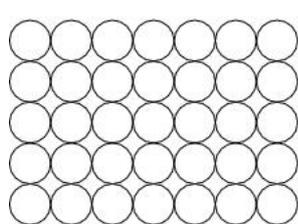


**SEMINAR: GITTER UND KUGELPACKUNGEN, SOSE 2022,
(S1G1)**

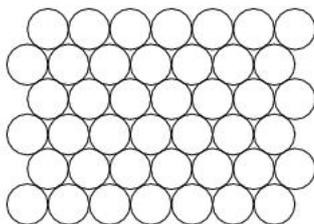
G. MARTIN

Das Problem, den \mathbb{R}^n möglichst dicht mit gleich großen Kugeln auszufüllen, tritt in verschiedenen Wissenschaften auf, zum Beispiel in der Chemie (Kristallographie) oder der Informatik (fehlerkorrigierende Codes). Die bestmögliche Dichte einer Kugelpackung ist bekannt in den Dimensionen $n = 1, 2, 3, 8$ und 24 : In Dimension 1 ist diese Dichte 1 und in Dimension 2 wird sie realisiert durch die hexagonale Packung (vgl. Bienenwaben). In Dimension 3 wurde die von Kepler aufgestellte Vermutung für die dichteste Kugelpackung im \mathbb{R}^3 erst kürzlich von Hales mit Computerhilfe bewiesen. Ein eleganter Beweis für die optimale Kugelpackungsdichte in den Dimensionen 8 und 24 wurde 2016 durch Viazovska gegeben, aufbauend auf Arbeiten von Cohn und Elkies. In jeder dieser Dimensionen wird die optimale Dichte realisiert durch eine Kugelpackung, bei der die Zentren der Kugeln eine diskrete Untergruppe von \mathbb{R}^n . Solche Untergruppen nennt man *Gitter*.

Ziel des Seminar ist es, die Begriffe Kugelpackung und Gitter zu formalisieren und deren grundlegende Eigenschaften zu studieren. Insbesondere werden wir diejenigen Gitter kennenlernen, deren assoziierte Kugelpackungen die optimale Dichte in Dimension 1, 2, 3, 8 und 24 haben. Auf dem Weg dorthin werden wir (ganzahlige) quadratische Formen, Codes und besondere Beispiele von Gittern (z.B. Wurzelgitter) kennenlernen.



square packing



hexagonal packing



ABBILDUNG 1. Beispiele für Gitter-Kugelpackungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

Organisation. Von allen Teilnehmenden wird eine intensive Beschäftigung mit den Themen des Seminars erwartet und nicht nur mit denen des eigenen Vortrags. Jeder Vortrag soll von einer Zweiergruppe erarbeitet und dann gemeinsam in ca. 80 Minuten vorgestellt werden. Dabei soll auf die beiden Teile des Vortrags gleich viel Zeit entfallen. Insbesondere soll jede teilnehmende Person zwei „halbe“ Vorträge halten. Jeder Vortrag sollte mindestens eine Übungsaufgabe enthalten, für die zum

nächsten Termin auch eine Musterlösung von den Vortragenden bereitgestellt wird. (Eine schriftliche Ausarbeitung der Vorträge wird hingegen nicht erwartet.)

Vorbesprechung und Themenvergabe: Die Anmeldung zum Seminar erfolgte bis zum Freitag, den 21. Januar. Die Vorbesprechung findet am 4. Februar um 12:00 Uhr via Zoom statt (der Zoom-Link ist auf BASIS zu finden). Bei der Vorbesprechung werden wir das Programm gemeinsam durchsprechen, sodass Sie danach einen ersten Eindruck aller Themen haben. Bitte schicken Sie mir bis Ende Februar eine Liste mit Ihren 5 Lieblingsthemen sortiert nach Präferenz per Email an gmartin@math.uni-bonn.de. Anfang März werde ich daraufhin die Themen vergeben.

Vorbereitung der Vorträge: Die folgende Beschreibung der einzelnen Vorträge ist so detailliert, dass eine weitgehend eigenständige Vorbereitung möglich sein sollte. Spätestens zwei Wochen vor dem eigentlichen Vortrag werden wir das Grundkonzept Ihres Vortrags und offene Fragen diskutieren.

eCampus-Kurs und Forum: Ab 7. Februar wird es einen eCampus-Kurs zum Seminar geben. Dort wird ein Forum zu finden sein, welches Sie gerne zur Kommunikation mit mir und Ihren Mitstudierenden nutzen können. Ankündigungen zum Seminar werden ab dann nicht mehr per Email, sondern via dieses Forums stattfinden.

1. GITTER UND KUGELPACKUNGEN

In diesem Vortrag werden Gitter und Kugelpackungen eingeführt. Insbesondere wird die Dichte einer Kugelpackung definiert und gezeigt, dass die optimale Kugelpackungsdichte durch periodische Kugelpackungen approximiert werden kann.

- (1) Man definiere *Kugelpackungen* und deren *Dichte* (siehe [7, Definition 1.8.1], mit $A = \text{Kugel}$).
- (2) Man definiere (volle) *Gitter* (siehe [6, Definition, S.1]). Eine durch ein Gitter gepackte Kugelpackung heißt *Gitter-Kugelpackung*.
- (3) Man definiere *Basis*, *Fundamentalparallelotop*, *Volumen* und *duales Gitter* (siehe [6, S.2]).
- (4) Eine Kugelpackung, welche als Vereinigung endlich vieler Translate einer Gitter-Kugelpackung entsteht, heißt *periodisch*. Man zeige: Die Dichte einer beliebigen Kugelpackung kann durch periodische Kugelpackungen approximiert werden (siehe z.B. [2, Anhang A]).
- (5) Man beweise die Formel für die Dichte von periodischen Kugelpackungen (siehe [5, S.2]).

Als Beispiele sollte man mindestens eine Nicht-Gitter-Kugelpackung angeben. Man erkläre die definierten Begriffe anhand der Gitter $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ (siehe [3, Kapitel 4, Abschnitt 5 und 6.2]).

2. DIE DICHTESTE KREISPACKUNG

Ziel dieses Vortrags ist es zu zeigen, dass es keine Kugelpackung in \mathbb{R}^2 gibt, welche dichter als die A_2 -Kugelpackung (auch hexagonale Kreispackung genannt) ist. Wir folgen dem Beweis von Chang und Wang [1].

- (1) Man erkläre (kurz!), warum die zu $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ assoziierte Packung die dichteste 1-dimensionale Packung ist.

- (2) Man definiere *saturierte* Kugelpackungen.
- (3) Man definiere *Delaunay-Triangulierungen*. Man zeige, dass eine diskrete Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$, welche eine Kugel in eine saturierte Kugelpackung packt, eine solche Triangulierung besitzt (z.B. via Voronoi-Diagramme).
- (4) Man zeige Lemma 1 und 2 in [1] und folgere daraus, dass die hexagonale Kugelpackung die eindeutige dichteste, periodische Kugelpackung im \mathbb{R}^2 ist.

3. DAS KEPLERPROBLEM FÜR GITTER-KUGELPACKUNGEN

Ziel dieses Vortrags ist es zu zeigen, dass es keine Gitter-Kugelpackung in \mathbb{R}^3 gibt, welche dichter als die A_3 -Kugelpackung ist. Wir folgen [4, Kapitel 18.4].¹

- (1) Man berechne das minimale Volumen eines Gitters im \mathbb{R}^3 mit fixierter minimaler Länge.
- (2) Man folgere daraus, dass die A_3 -Kugelpackung die eindeutige dichteste Gitter-Kugelpackung im \mathbb{R}^3 ist.
- (3) Man gebe unendlich viele periodische Kugelpackungen im \mathbb{R}^3 an, welche die selbe Dichte wie die A_3 -Kugelpackung besitzen, und welche sich nicht durch lineare Transformationen ineinander überführen lassen (siehe z.B. [3, Kapitel 1, Abschnitt 1.3]).

4. GANZZAHLIGE GITTER

Eine spezielle Klasse von Gittern, welche besonders gut vom algebraischen Standpunkt aus studiert werden können, sind ganzzahlige Gitter. Ziel dieses Vortrags ist es, ganzzahlige Gitter abstrakt einzuführen und zu bestimmen, wann man solche ganzzahligen Gitter in den \mathbb{R}^n einbetten kann. Außerdem werden einige interessante Eigenschaften solcher Gitter definiert und an Beispielen studiert.

- (1) Man definiere den Begriff einer *symmetrischen Bilinearform b auf einem Modul S über einem Ring R* [6, S.3]. Ist $R = \mathbb{Z}$, so heißt (S, b) *ganzzahliges Gitter*. Man definiere *positive/negative Definitheit* sowie *Isomorphismen* und *Automorphismen* von Gittern.
- (2) Man zeige: Ein ganzzahliges Gitter bettet genau dann kompatibel mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in den \mathbb{R}^n ein, wenn es positiv definit ist. Die Gitter Λ im \mathbb{R}^n , welche man auf diese Weise erhält, sind genau die, sodass $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $x, y \in \Lambda$ gilt. [6, Proposition 1.1].
- (3) Man definiere (*primitive*) *Untergitter* und das *orthogonale Komplement* eines Untergitters, sowie die *orthogonale direkte Summe* von Gittern. [6, S.4]
- (4) Man definiere *Diskriminante*, *gerade Gitter* und *unimodulare Gitter*. [6, S.4,5]
- (5) Man erkläre, wie man zu einem Graphen ein Gitter assoziiert und definiere so die Gitter A_n, D_n, E_6, E_7 und E_8 ([6, Fig. 1.7]).² Man berechne die Diskriminante dieser Gitter. Insbesondere erkläre man in den Dimensionen $1, \dots, 8$, welche der Gitter A_n, D_n, E_6, E_7 und E_8 am dichtesten sind (siehe auch [3, Table 1.1]).

¹Man beachte, dass wir hier, im Unterschied zu Vortrag 2, nur Gitter-Kugelpackungen betrachten. Die Frage nach der optimalen Dichte einer allgemeinen Kugelpackung in \mathbb{R}^3 ist das in der Einleitung erwähnte (allgemeine) Keplerproblem.

²Dass diese Gitter auch positiv definit sind, nehmen wir vorerst ohne Beweis an.

5. KLASSIFIKATION VON WURZELGITTERN

Eine spezielle Klasse gerader ganzzahliger Gitter bilden die sogenannten *Wurzelgitter*. In diesem Vortrag zeigen wir, dass solche Wurzelgitter durch *Dynkindiagramme* klassifiziert werden, welche in verschiedensten Bereichen der Mathematik eine fundamentale Rolle spielen (z.B. in der Theorie algebraischer Gruppen).

- (1) Man definiere *Wurzelgitter* und zeige, dass die Gitter A_n, D_n, E_6, E_7 und E_8 Wurzelgitter sind ([6, Kapitel 1.4]).
- (2) Man beweise, dass jedes Wurzelgitter eine Basis (e_1, \dots, e_n) aus Wurzeln e_i besitzt mit $\langle e_i, e_j \rangle \in \{0, -1\}$ für $i \neq j$ [6, Theorem 1.1]. Äquivalent dazu ist zu zeigen, dass die Menge aller Wurzeln in einem Wurzelgitter ein Fundamentalsystem besitzt [6, Proposition 1.4].
- (3) Man gebe den Beweis für die Klassifikation von Wurzelgittern [6, Theorem 1.2].³

6. THETA-REIHEN UND HOLOMORPHE FUNKTIONEN

Die Theta-Reihe eines Gitters kodiert, im Sinne erzeugender Funktionen, die Anzahl der Gitterpunkte mit fixiertem Abstand zum Ursprung. Ziel dieses Vortrags ist zu zeigen, dass die Theta-Reihe als komplex differenzierbare (d.h. holomorphe) Funktion auf der oberen Halbebene \mathbb{H} der komplexen Zahlen aufgefasst werden kann.

- (1) Man definiere die *Theta-Reihe* θ_Λ eines Gitters Λ [6, S. 33] und, allgemeiner, die Theta-Reihe $\theta_{\mathcal{P}}$ einer periodischen Packung \mathcal{P} [3, S.45].
- (2) Man definiere den Begriff *holomorph*. Man erwähne, dass Summe, Produkt, Verkettungen und Quotienten (wo definiert) holomorpher Funktionen wieder holomorph sind. Außerdem erkläre man, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius holomorph sind. Man folgere daraus, dass θ_Λ und $\theta_{\mathcal{P}}$ holomorphe Funktionen auf \mathbb{H} definieren (siehe [6, S.33]).
- (3) Man definiere die Theta-Funktionen $\theta_2 := \theta_{\mathbb{Z}+1/2}$, $\theta_3 := \theta_{\mathbb{Z}}$ und θ_4 . Man gebe $\theta_{\mathbb{Z}^n}$ und θ_{D_n} als polynomiellen Ausdruck in den θ_i .
- (4) Man formuliere [6, Proposition 2.1], welches eine Relation zwischen θ_Λ und θ_{Λ^*} gibt. Die Formel wird im nächsten Vortrag bewiesen.
- (5) Man folgere, dass der Rang eines ganzzahligen, positiv definiten, geraden, unimodularen Gitters durch 8 teilbar ist [6, Theorem 2.1].

7. FOURIERTRANSFORMATION UND POISSONSCHES SUMMENFORMEL

Ziel dieses Vortrags ist ein Beweis der Poissonschen Summenformel. Daraus folgern wir die Relation zwischen θ_Λ und θ_{Λ^*} , welche im vorherigen Vortrag benutzt wurde.

- (1) Man definiere die *Fourier-Transformierte* einer integrierbaren komplexwertigen Funktion auf dem \mathbb{R}^n [6, S.37].
- (2) Man definiere die *Fourierreihe* einer stetigen und periodischen komplexwertigen Funktion auf dem \mathbb{R}^n [6, S.38].
- (3) Man beweise die Poissonsche Summenformel [6, Theorem 2.3]. Die Formel für die Summation über Translate von Gittern soll nur formuliert und nicht bewiesen werden [2, Gleichung 2.1].
- (4) Man beweise damit die Relation zwischen θ_Λ und θ_{Λ^*} in [6, Proposition 2.1].

³Die Existenz haben wir bereits im vorigen Vortrag geklärt.

8. DIE COHN–ELKIES SCHRANKE

In diesem Vortrag soll die Cohn–Elkies Schranke für die optimale Kugelpackungsdichte im \mathbb{R}^n bewiesen werden. Das wichtigste Hilfsmittel hierfür ist die im Vortrag zuvor bewiesene Poissonsche Summenformel.

- (1) Man definiere *Schwartz-Funktionen* auf \mathbb{R}^n [5, S.9].
- (2) Man erinnere daran, dass die optimale Kugelpackungsdichte durch periodische Packungen approximiert werden kann und beweise die Cohn–Elkies Schranke wie in [5, Theorem 3.1].
- (3) Man erkläre, dass man die selbe Schranke erhält, wenn man nur *radiale* Schwartz-Funktionen f mit $\hat{f}(0) = 1$ erlaubt [5, S.10].
- (4) Man stelle den Inhalt von [2, Abschnitt 8] vor, in dem erklärt wird, dass die Existenz bestimmter Schwartz-Funktionen impliziert, dass jede dichteste periodische Kugelpackung in Dimension 8 bzw. 24 durch ein ganzzahliges, gerades, unimodulares, positiv definites Gitter mit quadrierter Minimallänge 2 bzw. 4 realisiert wird.

9. MODULFORMEN UND VIAZOVSKAS FUNKTION

Ziel des Vortrags ist es, Viazovskas Konstruktion einer “optimalen” Schwartz-Funktion in Dimension 8 zu erklären [8]. Die Existenz des 24-dimensionalen Analogons aus [9] wird nur erwähnt.

- (1) Man definiere Modulformen von Gewicht k [6, S. 36]. Man zeige, dass die Menge der Modulformen von Gewicht k einen \mathbb{C} -Vektorraum M_k bilden und dass die Menge aller Modulformen mit beliebigen Gewichten eine \mathbb{C} -Algebra M bildet.
- (2) Man definiere die Eisensteinreihen E_k für $k \geq 4$ und gebe ohne Beweis an, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$, $E_k \in M_k$ und $M \simeq \mathbb{C}[E_4, E_6]$ gilt. Man definiere auch E_2 .
- (3) Man zeige, dass die Theta-Reihe eines unimodularen Gitters von Rang $2k$ eine Modulform von Gewicht k definiert und folgere daraus, dass das E_8 -Gitter das eindeutige, ganzzahlige, gerade, unimodulare, positiv definite Gitter von Rang 8 ist [6, Proposition 2.5].
- (4) Man formuliere [8, Theorem 3] und erinnere daran, dass daraus folgt, dass die E_8 -Kugelpackung im \mathbb{R}^8 optimale Dichte hat [8, Theorem 1].
- (5) Man gebe Viazovskas Funktionen an, welche die Bedingungen von Punkt (4) aus Vortrag 8 erfüllen (siehe [5], insbesondere Table 1 dort).

10. CODES

Das Problem, Informationen möglichst ökonomisch und gleichzeitig möglichst fehlerresistent über einen Informationskanal zu übertragen, kann als Kugelpackungsproblem in \mathbb{F}_q^n interpretiert werden. Das soll in diesem Vortrag, in dem (lineare) Codes definiert und konstruiert werden, präzisiert werden. Wir folgen [6, Abschnitt 1.2, 1.3].

- (1) Man definiere den Begriff eines (binären, ternären, q -ären, etc.) *Codes*.
- (2) Man definiere *Hammingabstand* und *-gewichte* sowie den *Minimalabstand* und die *Informationsrate* eines Codes. Man beschreibe das Problem, einen Code im \mathbb{F}_q^n mit fixiertem Minimalabstand und möglichst großer Informationsdichte zu finden, als Kugelpackungsproblem in \mathbb{F}_q^n .

- (3) Man definiere den *Hammingcode* H und berechne dessen Minimalabstand und Informationsrate.
- (4) Man definiere *lineare- und* $[n, k, d]$ -Codes. Man definiere das *duale* eines linearen Codes und erkläre, wann ein binärer Code *doppelt gerade* heißt.
- (5) Man definiere den erweiterten Hammingcode \tilde{H} und zeige, dass \tilde{H} selbst-dual und doppelt gerade ist.
- (6) Man erkläre, wie man zu einem binären Code ein Gitter assoziieren kann. Man zeige, dass das resultierende Gitter genau dann ganzzahlig und gerade ist, wenn der Code doppelt gerade ist.
- (7) Man zeige: Das E_8 -Gitter ist das via obiger Methode zu \tilde{H} assoziierte Gitter.

11. GOLAY-CODE UND LEECH-GITTER

Ziel dieses Vortrags ist Konstruktion und Studium des *Leech-Gitters* Λ_{24} , welches das eindeutige ganzzahlige, gerade, unimodulare, positiv definite Gitter von Rang 24 ist, das keine Wurzel enthält. Nach Vortrag 8 und 9 ist die Dichte der zu Λ_{24} assoziierten Kugelpackung optimal. Das Leech-Gitter kann mithilfe des erweiterten binären *Golay-Codes*, welchen wir zuerst studieren werden, konstruiert werden.

- (1) Man definiere den erweiterten binären Golay-Code \tilde{G} , wie in [6, S.58-59] beschrieben, und zeige, dass \tilde{G} ein selbst-dualer, doppelt gerader $[24, 12]$ -Code ist.
- (2) Man konstruiere das Leech-Gitter Λ_{24} aus \tilde{G} , wie in [6, S.60-61] beschrieben. Man zeige, dass Λ_{24} gerade und unimodular ist und quadrierte Minimallänge gleich 4 hat.
- (3) Man folgere mithilfe der Resultate aus Vortrag 8 und 9, dass die zu Λ_{24} assoziierte Kugelpackung das Kugelpackungsproblem in Dimension 24 löst.

LITERATUR

- [1] H. Chang, L. Wang, *A Simple Proof of Thue's Theorem on Circle Packing*, available at <https://arxiv.org/abs/1009.4322>
- [2] H. Cohn, N. Elkies, *New upper bounds on sphere packings*, I. Ann. of Math. (2) 157 (2003), no. 2, 689-714
- [3] J. H. Conway, N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, Volume 290 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York, third edition, 1999.
- [4] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. xxii+469 pp.
- [5] D. de Laat, F. Vallentin, *A Breakthrough in Sphere Packing: The Search for Magic Functions*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) 17 (2016), no. 3, 184-192.
- [6] W. Ebeling, *Lattices and Codes*, Third edition. Advanced Lectures in Mathematics. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013. xvi+167 pp.
- [7] J. Martinet, *Perfect lattices in Euclidean spaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 327. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxii+523 pp.
- [8] M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 3, 991-1015.
- [9] H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 3, 1017-1033.