Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie – Blatt 11

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. (10pt) Für eine Menge $\{(X_i, x_i)\}_{i \in I}$ von punktierten Räumen heißt

$$\bigvee_{i \in I} X_i := (\bigsqcup_{i \in I} X_i)/(x_j \sim x_k)_{j,k \in I}$$

deren Wedge-Summe. Betrachten Sie die n-Sphären S^n als punktierte Räume mit irgendeiner Wahl von Basispunkten.
Zeigen Sie, dass $S^1 \vee S^2$ eine Überlagerung hat, die homotopieäquivalent zu $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} S^2$ ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jeder euklidische Raum normal ist.

Aufgabe 3. Betrachten Sie den Quotientenraum eines Hausdorff-Raumes in dem ein Paar unterschiedlicher Punkte identifiziert wird. Ist dies wieder ein Hausdorff-Raum?

Aufgabe 4. Sei Y ein Hausdorff-Raum und seien $f, g : X \to Y$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass $\{x \in X | f(x) = g(x)\} \subset X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 5. Betrachten Sie $\mathbb{N}$ mit der diskreten und $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie. Sind folgende Abbildungen Einbettungen?
a) $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : n \mapsto 1/n$
b) $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto \begin{cases} 1/n & |n > 0 \\ 0 & |n = 0 \end{cases}$

Aufgabe 6. Sein X, Y topologische Räume und $A \subset X$ sowie $B \subset Y$ Untermengen. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B) = \mathrm{Cl}(A \times B)$
2. $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$

(Hier ist $\partial(-) = \mathrm{Cl}(-) \setminus \mathrm{Int}(-)$.)

Aufgabe 7. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Mannigfaltigkeiten?
1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$
2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

Abgabe von Aufgabe 1 am 18.7. in der Vorlesung