Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 4

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. Vollziehen Sie die Beweise zu Prop. 7.4 und Prop. 7.18 nach.

Definition. Für $c \in \mathbb{C}$ sei $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_c(z) := z^2 + c$. Schreibe $f_c^n := \underbrace{f_c \circ \cdots \circ f_c}_{n \text{ Faktoren}}$.

Definiere Mndlbrt $:= \{c \in \mathbb{C} \,|\, \text{die Folge } (f_c^n(0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (5pt)**.** Zeigen Sie: Mndlbrt $\subset \mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Unterraumtopologie ist kompakt. (Hinweis: Zeigen Sie erst, dass $(|c| > 2) \Rightarrow (c \notin \text{Mndlbrt})$. Verwenden Sie dann Heine-Borel (Prop. 7.37).)

Sei im Folgenden (X, τ) ein topologischer Raum.

Aufgabe 3 (2pt)**.** Sei $\{K_i \subset X\}_{i\in I}$ eine Menge von kompakten Unterräumen. Zeigen Sie:
1) wenn I endlich ist, dann ist $\bigcup_{i\in I} K_i$ kompakt; 2) wenn alle $K_i \subset X$ abgeschlossen sind, dann ist $\bigcap_{i\in I} K_i$ kompakt.

Definition (Ein-Punkt-Kompaktifizierung)**.** Schreibe $X^* := X \sqcup \{\infty\}$ und

$\tau_{X^*} := \{U \mid U \in X \text{ offen}\} \sqcup \{(X \backslash CK) \cup \{\infty\} \mid CK \subset X \text{ kompakt und geschlossen}\} \subset P(X^*)$.

Aufgabe 4 (10pt)**.** Zeigen Sie:

1. τ_{X^*} ist eine Topologie auf X^*;
2. (X^*, τ_{X^*}) ist kompakt;
3. die kanonischen Abbildung $(X, \tau) \longrightarrow (X^*, \tau_{X^*})$ ist eine stetige offene topologische Einbettung (Def. 3.14, 3.34),
4. wenn (X, τ) lokal kompakt ist, dann ist (X^*, τ_{X^*}) Hausdorff genau dann wenn (X, τ) Hausdorff ist.

Aufgabe 5 (3pt)**.** Zeigen Sie: Lokal kompakte Hausdorff-Räume sind genau die offenen Unterräume von kompakten Hausdorff-Räumen. (Hinweis: eine Richtung ist Prop. 7.25; zeigen Sie die andere Richtung.)

Abgabe am 23.5.