Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 1

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1. Vollziehen Sie die Beweise zu Prop. 2.31 und Prop. 2.35 nach.

Aufgabe 2 (4 pt)**.** Verifizieren Sie die Axiome für topol. Räume in Bsp. 2.14 - 2.18.

Aufgabe 3 (2 pt)**.** Bestimmen Sie die topologischen Abschlüsse (Def. 2.21) aller Punkte im Euklidischen Raum (Def. 1.6, Bsp. 2.9), und im Sierpinski Raum (Bsp. 2.11).

Aufgabe 4 (4 pt)**.** Verifizieren Sie die Stetigkeit der Abbildungen in Bsp. 3.5 - 3.13.

Aufgabe 5 (2 pt)**.** Zeigen Sie, dass die Menge der stetigen Abbildung aus einem topologischen Raum (X, τ) in den Sierpinski Raum (Bsp. 2.11) bijektiv zu τ ist.

Definition (Zariski-Topologie)**.** Sei k ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $k[X_1, \cdots, X_n]$ die Menge der Polynome in n Variablen über k. Für $\mathcal{F} \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ definiere

$$V(\mathcal{F}) := \left\{ \vec{x} \in k^n \,|\, \underset{f \in \mathcal{F}}{\forall} f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \right\} \subset k^n .$$

Setze $\tau_{\mathrm{Zar}} := \{k^n \backslash V(\mathcal{F}) \,|\, \mathcal{F} \subset k[X_1, \cdots, X_n]\}$.

Aufgabe 6 (4pt)**.** Zeigen Sie, dass $(k^n, \tau_{\mathrm{Zar}})$ ein topologischer Raum ist.

Aufgabe 7 (4pt)**.** Für $S \subset k^n$ bestimmen Sie $\mathcal{F}_S$, so dass $V(\mathcal{F}_S) = \mathrm{Cl}(S)$ (Def. 2.21).

Definition. Gegeben $\mathcal{F} \subset k[X_1, \cdots, X_n]$, setze

$$I(V(\mathcal{F})) := \left\{ f \in k[X_1, \cdots, X_n] \,|\, \underset{\vec{x} \in V(\mathcal{F})}{\forall} f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \right\} .$$

Aufgabe 8 (für Interessierte)**.** Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $V(\mathcal{F})$ ist irreduzibel (Def. 2.28).
- $I(V(\mathcal{F}))$ ist ein Primideal.

Abgabe am 2.5. in der Vorlesung