Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 8

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. (5pt) Bestimmen Sie die Menge der Zusammenhangskomponenten von 1) der n-Sphäre S^n, 2) des projektive Raum kP^n, jeweils für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Aufgabe 2. (5pt) Sei $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. 1) Betrachten Sie $A, B, E \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$, wobei E eine elementare Matrix sei und $B = E \cdot A$. Zeigen Sie, dass ein Pfad in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(k) \simeq k^{n^2}$ existiert, der A mit B verbindet. 2) Bestimmen Sie die Menge der Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}(n, k)$.

Aufgabe 3. (5pt) Sei X ein topologischer Raum und seien $A, B \subset X$ zwei Untermengen, die beide offen oder beide abgeschlossen sind und die X überdecken: $A \cup B = X$.

Ausgestattet mit der Unterraum-Topologie ergeben diese Untermengen ein Diagramm von topologischen Räumen der Form:

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, hook, "i_A"] \\ B \arrow[r, hook, "i_B"'] & X \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Dies ist ein pushout-Diagramm. Folgern Sie, dass eine Funktion $f\colon X \to Y$ in einen topologischen Raum Y genau dann stetig ist, wenn die beiden Einschränkungen $f|_A : A \to Y$ und $f|_B : B \to Y$ stetig sind. Verallgemeinern Sie diese Aussagen zu Überdeckungen durch beliebige Mengen von offenen Untermengen und durch endliche Mengen von abgeschlossenen Untermengen.

Aufgabe 4. (5pt) Sei X ein topologischer Raum, $n \in \mathbb{N}$ und schreibe P^nX für die Menge der stetigen Abbildungen der Form $[0,1]^n \to X$. Für $1 \leq k \leq n$ seien $i_0^k, i_1^k\colon [0,1]^{n-1} \to [0,1]^n$ die Inklusionen wobei die k-te Komponente konstant 0 bzw. 1 ist.

Diese induzieren Abbildungen $(i_0^k)^*, (i_1^k)^*\colon P^nX \to P^{n-1}X$.
Betrachten Sie das pullback-Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & P^nX \arrow[d, "(i_0^k)^*"] \\ P^nX \arrow[r, "(i_1^k)^*"'] & P^{n-1}X \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass P bijektiv zu P^nX ist. Durch variieren von k liefert dies n nicht-assoziative, partiell definierte binäre Verknüpfungen. Zeigen Sie, dass für $n = 1$ die so definierte Verknüpfung die Konkatenation von Pfaden ist.

Abgabe am 27.6. in der Vorlesung