Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 9

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. Vollziehen Sie den Beweis von Lemma 11.31 nach.

Aufgabe 2. (8pt) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne S^n die n-Sphäre mit ihrer gewöhnlichen glatten Struktur und sei TS^n das entsprechende Tangentialbündel, aufgefasst als topologisches Vektorbündel. Finden Sie ein Geradenbündel $N \to S^n$, so dass die direkte Summe $TS^n \oplus_{S^n} N$ trivialisierbar ist.

Aufgabe 3. (7pt) Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie auf der Menge $C^\infty(X) := C^\infty(X, \mathbb{R})$ der glatten reellwertigen Funktionen die offensichtliche $\mathbb{R}$-Algebra-Struktur (punktweise Multiplikation).
Eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion $D : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ heißt eine *Derivation* der $\mathbb{R}$-Algebra-Struktur wenn für alle $f, g \in C^\infty(X)$ gilt $D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$.
Konstruieren Sie eine $\mathbb{R}$-lineare Injektion

$$D_{(-)} \ : \ \Gamma_X(TX) \hookrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(X))$$

der glatten Vektorfelder in die Derivationen der Algebra der glatten Funktionen auf X.

Lemma. (Hadamard) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es glatte Funktionen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \cdots, n\}$ mit $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$ und so dass für alle $x = (x^i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ gilt: $f(x) = \sum_{i=1}^n x^i \cdot g_i(x)$.

Aufgabe 4. (5pt) Verwenden sie das Hadamard-Lemma um zu zeigen, dass die Abbildung $D_{(-)}$ (aus Ausgabe 2) surjektiv ist, und also bijektiv.

Generischer Hinweis: Finden Sie die Konstruktionen lokal, und zeigen Sie, dass sie sich konsistent globalisieren lassen.

Abgabe am 4.7 in der Vorlesung