Übungen zur Topologie I - Blatt 1

Uni Bonn, SS 2018

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{H}_*$ eine Homologietheorie mit Werten in R-Moduln, die das Dimensionsaxiom erfüllt. Berechnen Sie $\mathcal{H}_n(S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie das sogenannte Fünfer-Lemma:

Folgendes Diagramm von R-Moduln sei kommutativ und habe exakte Zeilen

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "j_1"] & N_2 \arrow[r, "j_2"] & N_3 \arrow[r, "j_3"] & N_4 \arrow[r, "j_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

Sind f_2 und f_4 bijektiv, f_1 surjektiv und f_5 injektiv, dann ist f_3 bijektiv.

Aufgabe 3. Seien $\mathcal{H}_*$ und $\mathcal{K}_*$ Homologietheorien mit Werten in R-Moduln. Beweisen oder widerlegen Sie, dass man durch die direkte Summe, also den Funktor, der (X, A) den $\mathbb{Z}$-graduierten R-Modul $\{\mathcal{H}_n(X, A) \oplus \mathcal{K}_n(X, A) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ zuordnet, wieder eine Homologietheorie mit Werten in R-Moduln erhält.

Aufgabe 4. Sei $R \subseteq S$ ein Unterring des kommutativen Rings S. Es sei S als R-Modul frei. Sei $\mathcal{H}_*$ eine Homologietheorie mit Werten in R-Moduln.

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $S \otimes_R \mathcal{H}_*$ eine Homologietheorie mit Werten in S-Moduln ist.

Abgabe am 15.10. in der Vorlesung