Die Werte der Riemannschen ζ-Funktion an ganzen Argumenten

G. Harder

Vortrag Erlangen, den 08.07.97

Die Riemannsche ζ-Funktion ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{für} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Setzt man $\xi(s) = \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}} \cdot \zeta(s)$, so besitzt diese Funktion und damit auch die ζ-Funktion eine meromorphe Fortsetzung in die ganze s-Ebene, und es gilt

$$\xi(1-s) = \xi(s) \qquad \text{für alle} \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Euler hat gezeigt:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\ ,\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\ , \cdots,$$

und er hat auch entdeckt, daß

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}\ ,\ \zeta(-3) = \frac{1}{120} \cdots \zeta(-15) = \frac{3617}{8160}\ ,\ \cdots.$$

Für die ungeraden positiven Argumente gibt es keine derartig einfachen Formeln. Für die geraden negativen Argumente $-2n$ gilt $\zeta(-2n) = 0$ aber man interessiert sich dann für $\zeta'(-2n)$, diese Zahl ist $\neq 0$.

Es gibt schon einige klassische Resultate:

Minkowski:

$$\mathrm{vol}((SL_n(\mathbb{Z}))\backslash SL_n(\mathbb{R})) = \pi^{\cdots}\zeta(2)\cdots\zeta(n).$$

Hermite: Für einen imaginär quadratischen Körper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ gilt

$$\mathrm{vol}(SL_2(\mathcal{O}_d)\backslash SL_2(\mathbb{C})) = \pi^{\cdots}\sqrt{d}\cdots\zeta_F(2).$$

Hier muß man eine Volumenform sorgfältig wählen. Sie wird aus einer $\mathbb{Z}$ beziehungsweise $\mathcal{O}_d$-Struktur auf der Lie-Algebra gewonnen.

Ein neueres Resultat ist der Satz von Borel, der die Zetawerte als Werte von Kohomologieklassen auf gewissen Zyklen in der Homologie arithmetischer Gruppen interpretiert.

Ich möchte nun versuchen, eine Idee davon zu vermitteln, wie man nach Ideen von Beilinson, Deligne und Scholl eine Interpretation der Werte der ζ-Funktion an ganzen Argumenten bekommen kann.

Ganz grob gesagt gehen wir wie folgt vor. Wir erarbeiten uns an Hand von Beispielen eine Idee davon was ein gemischtes Motiv ist. Gemischte Motive bekommt man aus algebraisch geometrischen Konstruktionen. So werden wir zum Beispiel nachher Konfigurationen der folgenden Art betrachten: In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ betrachten wir ein geordnetes Paar von Dreiecken. Aus einer solchen Konfiguration gewinnt man dann gemischte Motive. Diesen gemischten Motiven kann man auf verschiedenen Wegen Kohomologiegruppen zuordnen. Aus dem Vergleich dieser Kohomologiegruppen gewinnt man Zahlen, die dann für spezielle gemischte Motive bis auf einen rationalen Faktor durch den Wert der Zetafunktion an einem ganz bestimmten Argument gegeben sind.

I Gemischte und reine Motive:

Ia) Beispiele für reine Tate Motive: Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Das soll fürs erste nur heißen, daß ich für jeden kommutativen Ring R mit Einselement die projektive Gerade $\mathbb{P}^1(R)$ habe, für den Fall, daß R ein Körper ist, ist dies einfach $\mathbb{P}^1(R) = R \cup \{\infty\}$.

Die zweite Kohomologie dieser projektiven Geraden ist ein reines Tate Motiv vom Gewicht 2, wir schreiben

$$H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(-1)$$

und ich will jetzt gleich erläutern, was ich damit meine.

Man kann diesem $\mathbb{P}^1/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ verschiedene Kohomologiegruppen zuordnen, die Kollektion dieser Kohomologiegruppen zusammen mit den Vergleichsisomorphismen, das ist $\mathbb{Z}(-1)$.

Zunächst haben wir die Betti-Kohomologie. Dazu betrachten wir die komplexe Mannigfaltigkeit der $\mathbb{C}$-wertigen Punkte $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, das ist bekanntlich die Riemannsche Zahlenkugel. Wir setzen

$$H^2_B(\mathbb{P}^1) = H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot 1_B.$$

Wir haben in der Tat ein kanonisches erzeugendes Element, weil $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ orientiert ist.

Die komplexe Konjugation induziert eine Involution auf der reellen Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und somit eine Involution F_∞ auf $H^2_B(\mathbb{P}^1)$ mit $F_\infty 1_B = (-1)^1 \cdot 1_B$.

Wir können diese Kohmologiegruppen auch mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Folge berechnen. Seien U_0, bzw. U_∞ die affinen Geraden $\mathbb{P}^1 \backslash \{0\}$, bzw. $\mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}$. Wir schreiben $U_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]), U_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[u])$ wobei $xu = 1$. Dann haben wir die Überdeckung

$$\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_\infty \quad U_0 \cap U_\infty = G_m = \mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}.$$

Wir betrachten dies als eine angeordnete Überdeckung: Es ist $0 < \infty$. Das liefert uns

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0(\mathbb{C}) \cup U_\infty(\mathbb{C}) \quad U_0(\mathbb{C}) \cap U_\infty(\mathbb{C}) = G_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

Die Orientierung auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist nun nach Konvention so gewählt, daß das geordnete Paar von Tangentialvektoren im Nullpunkt $\{1, i\}$ eine positiv orientierte Basis bildet. Die Mayer-Vietoris-Folge liefert uns einen Isomorphismus

$$\delta : H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

wobei zweierlei zu beachten ist:

1) *Dieser Isomorphismus hängt von der Wahl der Anordnung er überdeckenden Mengen ab.*
2) *für unsere gewählte Anordnung repräsentiert die Differentialform* $\frac{1}{2\pi i} \frac{dx}{x}$ *ein erzeugendes Element von* $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$*, das unter* δ *auf* 1_B *abgebildet wird.*

In die Definition der Betti-Kohomologie geht das Konzept der Stetigkeit ein.

Als zweite Kohomologietheorie definieren wir die sogenannte de-Rham-Kohomologie. Sie ist als die Hyperkohomologie des Komplexes kohärenter Garben

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \Omega^1_{\mathbb{P}^1} \to 0$$

definiert. Nach Definition bekommen wir diese Hyperkohomologie, indem wir den obigen Komplex azyklisch auflösen, dann den Doppelkomplex der globalen Schnitte betrachten und die Kohomologie des resultierenden einfachen Komplexes nehmen. Das kann dann zum Beispiel so aussehen.

Bezeichnen wir nun für eine affine offene Menge U und eine quasikohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf U mit $\mathcal{F}_U$ das direkte Bild von $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^1$ dann erhalten wir als azyklische Auflösung

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \to & \Omega^1_{\mathbb{P}^1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{U_0} \oplus \mathcal{O}_{U_\infty} & \to & \Omega^1_{U_0} \oplus \Omega^1_{U_\infty} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{U_0 \cap U_\infty} & \to & \Omega^1_{U_0 \cap U_\infty} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0
\end{array}$$

Die vertikalen Komplexe sind azyklische Auflösungen, nimmt man nun globale Schnitte, dann erhält man nach Weglassen der oberen Zeile den Doppelkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_\infty) & \to & \Omega_{\mathbb{P}^1}(U_0) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^1}(U_\infty) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0 \cap U_\infty) & \to & \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(U_0 \cap U_\infty) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0
\end{array}$$

und es ist nun leicht zu sehen, daß der resultierende einfache Komplex im Grad 0 und im Grad 2 als Kohomologie $\mathbb{Z}$ hat, diese Kohomologiegruppe hat erzeugendes Element das Bild von $\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u} = 1_{\mathrm{DR}}$, wobei wieder die Anordnung der Überdeckung eingeht.

Die de-Rham-Kohomologie besitzt noch eine absteigende Filtrierung: Wir können die Unterkomplexe betrachten, in denen die ersten p Spalten mit Nullen besetzt sind. Die Bilder der Kohomologie dieser Unterkomplexe nennen wir $F^p H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1)$. In diesem Fall haben wir in dieser Filtration natürlich nur zwei Schritte und es gilt

$$\begin{array}{rr} F^0 H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} & F^1 H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) = 0 \\ F^0 H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) = & F^1 H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} 1_{\mathrm{DR}} \end{array}$$

Die Definition der de-Rham-Kohomologie ist rein algebraischer Natur, hier spielt das Konzept der Stetigkeit keine Rolle.

Es gibt nun aber einen Vergleichsisomorphismus

$$\begin{array}{rclcc} I & : & H^2_B(\mathbb{P}^1) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} & \longrightarrow & H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbb{C} \\ I & : & 1_B & \longmapsto & \frac{1}{2\pi i} 1_{\mathrm{DR}} \end{array}$$

Ferner können wir noch komplexe Konjugationen c_B, c_{DR} auf den Koeffizienten definieren, und es gilt

$$I \circ F_\infty \circ c_B = c_{\mathrm{DR}} \circ I.$$

Wir können jetzt die Daten zusammenfassen und die Betti-de-Rham-Kohomologie definie ren. Dies ist einfach

$$H^2_{B-\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) = \{H^2_B(\mathbb{P}^1), F_\infty, H^2_{\mathrm{Dr}}(\mathbb{P}^1), I : H^2_B(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbb{C}\}.$$

Schließlich gibt es noch die étalen Kohomologiegruppen: Für jede Primzahl ℓ gibt es

$$H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1 \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) = H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell(-1).$$

Diese Kohomologiegruppen sind nach Konstruktion $\mathbb{Z}_\ell$-Moduln und in unserem speziellen Fall ist $\mathbb{Z}_\ell(-1)$ ein freier Modul vom Rang 1.

Der Witz ist aber, daß diese Kohomologiegruppen eine rein algebraische Definition besitzen und daß infolgedessen die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ darauf operiert. Diese Operation kann man leicht beschreiben. Es gilt für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ und $z \in \mathbb{Z}_\ell(-1)$ $\sigma(z) = \alpha(\sigma)^{-1} \cdot z$, wobei

$$\alpha : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_\ell^*$$

der sogenannte Tate-Charakter ist. Dies ist der Charakter mit dem die Galoisgruppe auf dem projektiven Limes der ℓ^n-ten Einheitswurzeln

$$T_\ell(G_m) = \lim_{\leftarrow} \mu_{\ell^n}$$

operiert. Auch $T_\ell(G_m)$ ist ein freier $\mathbb{Z}_\ell$-Modul vom Rang 1.

Es gibt wieder einen Vergleichsisomorphismus

$$I_\ell : H^2_B(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_\ell).$$

Wenn wir $\bar{\mathbb{Q}}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auffassen, dann wird unser obiges F_∞ ein Element der Galoisgruppe. Dann gilt daß der Vergleichsisomorphismus der mit der Operaration von F_∞ verträglich ist.

Wir können jetzt also sagen, daß $\mathbb{Z}(-1)$ die folgende Ansammlung von ineinander verzahnten Daten ist:

$$H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(-1) = \begin{cases} H^2_B(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \cdot 1_B \ , F_\infty(1_B) = -1_B \\ H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \cdot 1_{\mathrm{DR}} + \text{Filtration} \\ I : H^2_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\ I : 1_B \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\ 1_{\mathrm{DR}} \\ I \circ F_\infty \circ c_B = c_{\mathrm{DR}} \circ I \\ H^2_{ét}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}_\ell(-1) \ \ \text{Galoismodul} \\ I_\ell : H^2_B(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_\ell) \\ \text{kompatibel mit der Operation von } F_\infty \end{cases}$$

Natürlich ist jetzt klar, was $\mathbb{Z}(-n)$ ist:

$$H^{2n}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(-n) = \begin{cases} H^{2n}_B(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \cdot 1_B \ , F_\infty(1_B) = (-1)^n 1_B \\ H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \cdot 1_{\mathrm{DR}} + \text{Filtration} \\ I : H^{2n}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^{2n}_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\ I : 1_B \longrightarrow (\frac{1}{2\pi i})^n\ 1_{\mathrm{DR}} \\ I \circ F_\infty \circ c_B = c_{\mathrm{DR}} \circ I \\ H^{2n}_{ét}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_\ell(-n) \ \ \text{Galoismodul} \\ I_\ell : H^{2n}_B(\mathbb{P}^n) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} H^{2n}_{\text{ét}}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_\ell) \\ \text{kompatibel mit der Operation von } F_\infty, \end{cases} ,$$

wobei für die Filtrierung in der de-Rham Kohomologie gilt

$$F^0 H^{2n}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \ldots = F^n H^{2n}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \supset F^{n+1} H^{2n}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = 0$$

und wobei jetzt die Galoisgruppe durch den Charakter $\alpha(\sigma)^{-n}$ operiert.

Die Kopplung zwischen der étalen Kohomologie und der Betti-de-Rham Kohomologie wird nun durch die Riemannsche ζ-Funktion gegeben. Allgemein kann man den ℓ-adischen Kohomologiegruppen einer glatten projektiven Varietät eine L-Funktion zuordnen. In diesem Fall ergibt sich, daß diese L-Funktion durch

$$L_{\mathbb{Z}(-n)}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{n-s}} = \zeta(-n + s)$$

gegeben ist. In diese L-Funktion setzt man als Argument das Gewicht zu das Motiv ein und bekommt für gerade n

$$\zeta(n) = (2\pi i)^n \cdot \mathrm{mod}\mathbb{Q}^*,$$

wobei man jetzt $\zeta(n)$ als eine aus der étalen Kohomologie und $(2\pi i)^n$ als eine aus der Betti-de-Rham-Kohomologie gewonnene Zahl ansehen sollte. Dies ist schon eine zusätzliche Einsicht, die den klassischen Formeln von Euler eine neue Interpretation gibt.

Dies macht es auch plausibel, daß wir für ungerade n keine Relation zwischen einer Potenz von π und dem Wert der ζ-Funktion erwarten sollten, denn dann ist $(2\pi i)^n$ rein imaginär und $\zeta(n)$ ist reell.

Wenn man dies besser verstehen will, so sollte man sich mit der Kohomologie von gemischten Motiven beschäftigen. Ich möchte dieses Konzept wieder an Hand von Beispielen erläutern.

Ib) **Gemischte Kummer Motive**: Wir betrachten jetzt einen beliebigen Grundkörper k der Charakteristik Null und
$\mathbb{P}^1/\mathrm{Spec}(k)$. Sei $U \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ wieder das Komplement der Punkte $0, \infty$. Wir betrachten nun zwei weitere Punkte $1, a \in U(k)$, wobei wir annehmen $a \neq 1$. Das liefert uns die offene Teilmenge $V = U \setminus \{1, a\}$. Wir haben die Inklusion

$$i : V \longrightarrow U.$$

Wir betrachten die "Garbe" $\mathbb{Z}$ auf V und setzen sie durch Null in die Punkte $1, a$ fort und erhalten die Garbe $i_!\mathbb{Z}$ auf U.

Diese Garbe kann man auch so verstehen. Wir haben

$$\{1, a\} \overset{j}{\hookrightarrow} U,$$

das liefert uns eine Garbe $j_*\mathbb{Z}$ auf U, die in den Punkten $1, a$ den Halm $\mathbb{Z}$ hat und sonst überall Null ist. Wir haben die Garbe $\mathbb{Z}$ auf U und einen Homomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow j_*\mathbb{Z},$$

dessen Kern offensichtlich gerade $i_!\mathbb{Z}$ ist.

Wir betrachten nun die Kohomologiegruppen $H^1(U, i_!\mathbb{Z}) = K_a$. Dies ist ein gemischtes "Kummer-Motiv". Ich will erklären, was ich damit meine.

Wir nehmen an, daß k über $\mathbb{Q}$ endlich erzeugt ist. Für jede Einbettung

$$\sigma : k \longrightarrow \mathbb{C}$$

können wir die komplexe Mannigfaltigkeiten

$$(V \times_\sigma \mathbb{C})(\mathbb{C}) \hookrightarrow (U \times_\sigma \mathbb{C})(\mathbb{C}) \hookrightarrow (\mathbb{P}^1 \times_\sigma \mathbb{C})(\mathbb{C})$$

oder kürzer

$$V_\sigma(\mathbb{C}) \subset U_\sigma(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^1_\sigma(\mathbb{C})$$

betrachten. Das sind topologische Räume. Auf $U_\sigma(\mathbb{C})$ können wir die Garbe $i_!(\mathbb{Z})$ betrachten und

$$H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}) = H^1(U_\sigma(\mathbb{C}), i_!\mathbb{Z}).$$

Wir können jetzt die exakte Sequenz von Garben

$$0 \to i_!\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to j_*\mathbb{Z} \to 0$$

auf $U_\sigma(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ betrachten. Die liefert uns eine lange Sequenz in der Kohomologie

$$H^0(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \to H^0(\mathbb{C}^*, j_*\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{C}^*, i_!\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Aus dieser erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Im}(\delta) & \to & H^1(\mathbb{C}^*, i_!\mathbb{Z}) & \to & H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) & \to & 0 \\ & & \| & & & & \| & & \\ & & \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

und das ergibt die sogenannte Gewichtsfiltrierung

$$\begin{array}{rcl} W_0 H^1(\mathbb{C}^*, i_!\mathbb{Z}) & = & \mathrm{Im}(\delta) \\ W_2 H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) & = & H^1(\mathbb{C}^*, i_!\mathbb{Z}). \end{array}$$

Diese Gewichtsfiltrierung haben wir für jede Wahl von σ

$$W_{0,\sigma} H^1_{B,\sigma} \subset W_{2,\sigma} H^1_{B,\sigma} = H^1_{B,\sigma}.$$

Ist $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation, so liefert diese uns eine stetige Abbildung

$$c : V_\sigma(\mathbb{C}) \hookrightarrow U_\sigma(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^1_\sigma(\mathbb{C}) \to V_{c\circ\sigma}(\mathbb{C}) \subset U_{c\circ\sigma} \subset \mathbb{P}^1_{c\circ\sigma}(\mathbb{C}),$$

die natürlich auf den jeweils oberen Räumen schlicht die komplexe Kunjugation ist. Das liefert uns dann

$$F_\infty : H^1(U_\sigma(\mathbb{C}), i_!\mathbb{Z}) \to H^1(U_{c\circ\sigma}(\mathbb{C}), i_!\mathbb{Z}).$$

Diese Abbildung respektiert die Gewichtsfiltrierung.

Die Kollektion der $H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z})$ zusammen mit den Gewichtsfiltrierungen und den Abbildungen F_∞ ist die Betti-Kohomologie

$$H^1_B(U, i_!\mathbb{Z}) = \{H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}), W_{0,\sigma}, F_\infty\}_{\sigma \in \Sigma}.$$

Diese Betti-Kohomologie enthält nicht genügend Informatiion, um den Punkt $a \in U(k)$ zu rekonstruieren.

Wir können aber auch auf dem $\mathbb{P}^1/k$ den folgenden Komplex von kohärenten Garben studieren.

$$\Omega^\bullet_{\mathbb{P}^1,a} := 0 \to O_{\mathbb{P}^1}((1)+(a)) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^1,\log}(-(0)-(\infty)) \to 0,$$

wobei der erste Term die Garbe der regulären Funktionen mit Nullstellen in 1 und a ist und der zweite Term die Garbe der 1-Formen mit Polen höchstens erster Ordnung in 0 und ∞ ist.

Wir setzen

$$H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) = H^1(U, \Omega^\bullet_{\mathbb{P}^1,a}),$$

dies ist ein k-Vektorraum, der wieder mit einer Filtration versehen ist, die sich aus der Filtration des Doppelkomplexes ergibt.

Es ist nicht schwer, diese de-Rham-Kohomologie zu berechnen. Eine azyklische Auflösung wird durch

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & O_{\mathbb{P}^1}((1)+(a)) & \to & \Omega^1_{\mathbb{P}^1,\log}(-(0)-(\infty)) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & O_{\mathbb{P}^1} & \to & \Omega^1_{\mathbb{P}^1,\log}(-(0)-(\infty)) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & O_{\mathbb{P}^1}/O_{\mathbb{P}^1}((1)+(a)) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Nehmen wir von dem unteren Teil globale Schnitte, dann erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
k & \longrightarrow & k \cdot \frac{dx}{x} \\
\downarrow & & \downarrow \\
k \oplus k & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

wobei der obere horizontale Pfeil Null ist. Also sehen wir, daß wir wieder eine exakte Sequenz bekommen

$$0 \to k_{\mathrm{DR}}(0) \to H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \to k_{\mathrm{DR}}(-1) \to 0,$$

und es ist $F^1 H_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) = k \cdot \frac{dx}{x}$.

Schließlich und endlich haben wir dann noch Vergleichsisomorphismen: Für jedes $\sigma \in \Sigma$ haben wir Isomorphismen

$$I_\sigma : H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C}.$$

Nun ist klar, daß wir für jeden Automorphismus τ von $\mathbb{C}$ einen Isomorphismus

$$\tau : H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C} \to H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,\tau\sigma} \mathbb{C}$$

bekommen, indem wir einfach

$$\xi \otimes_{k,\sigma} \alpha \longrightarrow \xi \otimes_{k,\tau\sigma} \tau(\alpha)$$

senden. Ist insbesondere $\tau = c$, dann nennen wir diese Abbildung

$$c_{\mathrm{DR}} : H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C} \to H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,c\circ\sigma} \mathbb{C}.$$

Wir bekommen jetzt noch eine Kompatibilität. Wenn wir bedenken, daß wir auf $H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ noch die Konjugation c_B auf den Koeffizienten haben, dann erhalten wir kommunitative Diagramme

$$\begin{array}{cccccc} I_\sigma & : & H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C} \\ & & \downarrow F_\infty \circ c_B & & \downarrow c_{\mathrm{DR}} \\ I_{c\circ\sigma} & : & H^1_{B,c\circ\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{DR}}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,c\circ\sigma} \mathbb{C}. \end{array}$$

Die Kollektion von Daten

$$\begin{aligned} H^1_{B-DR}(U, i_!\mathbb{Z}) = \Big\{ & \{H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}), W_{\cdot,\sigma}, F_\infty\}_{\sigma\in\Sigma}, \\ & \{H^1_{DR}(U, i_!\mathbb{Z}), F^\bullet\}, \\ & \{I_\sigma : H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^1_{DR}(U, i_!\mathbb{Z}) \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C}\}_{\sigma\in\Sigma} \Big\} \end{aligned}$$

ist nun eine gemischte Hodge-Struktur über k. Diese gemischten Hodge-Strukturen bilden eine abelsche Kategorie, und wir haben gesehen, daß wir eine exakte Sequenz haben

$$0 \to \mathbb{Z}_{B-DR}(0)/k \to H^1_{B-DR}(U, i_!\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_{B-DR}(-1)/k \to 0,$$

und wir können uns fragen, welches das Hindernis gegen das Spalten dieser Sequenz ist.

Dazu betrachten wir die einzelnen Sequenzen. Wir beginnen mit der de-Rham-Kohomologie

$$0 \to k_{DR}(0) \to H^1_{DR}(U, i_!\mathbb{Z}) \to k_{DR}(-1) \to 0.$$

Unsere Filtrierung sieht so aus, daß

$$F^1 H^1_{DR}(U, i_!\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} F^1 k_{DR}(-1) = k_{DR}(-1),$$

das zeigt, daß das erzeugende Element $\frac{dx}{x}$ auf kanonische Weise zu einem Element $\omega_{DR} \in F^1 H_{DR}(U, i_!\mathbb{Z})$ geliftet werden kann. Es gibt also nur eine Möglichkeit des Spaltens:

$$H^1_{DR}(U, i_!\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}k_{DR}(0) \oplus k \cdot \omega_{DR}.$$

In der Betti-Kohomologie sieht das nun so aus: Für jedes σ wählen wir ein $\eta_\sigma \in H^1_{B,\sigma}(U, i_!\mathbb{Z})$, das auf das Erzeugende $\frac{1}{2\pi i}\frac{dx}{x} \in \mathbb{Z}_B(-1)$ abgebildet wird. Wir sorgen noch dafür, daß

$$F_\infty(\eta_\sigma) = -\eta_{c\circ\sigma}.$$

Das mach η_σ eindeutig, wenn $c \circ \sigma = \sigma$. Falls das nicht der Fall ist, wählen wir η_σ, das ist bestimmt modulo $\mathbb{Z}_B(0)$ und setzen dann $\eta_{c\circ\sigma} = -F_\infty \eta_\sigma$. Die Wahlen solcher η_σ geben uns die möglichen Spaltungen in der Betti-Kohomologie. Das Hindernis gegen die Spaltung in der Betti-de-Rham-Kohomologie ergibt sich aus dem Vergleich dieser Spaltungen unter den Vergleichsisomorphismen. Wir betrachten die Elemente

$$\delta_\sigma = \eta_\sigma - \frac{1}{2\pi i} I_\sigma^{-1}(\omega_{DR}) \in \mathbb{C}_B(0) = \mathbb{C}.$$

Wenden wir darauf $F_\infty \circ c_B$ an, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} F_\infty \circ c_B(\delta_\sigma) &= -\eta_{c\circ\sigma} + \tfrac{1}{2\pi i} I^{-1}_{c\circ\sigma}(c_{DR}(\omega_{DR})) = \\ &= -\eta_{c\circ\sigma} + \tfrac{1}{2\pi i} I^{-1}_{c\circ\sigma}(\omega_{DR}) = -\delta_{c\circ\sigma}. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$F_\sigma : \mathbb{C}_B(0)_\sigma = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}_B(0)_{c\circ\sigma} = \mathbb{C}$$

ist die Identität. Also sehen wir, daß

$$c_B(\delta_\sigma) = -F_\infty(\delta_{c\circ\sigma})$$

und daraus ergibt sich:

a) Wenn $c \circ \sigma = \sigma$, d. h. σ reell, dann ist $\delta_\sigma \in i\mathbb{R}_B(0) = i \cdot \mathbb{R}$.

b) Wenn $c \circ \sigma \neq \sigma$, dann ist $\delta_{c\circ\sigma}$ durch δ_σ bestimmt.

Wir sehen also: Wenn wir bei den Paaren $\sigma, c \circ \sigma$ mit $\sigma \neq c \circ \sigma$ sagen, was σ und $c \circ \sigma$ ist, dann ist das Hindernis

$$\begin{aligned} \underline{\delta} =& (\ldots \delta_\sigma \ldots)_{\sigma \in \Sigma/\mathrm{conj}} = \\ =& \big((\ldots \delta_\sigma \ldots)_{\sigma\in\Sigma_{\mathrm{reell}}}, (\ldots \delta_\sigma \ldots)_{\sigma\in\Sigma_{\mathrm{compl}}}\big) \end{aligned}$$

mit $\delta_\sigma \in i\mathbb{R}$ für reelle σ und $\delta_\sigma \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{C}_B(0)/\mathbb{Z}_B(0)$ für $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{compl}}$. Es ergibt sich nun das Problem, wie man diese Zahlen δ_σ berechnet.

Wir wenden c_B auf die definierende Gleichung an und bekommen

$$c_B(\delta_\sigma) = \eta_\sigma - c_B\bigg(\frac{1}{2\pi i} \cdot I_\sigma^{-1}(\omega_{DR})\bigg),$$

und das ergibt

$$\begin{aligned}
\delta_\sigma - c_B(\delta_\sigma) &= -\frac{1}{2\pi i} I_\sigma^{-1}(\omega_{DR}) + c_B\left(\frac{1}{2\pi i} I_\sigma^{-1}(\omega_{DR})\right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} I_\sigma^{-1}(\omega_{DR}) + F_\infty \circ c_{DR}\left(\frac{1}{2\pi i} I_{c\circ\sigma}^{-1}(\omega_{DR})\right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} I_\sigma^{-1}(\omega_{DR}) - \frac{1}{2\pi i} F_\infty \circ I_{c\circ\sigma}^{-1}(\omega_{DR}) = \\
&= \delta_\sigma + F\sigma(\delta_{c\circ\sigma}).
\end{aligned}$$

Schaut man sich die Definition an, so ergibt sich daraus

a) Wenn $\sigma = c \circ \sigma$, dann ist

$$\delta_\sigma = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{z}_{\sigma(a)}} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c\circ\mathfrak{z}_{\sigma(a)}} \frac{dx}{x}\right)$$

wobei $\mathfrak{z}_{\sigma(a)} : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein Weg ist, der 1 mit $\sigma(a)$ verbindet und wobei natürlich $c \circ \mathfrak{z}_{\sigma(a)}$ der konjugiert komplexe Weg ist. Man rechnet leicht nach, daß das Resultat

$$-\frac{1}{2\pi i}\log|\sigma(a)|$$

ist.

b) Wenn $\sigma \neq c \circ \sigma$, dann bekommen wir

$$\int_\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_1^{\sigma(a)} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi i}\log\sigma(a) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

Wir können schließlich noch für jede Primzahl ℓ die ℓ-adischen Kohomologiegruppen

$$H^1_{\acute{e}t}(U \times_k \overline{k}, i_!\mathbb{Z}_\ell)$$

betrachten. Dies sind dann Moduln für die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, und wir bekommen wieder eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_\ell(0) \to H^1_{\acute{e}t}(U \times_k \overline{k}, i_!\mathbb{Z}_\ell) \to \mathbb{Z}_\ell(-1) \to 0.$$

Dann lieferte uns der mittlere Term ein Element

$$[H^1_{\acute{e}t}(U \times_k \overline{k}, i_!\mathbb{Z}_\ell)] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(\mathbb{Z}_\ell(-1), \mathbb{Z}_\ell(0) = H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathbb{Z}_\ell(1)) = k^* \otimes \mathbb{Z}_\ell.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß dies Element durch die Klasse $a \otimes 1 \in k^* \otimes \mathbb{Z}_\ell$ gegeben ist.

Wir sehen also, daß uns die geometrische Konstruktion der Garbe $i_!\mathbb{Z}$ auf U ein Objekt liefert, das seinerseits Elemente in verschiedenen Ext^1-Gruppen produziert

$$H^1(U, i_!\mathbb{Z}) \longrightarrow \begin{cases} [H^1_{B-DR}(U, i_!\mathbb{Z})] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{mixedHodge}/k}(\mathbb{Z}_{B-DR}(-1), \mathbb{Z}_{B-DR}(0)) \\ [H^1_{\acute{e}t}(U \times_k \overline{k}, i_!\mathbb{Z}_\ell)] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(\mathbb{Z}_\ell(-1), \mathbb{Z}_\ell(0)), \end{cases}$$

in beiden Fällen wissen wir, wie die Ext^1-Gruppen aussehen, und wir können die Elemente in den Ext^1-Gruppen aus dem Element $a \in k^*$ ausrechnen.

Wir nehmen nun an, daß es eine abelsche Kategorie von gemischten Tate Motiven über k gibt, dann kann man die Gruppe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MM}}(\mathbb{Z}(-1), \mathbb{Z}(0))$ definieren, das sind dann die gemischten Kummer Motive. Für jedes $a \in k^*$ haben wir ein solches Kummer Motiv konstruiert und es sollte so sein, daß

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MM}}(\mathbb{Z}(-1), \mathbb{Z}(0)) \xrightarrow{\sim} k^*$$