Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 3

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. (4pt) Verifizieren Sie Bsp. 4.28: Zeigen Sie, dass die Hausdorff-Reflektion (Prop. 4.25) der "Geraden mit zwei Ursprüngen" die gewöhnliche Gerade ist.

Definition. Sei $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ eine Menge von topologischen Räumen. Die *Box-Topologie* auf der Produktmenge $\prod\limits_{i \in I} X_i$ ist die von der Basis $\beta_{\text{box}} := \{\prod\limits_{i \in I} U_i \,|\, U_i \subset X_i \,\text{offen}\}$ generierte Topologie τ_{box} (Def. 2.7).

Aufgabe 2. (3pt) Zeigen Sie, dass die Box-Topologie im Allgemeinen nicht die universelle Eigenschaft des Produktes (Bsp. 6.12) hat: Finden Sie einen topologischen Raum Y und eine *nicht-stetige* Funktion $f : Y \to \left(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau_{\text{box}}\right)$, so dass alle Projektionen $p_i \circ f : Y \to X_i$ stetig sind.

Aufgabe 3. (5pt) Zeigen Sie, dass der Produktraum (Bsp. 6.23) $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \text{Disc}(\{0,1\})$ (von abzählbar vielen Kopien des diskreten 2-Punktraumes mit sich selbst) kein diskreter Raum ist. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \text{Disc}(\{0,1\}) & \longrightarrow & [0,1] \\ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2a_i}{3^{(i+1)}} \end{array}$$

als Funktion zischen dem Produktraum und dem Euklidischen abgeschlossenen Intervall. Zeigen Sie, dass diese Funktion 1) stetig ist 2) ein Homöomorphismus auf sein Bild (mit der Unterraum-Topologie) ist. Dieses Bild heißt auch der *Cantor-Raum.*

Aufgabe 4. (4pt) Verifizieren Sie Bsp. 6.29: Der Pushout der stetigen Randinklusion $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ entlang sich selbst ist die topologische n-Sphäre $S^n \simeq D^n \underset{S^{n-1}}{\sqcup} D^n$.

Aufgabe 5. (4pt) Nach Bsp. 6.26 ist jeder Equalizer von zwei stetigen Funktionen ein Unterraum. Zeigen Sie die Umkehrung: Für jeden Unterraum $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ gibt es einen Raum Y und stetige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$, so dass $A \simeq \text{eq}(f_1, f_2)$. (Hinweis: Betrachten Sie den Pushout (Bsp. 6.28) von i entlang sich selbst.)

Abgabe am 16.5. in der Vorlesung