Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 2

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. (4pt) Verifizieren Sie die Beispiele von T_n-Räumen in Bsp. 4.6 -4.9.

Aufgabe 2. (4pt) Betrachten Sie die Kreisfunktion $f : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(t) := (\cos(t), \sin(t))$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $[0, 2\pi) \to S^1$ kein Homeomorphismus ist (Gegenbeisp. 3.23) aber die induzierte Funktion $[0, 2\pi]/(0 \sim 2\pi) \to S^1$ schon (Bsp. 3.29).

Aufgabe 3. (5pt) Betrachten Sie die Einheitssphäre abzüglich eines Punktes $p \in S^2$ als Unterraum des euklidischen $\mathbb{R}^3$ (Def. 1.2, Bsp. 2.16). Zeigen Sie, dass dies homeomorph zur euklidischen Ebene ist: $S^2 \backslash \{p\} \simeq \mathbb{R}^2$.
Hinweis: Fassen Sie auch $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ als Unterraum auf und betrachten Sie die Relation "$x \in S^2 \backslash \{p\}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ liegen auf einer Geraden mit p" ("stereographische Projektion").

Aufgabe 4 (4pt)**.** Sei $K := \{1/n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \subset \mathbb{R}$. Betrachten Sie auf $\mathbb{R}$ die Topologie τ_K, die von der Basis $\beta_K := \{(a, b), (a, b) \backslash K\}_{a<b \in \mathbb{R}}$ generiert wird (Def. 2.7). Zeigen Sie, dass τ_K das Trennungsaxiom T_2 (Def. 4.4) aber nicht das Axiom T_3 (Def. 4.13) erfüllt.

Aufgabe 5. Vollziehen Sie den zweiten Teil des Beweises von Urysohn's lemma nach (Prop. 4.20).

Aufgabe 6. (3pt) Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $C_1, C_2 \subset X$ zwei disjunkte abgeschlossene Untermengen. Geben Sie eien Urysohn-Funktion an, die beide voneinander trennt (Def. 4.19).

Abgabe am 9.5. in der Vorlesung