Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 4

Uni Bonn, SS 2018

Aufgabe 13. Sei M das Möbius-Band, das man als den Quotientenraum von $[-1,1] \times [0,1]$ unter der von $(t,0) \sim (-t,1)$ erzeugten Äquivalenzrelation definiert. Sei ∂M sein Rand, d.h. der Teilraum der Äquivalenzklassen von Elementen der Gestalt (t,s) für $t \in \{-1,1\}$ und $s \in [0,1]$. Sei $i \colon \partial M \to M$ die Inklusion.

Konstruiere ein pushout der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \partial M \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ D^2 \arrow[r] & \mathbb{RP}^2 \end{tikzcd}$$

Aufgabe 14. Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Definiere ihren Abbildungszylinder $\mathrm{cyl}(f)$ durch das pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \times [0,1] \arrow[r] & \mathrm{cyl}(f) \end{tikzcd}$$

wobei i die Abbildung $x \mapsto (x,0)$ ist.

Zeige, dass die Abbildung $j \colon Y \to \mathrm{cyl}(f)$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 15. Seien (X,x) und (Y,y) punktierte topologische Räume. Zeige, dass die beiden Projektionen von $X \times Y$ auf X und Y einen Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x,y)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$$

induzieren.

Aufgabe 16. Beweise oder widerlege:

(a) Jede Abbildung $S^2 \to [0,1]$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

Abgabe am 08.05. in der Vorlesung oder am 09.05. zwischen 13:15 und 13:45 Uhr im MI Raum 3.016

(b) Jede Abbildung $[0,1] \to S^2$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(c) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ und S^{n-1} sind homöomorph.

(d) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ und S^{n-1} sind homotopieäquivalent.