{aligned}$$

also

$$D_XY - T_XY = \Gamma(X,Y)$$

Wir finden also zu jeder Riemannschen Metrik, nicht nur zu denen, die von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ kommen, eine durch die Koszul-Formel eindeutig bestimmte (lokal wie bisher berechenbare) *kovariante Ableitung.*

# 9. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

*Zusammenfassung von Erreichtem und Offenem.* Für die metrischen Räume, die als Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ auftreten, haben wir eine (bisher hervorragende) Anpassung der euklidischen Differentialrechnung an die Riemannsche Metrik erreicht. Bisher sind sogar alle Differentiationsregeln der kovarianten Ableitung dieselben wie euklidisch, obwohl wir in beliebigen Koordinaten rechnen können. Für genügend glatte Kürzeste konnten wir zeigen, daš sie die *Differentialgleichung der Geodätischen* erfüllen, und in $\mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n, SO(n)$ sind die Lösungen dieser Differentialgleichung (zumindest ein Stück weit) auch wirklich Kürzeste. Ich hebe hervor, daß alle diese Rechnungen doppelt geführt wurden, (a) mit anschaulicher Motivation, Differenzieren in $\mathbb{R}^n$ und Orthogonalprojektion auf die Untermannigfaltigkeit, (b) durch Rechnen in lokalen Karten und Kontrolle der Verträglichkeit mit Kartenwechseln, Bedeutung der Jacobischen der Kartenwechsel $\Psi : \tilde{B} \to B$, nämlich

$$v = T\Psi \cdot \tilde{v},\ d\tilde{f} = df \circ T\Psi.$$

Wir hatten in vollständigen metrischen Räumen $M$, in denen benachbarte Punkte durch ausreichned kurze Kurven verbindbar sind, eine vollständige innere Metrik definieren können. Sind abgeschlossene Kugeln auch kompakt, so existieren Arzela-Ascoli-Kürzeste zwischen je zwei Punkten. Insbesondere liefern isometrische Gruppenoperationen mit abgeschlossenen Bahnen auf den genannten metrischen Räumen, wieder Beispiele mit vollständiger innerer Metrik und Arzela-Ascoli-Kürzesten, vgl. Aufgaben 7, 22, 27. – Auf diesen interessanten Räumen haben wir noch keinen Ansatz für eine Übertragung der Differentialrechnung. Dies geschieht, indem sie mit der Struktur einer "Differenzierbaren Mannigfaltigkeit" versehen werden. Motivation für die Definition sind die erfolgreichen Rechnungen mit Kartenwechseln auf Untermannigfaltigkeiten. (Vgl. Bredon, Geometry and Topology)

Wir betrachten zuerst eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit $M^n$, die hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. (Die Hausdorff-Eigenschaft gehört zu der Vorstellung von Mannigfaltigkeit als "lokal wie im Euklidischen" dazu; das Abzählbarkeitsaxiom schließt Beispiele wie die "lange Gerade" aus.) Dann besitzt also jeder Punkt $p \in M^n$ eine Umgebung, die homöomorph zu einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist. Hat man für einen Punkt verschiedene solche Karten, so gibt es (homöomorphe) Kartenwechsel $\Psi : \tilde{B} \to B$, so daß Koordinatenpunkte $\tilde{x} \in \tilde{B}, x \in B$, die zu demselben Punkt $p \in M$ gehören, durch $x = \Psi(\tilde{x})$ zusammengehören.

Vor diesem Hintergrund heißt $M^n$ **Differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn die Kartenwechsel (nicht einfach Homöomorphismen, sondern) **Diffeomorphismen** sind.

Wir können leicht definieren: Eine stetige Funktion $h : M \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn sie in jeder Karte eine differenzierbare Darstellung $f : B \to \mathbb{R}$ hat; natürlich sind zwei solche Darstellungen (etwa noch $\tilde{f} : \tilde{B} \to \mathbb{R}$ mit $\Psi : \tilde{B} \to B$) verbunden durch

$$\tilde{f} = f \circ \Psi.$$

Und eine (stetige) Kurve heißt *differenzierbare* Kurve, wenn jede lokale Darstellung $\gamma : I \to B$ differenzierbar ist. Diese Definition ist mit Kartenwechseln verträglich, weil $\gamma$ und $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{B}$ verbunden sind durch

$$\gamma = \Psi \circ \tilde{\gamma}.$$

Anders als im Fall von Untermannigfaltigkeiten, in dem differenzierbare Kurven einfach eine Ableitung in $\mathbb{R}^n$ hatten, können wir noch nicht sagen, was der Tangentialvektor einer Kurve ist, obwohl das natürlich mit dem Verhalten bei Kartenwechseln, $\gamma' = T\Psi\tilde{\gamma}'$, zusammenhängen sollte. Wir betrachten dazu die Menge aller Tangentialvektoren an die Koordinatenkugeln in $\mathbb{R}^n$ und erklären eine Äquivalenzrelation wie folgt:

Zwei Tangentialvektoren, $v$ tangential an $B$ mit Fußpunkt $x \in B$ und $\tilde{v}$ tangential an $\tilde{B}$ mit Fußpunkt $\tilde{x} \in \tilde{B}$ heißen *äquivalent*,
falls erstens die Fußpunkte denselben Punkt in $M$ beschreiben, also $x = \Psi(\tilde{x})$
und falls zweitens gilt: $v = T\Psi_{\tilde{x}} \cdot \tilde{v}$.

Ich habe vorgeführt, daß hierdurch eine Äquivalenzrelation definiert wird. Jede Äquivalenzklasse heißt ein *Tangentialvektor* von $M$. 2.2.01

**16. Woche.** 7.2. - 9.2.01
Erste Anwendung: Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $M$. Gegeben sei ein Vektorfeld auf $M$, lokal beschrieben durch Abbildungen $X : B \to \mathbb{R}^d$. Lokal haben wir Integralkurven $\gamma$, also mit $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$. Dieselbe Kurve werde in der Karte $\tilde{B}$ mit $\Psi : \tilde{B} \to B$ beschrieben durch $\tilde{\gamma}$, das Vektorfeld durch $\tilde{X} : \tilde{B} \to \mathbb{R}^d$. Setze in die Differentialgleichung den Kartenwechsel, $\gamma = \Psi \circ \tilde{\gamma},\ X \circ \Psi = T\Psi \cdot \tilde{X}$, ein:

$$T\Psi \cdot \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t) = X(\gamma(t)) = X \circ \Psi(\tilde{\gamma}(t)) = T\Psi \cdot \tilde{X}(\tilde{\gamma}(t)).$$

Man sieht: *Das Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist mit Kartenwechseln verträglich, d.h. wir können auf Mannigfaltigkeiten Integralkurven von Vektorfeldern betrachten.*

Warnung. Integralkurven von Vektorfeldern sind nicht unbdingt auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ein Beispiel auf $M = \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $X(y) := (1 + y^2) \cdot 1_y$, denn Lösungskurven erfüllen die Differentialgleichung $y'(t) = 1 + y(t)^2$ von $\tan()$, und deren maximale Definitionsbereiche haben die Länge $\pi$. Vektorfelder, deren Integralkurven auf $\mathbb{R}$ definiert sind, heißen *vollständig*.

Eine Differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**, wenn auf jeder Karte $B$ ein Riemannsches Skalarprodukt $x \to g_x(\ ,\ )$ gegeben ist; Verträglichkeit mit Kartenwechseln bedeutet $g_{\Psi(\tilde{x})}(\ ,\ ) = \tilde{g}_{\tilde{x}}(T\psi\cdot\ , T\psi\cdot\ )$. Damit haben wir wie vorher bei Untermannigfaltigkeiten:
Die Bogenlänge von Kurven, lokal: Länge $(\gamma) = \int g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))^{1/2} dt$.
Die innere Metrik, $d(p,q)$, ist Infimum der Länge von Verbindungskurven.
*Häufige Zusatzvoraussetzung:* $M$ mit der inneren Metrik ist **vollständig**.
Wir haben nicht nur Differentiale von Funktionen sondern auch Gradientenfelder, lokal: $df_x(v) = g_x(\operatorname{grad}_g f(x), v)$.
Mit Hilfe der Koszul-Formel haben wir eine mit Kartenwechseln verträgliche kovariante Ableitung, lokal wie vorher: $\frac{D}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}X(t) + \Gamma(\dot\gamma(t), X(t))$, $\frac{D}{dt}X(t) = T\Psi \cdot \frac{\tilde{D}}{dt}\tilde{X}(t)$.
Zwar sieht die Definition lokal komplizierter aus (euklidische Ableitung *plus* $\Gamma$-Korrektur), aber global gelten die bisher behandelten Differentiationsregeln genau wie im Euklidischen (und natürlich so, wie wir es von den Untermannigfaltigkeiten schon kennen, auf denen die kovariante Ableitung ja eine *zusätzliche Interpretation* besitzt, sie ist nämlich die *Tangentialkomponente* der euklidischen Ableitung des Vektorfeldes in $\mathbb{R}^n$).

## 10. Riemannsche Differentialrechnung II

*Wichtige anstehende Fragen*: (1) Weiterer Ausbau der Riemannschen Differentialrechnung. (2) Mehr geometrische Interpretation der kovarianten Ableitung. (3) Nützliche Anwendungen der kovarianten Ableitung.
Ich will die am 26.1. besprochene kovariante Ableitung von Endomorphismenfeldern $A$, also $(D_X A) \cdot Y = D_X(A \cdot Y) - A \cdot D_X Y$, anwenden auf das kovariante Differential $DZ$ eines Vektorfeldes (lokal $DZ = TZ + \Gamma(\ , Z)$). Wir erhalten so das zweite kovariante Differential $D^2 Z$, und wir werden sehen, daß der Satz von Schwarz nicht mehr gilt.

Zunächst die Wiederholung vom 9.2.01
Überprüfen Sie möglichst oft, daß die bisherigen Riemannschen Differentiationsregeln *genau so* lauten, wie die euklidischen und daß sie sich auch in die euklidischen *spezialisieren*, wenn die Riemannsche Metrik $g_x(\ ,\ )$ nicht vom Fußpunkt abhängt. In der euklidischen Differentialrechnung haben Sie so überwiegend in Richtung *paralleler* (auch: *konstanter*) Vektorfelder $e_j$ differenziert, daß Ihnen der Unterschied zwischen

*iterierten Ableitungen* und *zweiten Ableitungen*

vielleicht nicht bewußt genug ist. Bei Funktionen $f$ hatten wir

$$T_X(T_Y f) = D^2 f(X,Y) + df(D_X Y) \text{ und damit } T_X(T_Y f) - T_Y(T_X f) = df([X,Y]).$$

Beim zweimaligen Differenzieren von Vektorfeldern $Z$, also beim Differenzieren des Endomorphismenfeldes $A = DZ$, $A \cdot Y = D_Y Z$ haben wir mit obiger Produktregel (mit der

Bezeichnung $DA = D^2 Z$, $(D_X A) \cdot Y = D^2_{X,Y} Z$):
$$D_X(D_Y Z) = D^2_{X,Y} Z + D_{D_X Y} Z$$
Ich hebe den Unterschied zwischen iterierten und zweiten Ableitungen hervor:
Iteriert: $$D_X(D_{f\cdot Y} Z) = f \cdot D_X(D_Y Z) + df(X) \cdot D_Y Z$$
Zweite (tensorielle) Ableitung: $$D^2_{X,f\cdot Y} Z = f \cdot D^2_{X,Y} Z.$$
Das Verhalten der zweiten Ableitung (beim Multiplizieren der Differentiationsrichtung $Y$ mit einer Funktion) ist also besser als das der iterierten Ableitung. Die zweite Ableitung verhält sich bei dieser Regel genau wie die euklidische zweite Ableitung, sie hängt *nicht* von der Ableitung $DY$ ab, während die iterierte Ableitung das tut.
Um den schiefsymmetrischen Anteil der zweiten Ableitung, also $D^2_{X,Y} Z - D^2_{Y,X} Z$, besser zu verstehen, sehen wir auch die lokale Formel hierfür an. *Es ist das letzte Mal, daß ich eine lokale Rechnung zur Riemannschen Differentialrechnung für wesentlich halte.*
Aus $D_Y Z = T_Y Z + \Gamma(Y, Z)$ folgt

$$\begin{aligned}
D_X(D_Y Z) &= T_X\big(T_Y Z + \Gamma(Y, Z)\big) + \Gamma\big(X, (T_Y Z + \Gamma(Y, Z)\big) \\
&= T^2_{X,Y} Z + T_{T_X Y} Z + (T_X \Gamma)(Y, Z) + \Gamma(T_X Y, Z) + \Gamma(Y, T_X Z) \\
&\qquad + \Gamma\big(X, \Gamma(Y, Z)\big) + \Gamma\big(X, T_Y Z\big), \\
D_{D_X Y} Z &= T_{D_X Y} Z + \Gamma\big(D_X Y, Z\big) \\
&= T_{T_X Y + \Gamma(X,Y)} Z + \Gamma\big(T_X Y + \Gamma(X, Y), Z\big)
\end{aligned}$$

Also haben wir den lokalen Ausdruck der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
D^2_{X,Y} Z = T^2_{X,Y} Z &+ \big(\Gamma(Y, T_X Z) + \Gamma(X, T_Y Z)\big) + T_{\Gamma(X,Y)} Z + \Gamma\big(\Gamma(X, Y), Z\big) \\
&+ (T_X \Gamma)(Y, Z) + \Gamma\big(X, \Gamma(Y, Z)\big)
\end{aligned}$$

Wie es sein muß, hängt dieser Ausdruck *nicht* von den Ableitungen von $X, Y$ ab. Die Terme der ersten Zeile sind symmetrisch in $X, Y$ und fallen daher bei der folgenden Schiefsymmetrisierung fort. Wir haben gefunden:

$$D^2_{X,Y} Z - D^2_{Y,X} Z = (T_X \Gamma)(Y, Z) - (T_Y \Gamma)(X, Z) + \Gamma\big(X, \Gamma(Y, Z)\big) - \Gamma\big(Y, \Gamma(X, Z)\big).$$

Diese Formel ist nun **sehr** erstaunlich: Links steht ein mit Kartenwechseln verträglicher Ausdruck in der kovarianten zweiten Ableitung $D^2 Z$; rechts dagegen steht ein Ausdruck, dessen Verhalten unter Kartenwechseln nicht erkennbar ist, der jedoch **nicht von den Ableitungen sondern nur von dem Wert des Vektorfeldes $Z$ abhängt. Daher ist der schiefsymmetrische Teil der zweiten Ableitung von $Z$ in allen drei Argumenten $X, Y, Z$ linear sogar bei Multiplikation mit Funktionen; oder lokal ausgedrückt, bei Kartenwechseln werden alle drei Argumente mit der Jacobischen**

**$T\Psi$ transformiert. Damit it der schiefsymmetrische Anteil von $D^2Z$ ein dreifach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor, genannt Krümmungstensor.**

Bezeichnung: $R(X,Y)Z := D^2_{X,Y}Z - D^2_{Y,X}Z.$

Symmetrien des Krümmungstensors:
Nach Definition: $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z).$
Aus der lokalen Formel folgt sofort die *erste Bianchi Identität*:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Schiefsymmetrie von $Z \mapsto R(X,Y)Z$:

$$g(R(X,Y)V,\ W) = -g(V,\ R(X,Y)W).$$

Beweis. Betrachte für Vektorfelder $V, W$ die Hilfsfunktion $h := g(V,W)$ und berechne (mit Produktregeln) die zweite Ableitung $D^2_{X,Y}h.$:
$D^2_{X,Y}h = g(D^2_{X,Y}V,\ W) + g(D_XV, D_YW) + g(D_YV, D_XW) + g(V,\ D^2_{X,Y}W).$
Die Hessesche von $h$ ist symmetrisch; beim Schiefsymmetrisieren fallen außerdem alle (nämlich symmetrischen) Terme mit ersten Ableitungen weg, das Resultat ist die Behauptung $0 = g(R(X,Y)V,\ W) + g(V,\ R(X,Y)W).$

Wir wiederholen diese Rechnung für die zweite Ableitung von Endomorphismen: Wieder fallen beim Schiefsymmetrisieren alle Terme mit ersten Ableitungen weg und wir sehen, daß für den schiefen Teil der zweiten Ableitung eine *Produktregel* gilt.

$$D^2_{X,Y}(A\cdot Z) = (D^2_{X,Y}A)\cdot Z + (D_XA)\cdot(D_YZ) + A\cdot(D^2_{X,Y}Z) + (D_YA)\cdot(D_XZ),$$

also die angekündigte Produktregel:

$$(D^2_{X,Y} - D^2_{Y,X})(A\cdot Z) = ((D^2_{X,Y} - D^2_{Y,X})A)\cdot Z + A\cdot((D^2_{X,Y} - D^2_{Y,X})Z)$$
$$((D^2_{X,Y} - D^2_{Y,X})A)\cdot Z = R(X,Y)(A\cdot Z) - A\cdot R(X,Y)Z.$$

## 11. Theorema Egregium

Nun komme ich zu Interpretationen zurück. Wir haben im zweidimensionalen Fall, von einer Kurve ausgehend, *geodätische Parallelkoordinaten* eingeführt. Wir werden die geodätische Krümmung der Parallelkurven berechnen, und wir werden feststellen, daß der Krümmungstensor *die Ableitung der geodätischen Krümmung senkrecht zu den Parallelkurven* kontrolliert. Damit beginnen wir, die wichtigste lokale Invariante der Riemannschen Geometrie zu verstehen.

*Geodätische Parallelkoordinaten* In einer zweidimensinalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $M$ sei eine stetig differenzierbare Kurve $c: I \to M$ mit $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1$ gegeben; außerdem längs $c$ ein Einheitsvektorfeld $v : I \to TM$ mit $v(t) \perp \dot{c}(t)$. Wir definieren eine zweidimensionale Abbildung $C : [-\epsilon, \epsilon] \times I \to M$ dadurch, daß $s \mapsto C(s,t)$ die Geodätischen (d.h. $\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial s}C(s,t) = 0$) mit den Anfangsdaten $C(0,t) := c(t)$, $\frac{\partial}{\partial s}C(s,t)|_{s=0} = v(t)$ sind. 9.2.01

**Letzte Woche.** 14.2. - 16.2.01

Die Abbildung $C$ (vgl. 9.2.) hat Rang 2 und definiert daher eine recht spezielle Karte: $g(\frac{d}{ds}C, \frac{d}{ds}C(s,t)) = 1$, denn bei $s = 0$ ist $\frac{d}{ds}C(0,t) = v(t)$ mit $|v(t)|_g = 1$ vorausgesetzt und $\frac{d}{ds}g(\frac{d}{ds}C, \frac{d}{ds}C(s,t)) = 2g(\frac{D}{ds}\frac{d}{ds}C, \frac{d}{ds}C(s,t)) = 0$ weil $s \mapsto C(s,t)$ Geodätische ist. Ähnlich ist $g(\frac{d}{ds}C, \frac{d}{dt}C(s,t)) = 0$, denn für $s = 0$ ist das vorausgesetzt und
$\frac{d}{ds}g(\frac{d}{ds}C, \frac{d}{dt}C(s,t)) = g(\frac{D}{ds}\frac{d}{ds}C, \frac{d}{dt}C(s,t)) + g(\frac{d}{ds}C, \frac{D}{ds}\frac{d}{dt}C(s,t)) = g(\frac{d}{ds}C, \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}C(s,t)) = 1/2 \cdot \frac{d}{dt}g(\frac{d}{ds}C, \frac{d}{ds}C(s,t)) = 0$.
Wir kürzen ab: $G^2(s,t) := g(\frac{d}{dt}C, \frac{d}{dt}C(s,t))$. $G$ ist also die Länge der Tangentialvektoren der Parallelkurvenschar $t \mapsto C(s,t)$.

Zu Beginn des Semesters hatten wir die geodätische Krümmung definiert mit Hilfe der (infinitesimalen) Längenänderung beim (infinitesimalen) Übergang zu Parallelkurven. Da wir jetzt, wie im Euklidischen, echte (nicht nur infinitesimale) Parallelkurvenscharen haben, liefern die damaligen Formeln jetzt für alle Parallelkurven $t \mapsto C(s,t)$ auf einmal:

$$\kappa_g(s = const, t) = \tfrac{d}{ds}G/G(s,t) = 1/2 \cdot (\tfrac{d}{ds}G^2)/G^2(s,t).$$

Außerdem können wir inzwischen das Einheitsnormalenfeld $e_1 := \frac{d}{ds}C(s,t)$ kovariant differenzieren. Wegen $|e_1|_g = 1$ finden wir (wegen $[e_1, e_2] = 0$):
$D_{e_2}e_1 = \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}C(s,t) = g(D_{e_2}e_1, e_2)/g(e_2,e_2)\cdot e_2 = 1/2\cdot(\frac{d}{ds}g(e_2,e_2))/g(e_2,e_2)\cdot e_2 = \kappa_g \cdot e_2$.
*Auch im Riemannschen Fall hat die Kurvenkrümmung also dieselbe Doppelinterpretation: Kippgeschwindigkeit des Normalenfeldes einerseits und Längenänderung in Parallelkurvenscharen andererseits.*

Wie angekündigt differenzieren wir dies Resultat noch einmal, berücksichtigen die schon wiederholt wichtige Symmetrie $[e_1, e_2] = D_{e_1}e_2 - D_{e_2}e_1 = \frac{D}{ds}\frac{d}{dt}C(s,t) - \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}C(s,t) = 0$ und bringen wegen $D_{e_1}e_1 = 0$, also auch $D_{e_2}(D_{e_1}e_1) = 0$, den Krümmungstensor ins Spiel:

$$\begin{aligned} D_{e_1}(D_{e_2}e_1) &= (\frac{d}{ds}\kappa_g(s,t)) \cdot e_2 + \kappa_g \cdot D_{e_2}e_1 = (\kappa_g' + \kappa_g^2)\cdot e_2 \\ R(e_1,e_2)e_1 &= D^2_{e_1,e_2}e_1 - D^2_{e_2,e_1}e_1 = D_{e_1}(D_{e_2}e_1) - D_{e_2}(D_{e_1}e_1) \\ \kappa_g' &= -\kappa_g^2 - g(R(e_1,e_2)e_2, e_1)/g(e_2,e_2) \end{aligned}$$

*Dies ist eine Riccatische Differentialgleichung, über die der Krümmungstensor die Veränderung der geodätischen Krümmung in Parallelkurvenscharen kontrolliert.*
Beispiele. Konzentrische Kreise in $\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$: Im ersten Fall ist die Krümmung als Funktion des Radius $\kappa(r) = 1/r$ und $\kappa' = -\kappa^2$, also (wie wir auch schon wegen des Satzes von

Schwarz wissen) $g(R(e_1,e_2)e_2,e_1)=0$. Im zweiten Fall ist die geodätische Krümmung als Funktion des Radius $\kappa_g(r)=\cos r/\sin r$ und $\kappa_g'=-\kappa_g^2+1$, also $g(R(e_1,e_2)e_2,e_1)=1$. Die Sphäre hat also auch in diesem Sinne Krümmung $=1$, außerdem ist dies unser erstes explizites Beispiel mit $R\neq 0$.

*Zusatz zur Vorlesung.* Man kann dieselbe Rechnung auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ vor der Kenntnis des Krümmungstensors machen; das Ergebnis unterscheidet sich in überraschender Weise. Ausgangspunkt sind die Definitionen der geodätischen Krümmung und der Weingartenabbildung, wir differenzieren nach $s$ und betrachten nur die Tangentialkomponente:

$$\kappa_g(t;s=const)\cdot\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)\right)^{tang}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)+g(Se_2,e_1)\cdot(N\circ F).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\kappa_g\cdot\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)+\kappa_g\cdot\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)\right)^{tang}&=(\frac{\partial}{\partial s}\kappa_g+\kappa_g^2)\cdot\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)+g(Se_2,e_1)\cdot(N\circ F))\right)^{tang}\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}F(s,t))\right)^{tang}+g(Se_2,e_1)\cdot\frac{\partial}{\partial s}(N\circ F)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}(-g(Se_1,e_1)\cdot(N\circ F))\right)^{tang}+g(Se_2,e_1)\cdot TF\cdot Se_1\end{aligned}$$

Skalarmultiplikation mit $TF\cdot e_2=\frac{\partial}{\partial t}F$ und Division durch $|e_2|_g^2=|\frac{\partial}{\partial t}F|^2$ ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial s}\kappa_g+\kappa_g^2=\left(-g(Se_1,e_1)g(Se_2,e_2)+g(Se_2,e_1)^2\right)/g(e_2,e_2)=-\det S.$$

**Zusätzlich zu den Codazzi Gleichungen $(D_X)Y=(D_YS)X$ ist damit ein weiterer Zusammenhang zwischen Metrik $g$ und (Weingarten-) Krümmung $S$ gefunden, da die linke Seite ja nur von der Metrik abhängt. Mit der vorhergehenden Rechnung zusammen ergibt das das Theorema Egregium von Gauß:**

$$g(R(e_1,e_2)e_2,e_1)/g(e_2,e_2)=-\det S.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir für Hyperflächen, indem wir die Flächengleichung

$$D^2F(Y,Z)=-g(SY,Z)\cdot(N\circ F)$$

nach den Riemannschen Differentiationsregeln differenzieren, rechts die Produktregel, links die Produktregel für $D^2_{X,Y}-D^2_{Y,X}$

nämlich $(D^2_{X,Y}-D^2_{Y,X})(df(Z))=(D^3_{X,Y,Z}-D^3_{Y,X,Z})f+df(\,(D^2_{X,Y}-D^2_{Y,X})Z\,)$.

Die Normalkomponente verschwindet links, beweist also erneut die Codazzi Gleichungen. Die Tangentialkomponente ist das endgültige **Theorema Egregium**:

$$(D^3_{X,Y,Z}-D^3_{Y,X,Z})F=-TF\cdot R(X,Y)Z=-TF\cdot(g(SY,Z)SX-g(SX,Z)Y).$$

*Ankündigung: Die Gauß- und Codazzi Gleichungen sind* **hinreichende** *Integrierbarkeitsbedingungen für die Hyperflächengleichungen. Werden sie von gegebenen $g, S$ erfüllt, so gibt es parametrisierte Hyperflächenstücke, die die gegebene Metrik $g$ und Krümmung $S$ haben.*

Als Vorbereitung zeigen wir, daß das Verschwinden der Lieklammer von zwei Vektorfeldern $X, Y$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ *hinreichend* für die (lokale) Existenz einer Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to M$ ist mit $\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) = X \circ F(s,t),\ \frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = Y \circ F(s,t)$ ist.
Die Flüsse von $X, Y$ sind definiert durch

$\frac{d}{ds}f(s;p) = X \circ f(s;p),\ f(0;p) = p$ und $\frac{d}{dt}g(t;p) = Y \circ g(t;p),\ g(0;p) = p.$

Daher gilt notwendig: $F(s,t) := g(t, f(s;p))$. Wir hatten am 31.1. gesehen, wie daraus die Integrierbarkeitsbedingung $[X,Y] = 0$ folgt. Um zu zeigen, daß das so definierte $F$, bei *vorausgesetzter* Integrierbarkeitsbedingung, unser Problem löst, müssen wir beweisen

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) = X \circ F(s,t),$$

denn $\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = Y \circ F(s,t)$ gilt schon nach Definition von $F$, und für $t = 0$ gilt auch schon die Behauptung, aus $F(s,0) = g(0, f(s;p)) = f(s;p)$ folgt $\frac{\partial}{\partial s}F(s,0) = X \circ F(s,0)$. Es gnügt daher zu zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial s}F$ und $X \circ F$ dieselbe (sogar lineare) Differentialgleichnung erfüllen – da die Anfangsdaten bei $t = 0$ übereinstimmen, liefert der Eindeutigkeitssatz die Behauptung.
Wir differenzieren $\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = Y \circ F(s,t)$ nach $s$ und erhalten mit dem Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}(Y \circ F(s,t)) = TY \cdot \frac{\partial}{\partial s}F(s,t),$$

also eine lineare Differentialgleichung für $\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)$. Andererseits können wir in der Integrierbarkeitsbedingung den Term $(T_Y X) \circ F$ als Ableitung nach $t$ interpretieren, weil $Y \circ F = \frac{\partial}{\partial t}F$ ist. Wir erhalten damit *dieselbe* Differentialgleichung für $X \circ F$:

$$0 = [X,Y] \circ F \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}(X \circ F) = (T_Y X) \circ F = (T_X Y) \circ F = TY \cdot (X \circ F).$$

Die Hyperflächengleichung wird mit derselben Strategie gelöst werden: Sind auf einem Ball $B$ Metrik und Krümmung $g, S$ gegeben, so können wir bereits aus der *vorausgesetzten* Existenz einer Hyperfläche $F : B \to \mathbb{R}^{d+1}$ die $F$-Bilder der Radien von $B$ als Raumkurven *durch Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen* konstruieren. Diese Raumkurven setzen sich wegen der differenzierbaren Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Parametern (speziell Anfangswerten) *zu einer glatten Hyperfläche in* $\mathbb{R}^{d+1}$ zusammen. Zu zeigen bleibt, daß diese Hyperfläche in der Tat die gegebene Metrik $g$ und

Krümmung $S$ hat, *falls die Gauß- und Codazzi Gleichungen erfüllt sind.* Auch das wird mit dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen erledigt.

## 12. Linearisierung von Differentialgleichungen

Daher habe ich in der letzten Vorlesung den einfachen Satz über Lipschitz-stetige Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Parametern (bei natürlichen Voraussetzungen) wiederholt und den Satz über differenzierbare Abhängigkeit von Parametern bewiesen, weil die Hörer ihn nicht kannten. Ich schreibe ihn hier nicht auf, weil Herr Hildebrandt mir den Beweis im Manuskript zu seiner Vorlesung gezeigt hat.

Ich halte nur fest: Ist $t \mapsto f(t;\lambda)$ Integralkurve des zeitabhängigen Vektorfeldes $X(p,t;\lambda)$ und ist $X$ in allen Variablen stetig differenzierbar, so hängen die Lösungen $f$ *differenzierbar* von $\lambda$ ab. Die Ableitung $v := \frac{\partial}{\partial\lambda} f$ wird dabei interpretiert als Vektorfeld $t \mapsto v(t)$ längs der Integralkurve $t \mapsto f(t;\lambda)$; und diese Ableitung approximiert die Differenz von Lösungskurven:

$$f(t;\lambda) - f(t;\lambda_0) \sim v(t)\cdot(\lambda-\lambda_0).$$

Außerdem ist $v$ bestimmt als Lösung der gewöhnlichen *linearen* inhomogenen Differentialgleichung, die man durch Differenzieren von $\dot f(t;\lambda) = X(f(t;\lambda),\ t;\lambda)$ (unter Benutzung des Satzes von Schwarz) erhält (Bezeichnung: $T_1X$ ist die partielle Ableitung nach der ersten Variablen $p$ von $X$ und $T_3X$ ist die partielle Ableitung nach der dritten Variablen $\lambda$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t;\lambda)|_{\lambda_0} = \dot v(t) = T_1X|_{f(t;\lambda_0),t;\lambda_0}\cdot v(t) + T_3X|_{f(t;\lambda_0),t;\lambda_0}\cdot 1$$

*Anwendung auf die Differentialgleichung der Geodätischen.* Der vorhergehende Satz ist anwendbar, falls die Christoffelabbildung $\Gamma$ stetig ist (also falls die Metrik $g$ zweimal stetig differenzierbar ist). Es sei also eine Schar von Geodätischen,

$$s \mapsto c(s;\lambda),\quad \frac{D}{ds}\frac{d}{ds}c(s;\lambda) = 0,$$

gegeben. Wir wissen bereits, daß $J(s) := \frac{\partial}{\partial\lambda}c(s;\lambda)|_{\lambda_0}$ eine lineare Differentialgleichung erfüllt; wie lautet sie? Für die folgende Rechnung erinnere ich an die Symmetrie

$$\frac{D}{ds}\frac{d}{d\lambda}c(s;\lambda) = \frac{D}{d\lambda}\frac{d}{ds}c(s;\lambda) \qquad \text{und die Folgerung}$$

$$\frac{D}{ds}\Big(\frac{D}{d\lambda}Z\Big) - \frac{D}{d\lambda}\Big(\frac{D}{ds}Z\Big) = \Big(D^2_{\frac{d}{ds}c,\frac{d}{d\lambda}c} - D^2_{\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{ds}c}\Big)Z = R\Big(\frac{d}{ds}c,\frac{d}{d\lambda}c\Big)Z.$$

Mit $Z := \frac{d}{ds}c$ und der Voraussetzung $\frac{D}{ds}\frac{d}{ds}c(s;\lambda) = 0$ ergibt sich die berühmte

**Jacobische Differentialgleichung** für $J$:

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{ds}J = \frac{D}{ds}\Big(\frac{D}{ds}\frac{d}{d\lambda}c\Big) = \frac{D}{ds}\Big(\frac{D}{d\lambda}\frac{d}{ds}c\Big) - \frac{D}{d\lambda}\Big(\frac{D}{ds}\frac{d}{ds}c\Big) = -R\Big(J,\frac{d}{ds}c\Big)\frac{d}{ds}c.$$

Aussagen über das Verhalten der Geodätischen beruhen auf Sätzen über diese Gleichung.

## 13. Nachträge: Kovariante Ableitungen in der Kurventheorie

Es handelt sich um Anfangsbeispiele zur kovarianten Ableitung, die im folgenden Semester keinen Platz mehr haben, zu denen ich aber nicht mehr gekommen bin. Erstens wird die Kurventheorie im $\mathbb{R}^n$ so erledigt, daß sich die Verallgemeinerung in Riemannsche Mannigfaltigkeiten von selbst versteht; dabei genügen stetige zweite Ableitungen, anders als in der Frenet Theorie. Und zweitens wird die beschriebene Anwendung der Kurventheorie zum Beweis des Hauptsatzes der Hyperflächentheorie wesentlich übersichtlicher als bei unserer ersten Begegnung am 20.12. .

Erstens. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann wählen wir eine ON-Basis aus Vektorfeldern längs $c$: Erstens $e_1(t) := \dot{c}(t)$. $e_2(t), \dots, e_n(t)$ wählen wir als *im Normalenbündel parallele Basis*, indem wir zu orthonormalen Anfangsdaten $\perp \dot{c}(0)$ die Differentialgleichungen

$$\dot{e}_j(t) = -\langle \ddot{c}(t), e_j(t) \rangle \cdot \dot{c}(t)$$

lösen. Wir haben gezeigt, daß die Lösungen senkrecht zu $\dot{c}(t)$ bleiben und außerdem orthonormal (8.11.). In dieser parallelen Basis sind die Funktionen $k_j(t) := \langle \ddot{c}(t), e_j(t) \rangle$ die Komponenten des Beschleunigungsvektors $\ddot{c}(t)$, insbesondere gilt für die früher definierte Kurvenkrümmung $\kappa(t) := |\ddot{c}(t)| = (\sum k_j(t)^2)^{1/2}$. Daher nenne ich, im Unterschied zu den *Frenetkrümmungen von c*, den Vektor $(k_2(t), \dots, k_n(t))$ die *Trägheitskrümmung* der Kurve $c$. – Ist umgekehrt diese Trägheitskrümmung gegeben, so lösen wir (wie am 8.11.) die Differentialgleichung

$$\ddot{c}(t) = \dot{e}_1(t) = +\sum_{j=2}^{n} k_j(t) \cdot e_j(t)$$
$$\dot{e}_j(t) = -k_j(t) \cdot e_1(t)$$

und finden – bis auf Anfangsdaten eindeutig – eine Kurve mit den gegebenen Daten.

Im Riemannschen Fall kann man fast alles wörtlich übernehmen, indem man Ableitungen von Vektorfeldern durch kovariante Ableitungen ersetzt. Nur im letzten Schritt gilt nicht mehr, daß die Differentialgleichung für $e_1, \dots, e_n$ *unabhängig von der Kurve c* gelöst werden kann, weil man lokal für die kovariante Ableitung $\frac{D}{dt} e_j(t)$ die Christoffelabbildung $\Gamma|_{c(t)}$ braucht. Aber man muß nur die Differentialgleichung abändern in

$$\dot{c}(t) = e_1(t)$$
$$\frac{D}{dt} e_1(t) = \dot{e}_1(t) + \Gamma|_{c(t)}(e_1(t), e_1(t)) = +\sum_{j=2}^{n} k_j(t) \cdot e_j(t)$$
$$\dot{e}_j(t) = -\Gamma|_{c(t)}(e_1(t), e_j(t)) - k_j(t) \cdot e_1(t),$$

um den Riemannschen Fall entsprechend behandeln zu können.

Zweitens. Es seien in einem Ball $B \subset \mathbb{R}^d$ Hyperflächendaten $g, S$ gegeben und außerdem eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to B$. Zunächst wird vorausgesetzt, daß eine parametrisierte Fläche $F : B \to \mathbb{R}^{d+1}$ mit Normalenfeld $N : B \to \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ existiert. Als erstes werden durch Lösen von $\frac{D}{dt} e_j(t) = 0, j = 1 \ldots d$ zu $g$-orthonormalen Anfangsdaten $g$-orthonormale Basisfelder $e_j$ längs $\gamma$ gewählt. Dann definiere:

$$c := F \circ \gamma,\ E_j(t) := TF_\gamma \cdot e_j(t),\ E_{d+1}(t) := N(\gamma(t))$$
$$\tau_j(t) := g(e_j(t), \dot\gamma(t)),\ \sigma_j(t) := g(S \cdot \dot\gamma(t), e_j(t)).$$

Die Kurve $c : I \to BR^{d+1}$ kann nun mit den hieraus abgeleiteten Differentialgleichungen rekonstruiert werden (ohne daß in diesem Schritt die Gauß- und Codazzi Gleichungen eine Rolle spielen):

$$\begin{aligned} \dot c(t) &= \sum \tau_j(t) \cdot E_j(t) \\ \dot E_j(t) &= -\sigma_j(t) \cdot E_{d+1}(t), \qquad j = 1 \ldots d \\ \dot E_{d+1}(t) &= TF \cdot S\dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t) \cdot E_j(t). \end{aligned}$$

Der Hilfssatz vom 8.11. ist auch hierfür die Basis. Beachten Sie, wie sehr unser Aufbau durchzogen ist von der Strategie: Herleiten notwendiger Bedingungen, bis diese Bedingungen eindeutige Antworten ergeben UND daran anschließend der Beweis, daß durch diese Antwort das ursprüngliche Problem auch wirklich gelöst wird. Zum Beispiel haben wir auch die Differentialgleichung der Geodätischen als notwendige Eigenschaft dafür, daß eine glatte Kurve lokal Kürzeste ist, hergeleitet, aber wir haben bisher nur in Beispielen bewiesen, daß diese Geodätischen wirklich (zumindest ein Stück weit) *auch Kürzeste sind.*