Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 10

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. (7pt) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen Einbettungen von glatten Mannigfaltigkeiten sind:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ die definierende Funktion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$;
2. für X eine glatte Mannigfaltigkeit, der Null-Schnitt des Tangentialbündels

$$X \overset{0}{\hookrightarrow} TX\,.$$

.

Aufgabe 2. (3pt) Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ einfach-zusammenhängend ist.
2. Sei $\gamma\colon [0,1] \to S^n$ eine Schleife, die als Abbildung nicht surjektiv ist. Zeigen Sie, dass γ homotop zu einer konstanten Schleife ist.

Aufgabe 3. (6pt) Sei $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die kanonische Einbettung. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(f) : \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

ein Gruppenisomorphismus ist.
Hinweis: Finden Sie erst einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (4pt) Zeigen Sie, dass $\pi_1(S^1)$ und also $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ nicht-trivial sind. Folgern Sie, dass es keinen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ gibt.

Abgabe am 11.7 in der Vorlesung