Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 6

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1 (6pt)**.**

1. Zeigen Sie: Die ein-Punkt-Kompaktifizierung der euklidischen Ebene ist homöomorph zur 2-Sphäre:
$$S^2 \simeq (\mathbb{R}^2)^*$$
Hinweis: Verwenden Sie die stereographische Projektion.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^1$ homöomorph zu S^2 ist und dass in diesem Fall die Standardüberdeckung (Def. 9.13) von $\mathbb{CP}^1$ durch die beiden stereographischen Projektionen gegeben ist.

Aufgabe 2 (7pt)**.** Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum und $E \in \mathrm{Vect}(X)$. Zeigen Sie:

1. Auf E existiert ein inneres Produkt (Def. 9.30).

2. Jedes Untervektorbündel $E_1 \hookrightarrow E$ ist Inklusion eines direkten Summanden, d.h. es existiert $E_2 \in \mathrm{Vect}(X)$ mit $E \simeq E_1 \oplus_X E_2$ (Bsp. 9.10, Def. 9.28).

3. Wenn X ein kompakter Hausdorff-Raum ist, dann ist E direkter Summand eines trivialen Vektorbündels, d.h. es gibt $E' \in \mathrm{Vect(X)}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $E \oplus_X E' \simeq X \times k^n$.

Aufgabe 3 (7pt)**.** Sei X ein topologischer Raum und $X \times [0,1]$ der Produktraum mit dem euklidischen geschlossenen Intervall. Sei $E \in \mathrm{Vect}(X \times [0,1])$. Zeigen Sie:

1. Wenn die Einschränkungen $E|_{X\times[0,1/2]}$ und $E|_{X\times[1/2,1]}$ trivialisierbar sind, so ist auch E selbst trivialisierbar.

2. Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i \subset X\}_{i\in I}$ von X, so dass E auf der induzierten Überdeckung $\{U_i \times [0,1] \subset X \times [0,1]\}_{i\in I}$ trivialisiert.

Abgabe am 13.6. in der Vorlesung