

# THEMEN: BACHELORARBEITEN SS 2016

ARBEITSGRUPPE D. HUYBRECHTS

Im folgenden findet man die Themenvorschläge für Bachelorarbeiten im SS 2016. Vorausgesetzt wird der Stoff des Seminars ‘Algebraische Geometrie’ im WS 15/16 und der Besuch der Vorlesung ‘Algebraic Geometry I’ (und im SS der Vorlesung ‘Algebraic Geometry II’).

## CONTENTS

1. Motivische Zeta-Funktion (mit Martin Ulirsch)	1
2. Nullteiler im Grothendieck-Ring der Varietäten (mit Stefan Schreieder)	2
3. Die Varietät kommutierender Matrizen und ihr Motiv	3
4. Motivische Integration (mit Martin Ulirsch)	4
5. Fulton’s Spurformel für Varietäten über endlichen Körpern (mit Zhiyuan Li)	4
6. Auflösung von Singularitäten (mit Andrey Soldatenkov)	5
7. Die Nash Abbildung	6
8. Trivialität von Geradenbündeln auf Fasern von Morphismen (Thema von Vlad Lazic)	7
9. Positivität von Geradenbündeln in Familien (mit Ulrike Rieß)	7
10. Zariski Zerlegung (mit Ulrike Rieß)	8
11. Allgemeine Hinweise	10
References	11

## 1. MOTIVISCHE ZETA-FUNKTION (MIT MARTIN ULIRSCH)

Der Grothendieck-Ring der Varietäten  $K_0(\text{Var})$  ist der Quotient der freien abelschen Gruppe aller endlichen formalen Linearkombinationen  $\sum a_i[X_i]$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$ , nach der Relation

$$(1.1) \quad [X] = [U] + [X \setminus U]$$

für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$ . Ein motivisches Maß ist ein Homomorphismus von Ringen  $\mu: K_0(\text{Var}) \rightarrow A$  in einen beliebigen kommutativen Ring  $A$ . In der Arbeit [22] wird für eine solche Abbildung die motivische Zeta-Funktion

$$\zeta_\mu(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S^n(X)) t^n$$

betrachtet. Hierbei bezeichnet  $S^n(X)$  das  $n$ -te symmetrische Produkt, also den Quotienten  $(X \times \dots \times X)/\mathfrak{S}_n$ . In [19] zeigt Kapranov, dass für  $A = k$  einen Körper und  $X$  eine Kurve  $\zeta_\mu(X, t)$  eine rationale Funktion ist, vgl. [27, Sec. 7.3].

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist folgendes Resultat in [22]:

**Theorem** *Es existiert ein Körper  $A = k$ , ein motivisches Maß  $\mu$  und eine Fläche  $X$ , für die  $\zeta_\mu(X, t)$  keine rationale Funktion ist.*

(Tatsächlich ist bereits das Produkt zweier Kurven vom Geschlecht  $g > 1$  ein Gegenbeispiel.) Das technische Herzstück ist [22, Thm. 2.3], welches hier entsprechend [22, Rem. 2.4] durch [5, Thm. 3.1] ersetzt werden soll, in der man eine alternative Beschreibung von  $K_0(\text{Var})$  findet, die statt (1.1) die Relation  $[\text{Bl}_Y(X)] - [E] = [X] - [Y]$  fordert. Hierbei ist  $Y \subset X$  eine glatte abgeschlossene Untervarietät und  $\text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  die Aufblasung von  $X$  in  $Y$  mit exzeptionellem Divisor  $E$ .<sup>1</sup> Abschnitt 3 in [22] benutzt einige Fakten über Hilbertschemata von Flächen. Hier muss man eventuell einige Aussagen einfach ohne Beweis verwenden.

**Weitere Hinweise:** Im Thema 3 wird die universelle Zeta-Funktion  $\sum_{n=1}^{\infty} [S^n(X)](t)$  betrachtet. Falls man aber  $k = \mathbb{F}_q$  betrachtet, ist ein Beispiel eines motivischen Maßes durch  $\mu([X]) = |X(\mathbb{F}_q)|$  gegeben. In diesem Fall erhält man dann die klassische Zeta-Funktion  $Z(X, t)$  (die auch für Flächen rational ist), die Gegenstand von Thema 5 ist. Für einen Beweis dieser Aussage siehe [27, Ch. 2.3]. In [27, Ch. 7.3] findet man auch einen Beweis der Rationalität für Kurven über beliebigen perfekten Körpern. Man siehe auch Thema 2.

## 2. NULLTEILER IM GROTHENDIECK-RING DER VARIETÄTEN (MIT STEFAN SCHREIEDER)

Der Grothendieck-Ring der Varietäten  $K_0(\text{Var})$  ist der Quotient der freien abelschen Gruppe aller endlichen formalen Linearkombinationen  $\sum a_i [X_i]$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$ , nach der Relation

$$[X] = [U] + [X \setminus U]$$

für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$ . Der Ring ist für viele Dinge universell und daher naturgemäß sehr gross. Seine Struktur ist weitgehend unverstanden. Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist die Ausarbeitung der Arbeit [8] und der für ihr Verständnis erforderlichen Grundlagen. Hauptergebnis der Arbeit ist die Aussage, dass  $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1]$  ein Nullteiler in  $K_0(\text{Var})$  ist. Poonen [31] hatte bereits gezeigt, dass  $K_0(\text{Var})$  nicht nullteilerfrei ist, allerdings sind die in [31] konstruierten Nullteiler geometrisch viel komplizierter. In der Bachelorarbeit sollte auch erklärt werden, warum das Hauptergebnis in [8] eine Vermutung von Larsen und Lunts widerlegt, nach der zwei Varietäten  $X$  und  $Y$  mit  $[X] = [Y]$  in  $K_0(\text{Var})$  immer birational sein sollen.

Die Arbeit teilt sich natürlich in zwei Teile, einen abstrakten und einen geometrisch sehr konkreten. Diese sollten parallel erarbeitet werden und mit gleichem Gewicht eingehen.

---

<sup>1</sup>Alle vorkommenden Begriffe werden noch im WS in der Vorlesung erklärt. Das Resultat von Włodarczyk und Abramovich et al soll nur erklärt werden, ohne aber in den Beweis einzusteigen.

1. Der Grothendieck-Ring der Varietäten: Definition, Ringstruktur, einfache Beispiele ( $[\mathbb{P}^n]$ ,  $[\mathrm{Gl}(n)]$ ), Zariski-triviale Bündel. Man formuliere zumindest das Hauptergebnis von [22], welches den Quotienten  $K_0(\mathrm{Var})/(\mathbb{L})$  beschreibt.

2. Die Konstruktion der beiden drei-dimensionalen Varietäten  $X_W$  und  $Y_W$ , der Beweis der Relation  $([X_W] - [Y_W])(\mathbb{L}^2 - 1)(\mathbb{L} - 1)\mathbb{L}^7 = 0$  und  $[X_W] \neq [Y_W]$  in  $K_0(\mathrm{Var})/(\mathbb{L})$ .

**Weitere Hinweise:** Vieles funktioniert über beliebigen Körpern. Man sollte genau herausarbeiten, an welcher Stelle und warum Voraussetzungen der Art  $\mathrm{char}(k) = 0$  oder  $k = \bar{k}$  gemacht werden müssen. Proposition 2.2 sollte im ersten Schritt einfach akzeptiert werden. Im SS werden die meisten für des Verständnis erforderlichen Techniken in der Vorlesung Algebraic Geometry II bereitgestellt. Dieses Thema ist eng am Thema 1.

### 3. DIE VARIETÄT KOMMUTIERENDER MATRIZEN UND IHR MOTIV

Man bezeichnet mit  $C(n)$  die Varietät aller Paare kommutierender  $(n, n)$ -Matrizen, also

$$C(n) := \{(A, B) \mid A, B \in M(n, k), A \cdot B = B \cdot A\}.$$

Hierbei kann  $k$  erst einmal ein beliebiger Körper sein. Für einen endlichen Körper  $k = \mathbb{F}_q$  haben Feit und Fine [14] die Anzahl  $|C(n)|$  berechnet. Aus heutiger Sicht kann ihre Rechnung auch motivisch verstanden werden und Ziel dieser Bachelorarbeit soll es sein den Zugang von Bryan und Morrison zu verstehen, der ‘Potenzstrukturen’ auf dem Grothendieck-Ring der Varietäten benutzt. Das genaue Ergebnis lautet

$$(3.1) \quad [C(n)] = [\mathrm{Gl}(n)] \sum_{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{[\mathrm{End}(b_k(\alpha))]}{[\mathrm{Gl}(b_k(\alpha))]} [\mathbb{L}]^{b_k(\alpha)}$$

in der Lokalisierung  $K_0(\mathrm{Var})[\mathbb{L}^{-1}, (1 - \mathbb{L}^{-b})^{-1}]$  des Grothendieck-Ringes  $K_0(\mathrm{Var})$ . Hierbei läuft  $\alpha$  über alle Partitionen von  $n$  und  $b_k(\alpha)$  ist die Anzahl der Teile der Größe  $k$  in  $\alpha$ .

Wie im Thema 2 besteht der erste Schritt darin,  $K_0(\mathrm{Var})$  zu verstehen. Als zweites müssen Potenzstrukturen eingeführt werden. In [9] wird das kurz wiederholt, Details findet man in [17]. Ganz grob ist die Potenzstruktur durch die Formel (siehe auch Thema 1)

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k \right)^{[X]} = \sum_{n=0}^{\infty} [S^n(X)] t^n$$

gegeben. Als nächstes sollte man sich (3.1) explizit für kleine  $n = 1, 2, 3$  genauer anschauen, bevor man dann Theorem 1 und das dazu äquivalente Theorem 1’ angeht.

Die Bachelorarbeit sollte sich auf die beiden Theorem 1 und 1’ konzentrieren und Theorem 2 unberücksichtigt lassen (und entsprechend gewisse Teile in [9, Sec. 2]). Der kritische Teil ist in [9, Sec. 3]. In [9] wird außer mit  $K_0(\mathrm{Var})$  auch mit  $K_0(\mathrm{Stack})$ , dem Grothendieck-Ring der Stacks, gearbeitet. Die Bachelorarbeit sollte die Stack-Aspekte weitestgehend ignorieren. Der

einzigste Stack, der hier wirklich gebraucht wird, ist der Stack  $\text{Coh}_n(\mathbb{C}^2)$  aller kohärenter Garben der Länge  $n$ , der explizit als  $C(n)/\text{Gl}(n)$  beschrieben wird.

#### 4. MOTIVISCHE INTEGRATION (MIT MARTIN ULIRSCH)

In einem Vortrag im Jahre 1995 führte Maxim Kontsevich den Begriff der motivischen Integration ein. Die Theorie wurde dann vor allem von Denef und Loeser ausgearbeitet [13]. In dieser Bachelorarbeit sollen nun die Grundlagen dieser Theorie an Hand der Arbeit von Craw [10] dargestellt werden. Insbesondere soll die Transformationsformel [10, Thm. 2.18] bewiesen werden und das motivische Integral  $\int_{\mathcal{L}(X)} F_D d\mu$  für eine glatte Varietät  $X$  mit einem Divisor  $D$  mit normalen Überkreuzungen verstanden werden [10, Thm. 1.1]. Hauptziel sollte die Aussage sein, dass

$$[X] = [Y] \text{ in } \hat{\mathcal{M}}$$

für  $K$ -äquivalente glatte projektive Varietäten  $X$  und  $Y$  gilt.

Die zentralen Objekte sind auf der einen Seite der Raum der formalen Schleifen

$$\mathcal{L}(X) = \lim \mathcal{L}_n(X)$$

(ein unendlich dimensionales Schema) mit  $\mathcal{L}_n(X) = \text{Mor}(\text{Spec}(k[x]/x^{n+1}), X)$  und andererseits  $K_0(\text{Var})$  der Grothendieck-Ring der Varietäten bzw. die Komplettierung  $\hat{\mathcal{M}}$  des Ringes  $\mathcal{M} := K_0(\text{Var})[[\mathbb{L}^{-1}]]$  (man vgl. auch die Themen 1, 2 und 3).

Um integrieren zu können, führt man Zylindermengen als ‘meßbare Mengen’ ein und definiert das Maß als

$$\mu: \{ \text{Zylindermengen} \} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}, \quad C = \pi_k^{-1}(B_k) \mapsto [B_k]/\mathbb{L}^{n(k+1)}.$$

Man konzentriere sich auf [10, Sec. 1,2] und [32, Sec. 2-4] und ziehe andere Quellen wie [2, 13, 25] für mehr Details hinzu. In [10] wird mit dem Begriff des kanonischen Bündels operiert, der eventuell erst im SS in der Vorlesung im Detail behandelt wird. Die Formulierung in [32] der Transformationsformel kommt ohne aus.

#### 5. FULTON'S SPURFORMEL FÜR VARIETÄTEN ÜBER ENDLICHEN KÖRPERN (MIT ZHIYUAN LI)

Sei  $X$  eine eigentliche Varietät über einem endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$ ,  $q = p^n$ , und  $|X(\mathbb{F}_q)|$  die Anzahl der Punkte  $x \in X$  mit Restklassenkörper  $\mathbb{F}_q$ . Diese Zahl kann nach Grothendieck mittels étaler Kohomologie (die allerdings nicht Stoff der Vorlesung Algebraische Geometrie I und II ist und für die Arbeit nicht vorausgesetzt wird) durch eine Spurformel

$$|X(\mathbb{F}_q)| = \sum_{i=0}^{2 \dim(X)} (-1)^i \text{tr}(F^* | H_{\text{ét}}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell))$$

berechnet werden. Gegenstand dieser Arbeit soll eine zugänglichere Variante sein, die nur Kohomologiegruppen kohärenter Garben benutzt, aber dafür  $|X(\mathbb{F}_q)|$  auch nur modulo  $p$  bestimmt. Grundlage ist die Arbeit von Fulton [16], in der die folgende Formel bewiesen wird:

$$|X(\mathbb{F}_q)| \bmod p = \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i \operatorname{tr}(F^* | H^i(X, \mathcal{O}_X)).$$

Der Beweis ist im Detail auch in den Notes von Mustașă [27, Ch. 5] ausgeführt, wo man auch einige Anwendungen für supersinguläre Hyperflächen findet.

Die Arbeiten von Deligne [12] und Katz [20] beweisen mehr und zwar ein Analogon der Formel

$$Z(X, t) = \prod_{i=0}^{2 \dim(X)} \det(1 - tF^* | H_{\text{ét}}^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}$$

für die Zeta-Funktion  $Z(X, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|X(\mathbb{F}_{q^k})|}{i} t^i\right)$ .

Die Bachelorarbeit soll sich vor allem auf [16] und [27] stützen. Als Kür schaue man sich den Formalismus der Zeta-Funktion  $Z(X, t)$  an (ohne in étale Kohomologie einzusteigen), siehe z.B. Anhang von [18]. Lässt sich Fulton's Beweis erweitern, so dass auch  $Z(X, t)$  behandelt werden kann? Was geschieht, wenn man statt der Frobenius-Wirkung auf  $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ , die auf  $H^i(X, \Omega_X^j)$  betrachtet? Im Thema 1 findet man einen anderen Zugang zur Zeta-Funktion.

## 6. AUFLÖSUNG VON SINGULARITÄTEN (MIT ANDREY SOLDATENKOV)

Grothendieck schrieb im Jahre 1969: *‘Alongside the problem of resolution of singularities, the proof of the standard conjectures seems to me to be the most urgent task in algebraic geometry.’* Die Standardvermutungen sind bis heute offen, für den Beweis der Existenz von Auflösungen in Charakteristik 0 bekam Hironaka hingegen bereits 1970 die Fields-Medaille. (Allerdings gibt es bis heute nur eine Handvoll von Mathematikern, die Hironakas Beweis auch wirklich bis ins letzte Detail nachvollzogen haben.) In positiver Charakteristik ist das Problem, trotz mehrfacher Versuche, weiterhin offen.

Sei  $X$  eine beliebige projektive Varietät (über einem algebraischen abgeschlossenen Körper). Eine Auflösung von  $X$  ist ein eigentlicher birationaler Morphismus  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , wobei  $\tilde{X}$  glatt ist. Hironaka zeigt sogar, dass man  $\pi$  immer als Folge von Auflösungen mit glattem Zentrum wählen kann.

In den neunziger Jahren entwickelte de Jong eine schwächere Form, die er ‘Alterationen’ nannte. Hierbei ist  $\pi$  dann nicht mehr birational, aber dafür existiert  $\pi$  auch in positiver Charakteristik, vgl. [29]. Die von ihm entwickelten Methoden haben schließlich auch zu einem recht einfachen Beweis der Existenz von  $\pi$  (in Charakteristik null und ohne  $\pi$  als Folge von glatten Aufblasungen zu beschreiben) geführt. Zeitgleich wurden Beweise von Abramovich–de

Jong und Bogomolov–Pantev publiziert. In dieser Bachelorarbeit soll es um eine Ausarbeitung von [7] bzw. der detaillierteren Version [30] gehen. Das Hauptergebnis kann man wie folgt formulieren:

**Theorem** *Sei  $X$  eine projektive Varietät und  $Z \subset X$  eine abgeschlossene Untervarietät. Dann existiert  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  birational mit  $\tilde{X}$  glatt, so dass  $\pi^{-1}Z$  ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist.*

Im ersten Schritt sollte man sich im Detail mit dem Konzept von Aufblasungen vertraut machen, die auch noch in der Vorlesung behandelt werden. Desweiteren werden Begriffe wie projektive Bündel, Divisoren mit normal Überkreuzungen wichtig sein. Die im Kapitel 3 in [30] behandelten torischen Singularitäten können eventuell nur skizzenhaft behandelt werden.

## 7. DIE NASH ABBILDUNG

John Nash versuchte bereits in den 60er Jahren eine Verbindung herzustellen zwischen dem Raum der formalen Schleifen (vgl. Thema 4)  $\mathcal{L}(X)$  und der Frage nach der Auflösung von  $X$ . Insbesondere definierte er die Nash-Abbildung

$$N: \{ \text{irred. Komponenten von } \pi^{-1}(X_{\text{sing}}) \} \rightarrow \{ \text{wesentliche exzeptionelle Divisoren von } X \}.$$

Hierbei ist  $\pi: \mathcal{L}(X) \rightarrow X$  die Projektion und  $X_{\text{sing}} \subset X$  der singuläre Ort von  $X$ . Auf der rechten Seite steht die Menge aller exzeptionellen Divisoren einer Auflösung  $\tilde{X} \rightarrow X$  (deren Existenz vorausgesetzt wird, siehe Thema 6), die beim Übergang zu einer alternativen Auflösung ‘überleben’.

Nash zeigte, dass diese Abbildung immer injektiv ist, und vermutet auch ihre Surjektivität. Die Vermutung wurde unlängst in Dimension zwei bewiesen [6], aber ist in höheren Dimensionen falsch.

Gegenstand dieser Bachelorarbeit sollen Teile der Arbeit von Ishii und Kollár [21] sein. Genauer soll die Nash-Abbildung definiert und ihre Injektivität gezeigt werden [21, Sec. 2]. Dazu müssen die Begriffe wie wesentliche exzeptionelle Divisoren erarbeitet werden. Für eine Reihe von Fakten muss man in die Literatur gehen (z.B. für die Aussage, dass Auflösungen von faktoriellen Singularitäten nur divisorielle Komponenten haben oder für die Komplettierung von Schemata).

Desweiteren soll eines der existierenden Gegenbeispiele zum Nash-Problem beschrieben werden. Entweder das vier-dimensionale in [21, Sec. 4] oder eines der drei-dimensionalen in [11].

Die positiven Resultate zu torischen Singularitäten in [21, Sec. 3] sind nicht Gegenstand der Arbeit. Die Beispiele 2.4, 2.5 und 2.6 sollten allerdings behandelt werden.

## 8. TRIVIALITÄT VON GERADENBÜNDELN AUF FASERN VON MORPHISMEN (THEMA VON VLAD LAZIC)

Für einen flachen projektiven Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von Varietäten gilt das sogenannte ‘see-saw principle’. Dies ist die Aussage, dass ein Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(X)$  genau dann von der Gestalt  $f^*M$  für ein  $M \in \text{Pic}(Y)$  ist, falls  $L_y := L|_{X_y} \simeq \mathcal{O}_{X_y}$  für alle Fasern  $X_y$  gilt. Man siehe z.B. [18, Exer. III.12.4].<sup>2</sup>

Man kann nun versuchen, Voraussetzung und Behauptung abzuschwächen. Statt Trivialität bzw. Isomorphie von Geradenbündeln setzt man nun nur noch die entsprechenden ‘numerischen’ Varianten voraus. Ein Geradenbündel  $L$  auf  $X$  (oder  $X_y$ ) heißt dabei numerisch trivial, falls die Schnittzahl<sup>3</sup>  $(L.C) = \deg(L|_C)$  für jede Kurve  $C$  trivial ist. Die entsprechende Aussage wird dann allerdings falsch [24, Exa. 4.1]. In dieser Bachelorarbeit soll die Arbeit [24] studiert werden. In dieser zeigt Lehmann, dass unter der zusätzlichen Voraussetzung  $L$  ‘pseudo-effektiv’ die Aussage gilt.

In einem ersten Schritt müssen die grundlegenden Definitionen bereitgestellt werden, insbesondere Begriffe wie  $\mathbb{R}$ -Divisoren und pseudo-effektiver Kegel, siehe [23, Ch. 2.2]. Desweiteren müssen Schnittzahlen  $(L.C)$  wie oben, aber auch  $(L_1.L_2)$  von zwei Geradenbündeln  $L_i$  auf einer Fläche (ohne Beweise) erklärt werden [18, Ch. V.1]. Danach soll das Theorem im Fall von Flächen bewiesen werden [24, Cor. 2.5], wofür man die Zariski Zerlegung benutzt ([24, Thm. 2.2], siehe auch Thema 10). Der Beweis des Hauptresultates ist im Kapitel 4 von [24] zu finden. Hierbei sollte man das Lemma 3.3 in einem ersten Schritt einfach voraussetzen. Danach sollte man sich Kapitel 3 erarbeiten, wobei man in einem ersten Anlauf die Glattheit aller Varietäten voraussetzen kann.

**Weitere Hinweise:** Die Arbeit [24] enthält auch Resultate zum Fall, dass  $L$  nur auf der generischen Faser numerisch trivial ist. Das Ergebnis benutzt hierbei die Nakayama–Zariski Zerlegung [28, Ch. III], ein höher-dimensionales Analogon der Zariski Zerlegung für Flächen. Diesen Teil sollte man als Kür ansehen.

## 9. POSITIVITÄT VON GERADENBÜNDELN IN FAMILIEN (MIT ULRIKE RIESS)

Sei  $f: X \rightarrow S$  ein projektiver Morphismus Noetherscher Schemata und  $L$  eine Geradenbündel auf  $X$ . Es ist ein klassisches Resultat der algebraischen Geometrie, dass die Menge

$$S_{\text{amp}} := \{s \in S \mid L|_{X_s} \text{ ample} \}$$

offen in  $S$  ist. Für einen vollständigen Beweis siehe [23, Thm. 1.2.17]. Was passiert nun, wenn man statt ‘ample’ die schwächere Positivitätsaussage ‘nef’ betrachtet? Ein Geradenbündel auf

---

<sup>2</sup>Der Begriff der Flachheit wird zum Beginn der Vorlesung im SS behandelt werden.

<sup>3</sup> die hoffentlich noch im WS in der Vorlesung behandelt wird

einer projektiven Varietät  $Y$  heißt dabei nef, falls für alle Kurven  $C \subset Y$  die Schnittzahl  $(L.C) \geq 0$  erfüllt.<sup>4</sup> Man vergleiche auch die Themen 8 und 10.

Dieses Problem wird von Moriwaki in [26] behandelt und die Bachelorarbeit soll diesen Artikel komplett darstellen. Das Ergebnis lautet:

**Theorem** *Die Menge*

$$S_{\text{nef}} := \{s \in S \mid L|_{X_s} \text{ nef}\}$$

*ist genau dann offen, falls  $\{\sigma(X_s, L_s, H_s)\}$  eine beschränkte Menge ist.*

Hierbei ist  $\sigma(X_s, L_s, H_s)$  das Minimum aller  $(H_s.C)$  für alle Kurven  $C \subset X_s$  mit  $(L_s.C) < 0$ , wobei  $H$  ein beliebiges relativ amples Geradenbündel ist. Das Komplement der Menge  $S_{\text{nef}}$  ist immer eine abzählbarer Vereinigung abgeschlossener Mengen. Den Beweis hiervon findet man in [23, Ch. 1.4], für den man sich auch einige allgemeine Aussagen zu amples und nef Geradenbündeln anlesen sollte. Kleiman's Kriterium [23, Thm. 1.4.9] und die Beschreibung des Nef Kegels [23, Thm. 1.4.23] sollten zumindest formuliert werden und das Kurven-Kriterium für ample [23, Thm. 1.4.29] daraus hergeleitet werden.

Die Arbeit [26] beschreibt auch Fälle für die die Offenheit immer gilt, vor allem für Familien von Flächen. Hierzu werden einige Begriffe aus der Flächentheorie benötigt. Das Gegenbeispiel [26, Exa. 7] verwendet semistabile Vektorbündel auf Kurven. Die Details sind als Kür zu verstehen. Sind eventuell Gegenbeispiele, für die  $f: X \rightarrow S$  nicht flach ist, leichter zu konstruieren?

## 10. ZARISKI ZERLEGUNG (MIT ULRIKE RIESS)

Sei  $X$  eine glatte Fläche und  $D$  ein (pseudo-)effektiver Divisor auf  $X$ . Die Zariski Zerlegung von  $D$  hat die Gestalt  $D = P + N$ , wobei  $P$  nef ist (also  $(P.C) \geq 0$  für alle Kurven  $C$ ) und  $N$  ist effektiv mit  $(P.N) = 0$ . Allerdings sind  $P$  und  $N$  hierbei nur  $\mathbb{Q}$ -Divisoren, d.h. lineare Kombinationen von Divisoren mit rationalen Koeffizienten. Also z.B.  $P = \sum (p_i/q_i)[P_i]$ .

In der Arbeit [BPS] wird die Frage studiert, ob die Nenner  $q_i$  von  $P$  beschränkt werden können. Genauer: Für welche Flächen existiert eine Konstante  $d(X)$ , so dass für die Zariski Zerlegung jedes Divisors  $D$  wie oben ein  $d \leq d(X)$  mit  $dP$  ganzzahlig existiert.

Das etwas überraschende Ergebnis der Arbeit [BPS] zeigt nun:

**Theorem** *Ein solches  $d(X)$  existiert genau dann, wenn die Selbstschnittzahlen  $(C.C)$  integraler Kurven  $C \subset X$  nicht beliebig negativ werden können. Tatsächlich wird vermutet, dass diese Aussage für alle Flächen gilt (bounded negativity conjecture).*

Wie im Thema 8 muss man sich in einem ersten Schritt die notwendigen Techniken erarbeiten, vor allem Schnittzahlen  $(C_1.C_2)$ ,  $(L_1.L_2)$  und das Hodge Index Theorem [Ha, Ch. V.1]. Die Begriffe sollten erklärt, für Beweise aber auf die Literatur verwiesen werden. Die Zariski Zerlegung (siehe auch Thema 8) sollte man sich anhand von [Bad] erarbeiten, die dort allerdings

<sup>4</sup>Der Begriff der Schnittzahl wird hoffentlich noch im WS in der Vorlesung eingeführt.



nur für effektive Divisoren behandelt wird. Als Kür kann man sich die Verallgemeinerung von Fujita für pseudo-effektive Divisoren anschauen [Fuj]. Der eigentliche Beweis in [BPS] ist relativ elementar und kann entsprechend im Detail ausgeführt werden. Die Beispiele, insbesondere die Gegenbeispiele in positiver Charakteristik, sollten ebenfalls (vollständig) behandelt werden.

## 11. ALLGEMEINE HINWEISE

**Literatur** Die in den Themenbeschreibungen angegebene Literatur bildet die Grundlage der jeweiligen Bachelorarbeit. Fühlen Sie sich ermutigt, weitere Quellen zu erschließen. Die Literaturrecherche ist Teil einer jeden wissenschaftlichen Arbeit. Greifen Sie insbesondere auf den Preprintserver <http://arxiv.org> und die online Version der Mathematical reviews <http://ams.math.uni-bielefeld.de/mathscinet/search.html> zurück.

**Themenvergabe** Die Themen werden am 21.1.2016 vorgestellt. Bis zum 1.2. sollten Sie mir Ihr Lieblingsthema (und zwei weitere Themen, falls gewisse Themen mehr Zuspruch finden sollten als andere) per email schicken. Nach dem Seminar am 4.2. findet dann die endgültige Themenvergabe und die offizielle Anmeldung der Arbeit. Bitte bringen Sie das entsprechende Formular mit.

**Vorträge** Im Bachelorbegleitseminar werden Sie insgesamt dreimal vortragen, jeweils 30-40 min. Im ersten sollten Sie das Thema der Arbeit vorstellen, d.h. die wesentlichen Definitionen und Konstruktionen einführen und das Hauptergebnis formulieren. Im zweiten Vortrag sollten Sie einen Schlüsselbeweis der Arbeit vorführen. Der letzte Vortrag ist dann gleichzeitig die Verteidigung der Bachelorarbeit und sollte sowohl einen Überblick über die logische Struktur der gesamten Arbeit geben, als auch ein besonders interessantes technisches Detail vorstellen.

**Arbeit** Sie können die Arbeit in Deutsch oder Englisch schreiben. Da die meisten Quellen in Englisch sind, wird die Ausarbeitung in Englisch empfohlen. Für die offiziellen Vorgaben zur Bachelorarbeit siehe:

[https://www.mathematics.uni-bonn.de/files/bachelor/ba\\_pruefungsordnung\\_2007.pdf](https://www.mathematics.uni-bonn.de/files/bachelor/ba_pruefungsordnung_2007.pdf)

Die Seitenangabe von 5-50 Seiten dort, wird als ca. 30 Seiten interpretiert. Ich bin bereit bis zu drei Vorabversionen Korrektur zu lesen. Konkret heißt das: Zum Beginn des SS, spätestens bis zum 28.4.2016 sollte jeder mindestens 5 Seiten getext haben (z.B. mit der Formulierung des Hauptergebnisses oder einem Einführungskapitel, einer Literaturangabe). Sie bekommen somit frühzeitig Rückmeldung zu prinzipiellen Fragen des mathematischen Schreibens. Vier Wochen später (z.B. nach der Pfingstwoche, aber spätestens Anfang Juni) sollten Sie eine Version vorlegen, in der bereits ein Schlüsselbeweis ausgeführt wird. Die dritte Version sollte (aus Ihrer Sicht) der endgültige Version bereits sehr nahe kommen und im wesentlichen vollständig sein. Diese sollten Sie drei Wochen vor der eigentlichen Abgabe bei mir einreichen, so dass genügend Zeit bleiben sollte, weitere Korrekturen vor der endgültigen Abgabe einzuarbeiten.

**Betreuung** Die Betreuung der Arbeiten wird von der gesamten Arbeitsgruppe übernommen. Für jedes Thema wird ein spezieller Ansprechpartner bereit stehen, den Sie regelmäßig, z.B. alle zwei Wochen, sehen sollten. Unabhängig davon, werde ich in größeren Abständen

Konsultationen für alle anbieten bzw. nach den Seminaren für weitere Fragen zur Verfügungen stehen.

## REFERENCES

- [1] L. Badescu *Algebraic Surfaces*. Universitext, Springer-Verlag New York-Berlin. 2001.
- [2] V. Batyrev *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*. In *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)* (1998), 1–32.
- [3] T. Bauer, B. Harbourne, A. Knutsen, A. Küronya, S. Müller-Stach, X. Roulleau, T. Szemberg *Negative curves on algebraic surfaces*. *Duke Math. J.* 162 (2013), 1877–1894.
- [4] T. Bauer, P. Pokora, D. Schmitz *On the boundedness of the denominators in the Zariski decomposition on surfaces*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. DOI: 10.1515/crelle-2015-0058, (2015).
- [5] F. Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*. *Compos. Math.* 140 (2004), 1011–1032.
- [6] J. Fernández de Bobadilla, M. Pereira *The Nash problem for surfaces*. *Ann. Math. (2)* 176 (2012), 2003–2029.
- [7] F. Bogomolov, T. Pantev *Weak Hironaka theorem*. *Math. Res. Lett.* 3 (1996), no. 3, 299–307.
- [8] L. Borisov *Class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring*. <http://arxiv.org/pdf/1412.6194.pdf>
- [9] J. Bryan, A. Morrison *Motivic classes of commuting varieties via power structures*. *J. Alg. Geom.* 24 (2015), no. 1, 183–199.
- [10] A. Craw *An introduction to motivic integration*. *Strings and geometry*, 203–225, Clay Math. Proc., 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [11] de Fernex, T. *Three-dimensional counter-examples to the Nash problem*. *Compos. Math.* 149 (2013), 1519–1534.
- [12] P. Deligne *Fonctions  $L$  modulo  $\ell^n$  et modulo  $p$* . in *Cohomologie Étale (SGA 4 1/2)*, Lecture Notes in Mathematics 569, 110–128, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [13] J. Denef, F. Loeser *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*. *Invent. Math.* 135, (1999), 201–232.
- [14] W. Feit and N. Fine *Pairs of commuting matrices over a finite field*. *Duke Math. J.* 27 (1960), 91–94.
- [15] T. Fujita *On Zariski problem* *Proc. Japan Acad.* 5, Ser. A (1979), 106–110.
- [16] W. Fulton *A fixed point formula for varieties over finite fields*. *Math. Scand.* 42 (1978), 189–196.
- [17] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernandez *A power structure over the Grothendieck ring of varieties*. *Math. Res. Lett.* 11 (2004), no. 1, 49–57.
- [18] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*. volume 52 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] M. Kapranov *The elliptic curve in the  $S$ -duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups*. arXiv: math.AG/0001005.
- [20] N. Katz *Une formule de congruence pour la fonction  $\zeta$* . Exposé XXII, in *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7 II)* Lecture Notes in Mathematics 340, 401–438, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [21] S. Ishii, J. Kollár *The Nash problem on arc families of singularities*. *Duke Math. J.* 120 (2003), 601–620.
- [22] M. Larsen, V. Lunts, *Motivic measures and stable birational geometry*. *Mosc. Math. J.* 3 (2003), 85–95.

- [23] R. Lazarsfeld *Positivity in algebraic geometry I*. volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [24] B. Lehmann *Numerical triviality and pullbacks*. *J. Pure Appl. Algebra*, 219 (2015), no. 12, pp. 5637–5649.
- [25] E. Looijenga *Motivic measures*. *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1999/2000. Astérisque No. 276 (2002), 267–297.
- [26] A. Moriwaki *A criterion of openness of a family of nef line bundles*. *Manuscripta Math.* 75 (1992), 327–331.
- [27] M. Mustață *Zeta functions in algebraic geometry*. [http://www.math.lsa.umich.edu/~mmustata/zeta\\_book.pdf](http://www.math.lsa.umich.edu/~mmustata/zeta_book.pdf).
- [28] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*. *MSJ Memoirs*, vol. 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [29] F. Oort *Alterations can remove singularities*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 35 (1998), 319–331.
- [30] K. Paranjape *The Bogomolov–Pantev resolution, an expository account*. *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, 347–358, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [31] B. Poonen *The Grothendieck ring of varieties is not a domain*. *Math. Res. Lett.* 9 (2002), no. 4, 493–497.
- [32] W. Veys *Arc spaces, motivic integration and stringy invariants*. *Singularity theory and its applications*, 529–572, *Adv. Stud. Pure Math.*, 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.