Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 7

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. Vollziehen Sie den Beweis von Lemma 10.36 nach.

Im Folgenden sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $kP^n := (k^{n+1} \setminus \{0\})/k$ bezeichnet den entsprechenden projektiven topologischen Raum für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (2pt)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $i_n : kP^n \to kP^{n+1}$ mit $[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto [x_1 : \cdots : x_{n+1} : 0]$ stetig ist.

Aufgabe 3 (5pt)**.** Sei S^n für $n \in \mathbb{N}$ die euklidische n-Sphäre.
1) Sei $S^n/(\mathbb{Z}/2)$ der Quotientenraum der Relation, die $\vec{x} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $-\vec{x}$ identifiziert. Zeigen Sie, dass $S^n/(\mathbb{Z}/2)$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$ ist.
2) Sei S^{2n+1}/S^1 der Quotientenraum der Relation, die $\vec{z} \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ mit $c\vec{z}$ identifiziert, für alle $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Zeigen Sie, dass S^{2n+1}/S^1 homöomorph zu $\mathbb{C}P^n$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie, dass der Orbit einer Untermenge der Form $B_x^\circ(\epsilon) \cap S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ unter der multiplikativen Wirkung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen ist.

Aufgabe 4 (4pt)**.** Betrachten Sie $\{\vec{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |\vec{z}| = 1 \text{ und } z_{n+1} \in [0,1] \subset \mathbb{C}\}$ als Modell für D^n. Zeigen Sie, dass die Funktion $d_n \colon D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ mit $(z_1, \cdots, z_{n+1}) \mapsto [z_1 : \cdots : z_{n+1}]$ eine surjektive stetige Abbildung ist. Zeigen Sie auch das Analogon für $k = \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (9pt)**.** Zeigen Sie, dass kP^{n+1} aus kP^n durch Anheftung einer Zelle gewonnen werden kann (Def. 6.30): Es gibt pushout-Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "\iota_n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(po)}"] & \mathbb{R}P^n \arrow[d, "i_n"] \\ D^{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & \mathbb{R}P^{n+1} \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "\iota_{2n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(po)}"] & \mathbb{C}P^n \arrow[d, "i_n"] \\ D^{2n+2} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & \mathbb{C}P^{n+1} \end{tikzcd}$$

wobei i_n die Abbildung von Aufgabe 2 ist, q_n die Quotientenabbildung von Aufgabe 3 und d_n die Surjektion von Aufgabe 4.

Abgabe am 20.6. in der Vorlesung