Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 1

Uni Bonn, SS 2018

Aufgabe 1. Seien $|| - ||_1$ und $|| - ||_2$ zwei Normen auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Beweise oder widerlege, dass sie dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^n$ induzieren.

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise oder widerlege, dass es eine Metrik $\overline{d}$ auf X derart gibt, dass $\overline{d}(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in X$ gilt und (X, d) und $(X, \overline{d})$ homöomorph sind.

Aufgabe 3. Beweise oder widerlege, dass für jede Teilmenge A eines jeden topologischen Raumes X gilt:

(a) $\overline{\mathrm{int}(\overline{A})} = \overline{A}$,

(b) $\mathrm{int}(\overline{\mathrm{int}(\overline{A})}) = \mathrm{int}(\overline{A})$,

(c) $\mathrm{int}(\overline{\mathrm{int}(A)}) = \mathrm{int}(A)$,

(d) $\overline{\mathrm{int}(\overline{\mathrm{int}(A)})} = \overline{\mathrm{int}(A)}$,

wobei $\mathrm{int}(A) = A^\circ$ das Innere und $\overline{A}$ den Abschluss von A in X bezeichnen.

Aufgabe 4. Sei A eine Teilmenge des topologischen Raums X. Der Rand ∂A ist die Menge der Punkte x in X, für die jede offene Menge U von X mit $x \in U$ sowohl mit A als auch mit $X \setminus A$ einen nicht-leeren Schnitt haben. Beweise oder widerlege:

(a) ∂A ist abgeschlossen,

(b) $\overline{A} = A \cup \partial A$,

(c) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$,

(d) A abgeschlossen $\Longleftrightarrow \partial A = \emptyset$.

Abgabe am 19.4. in der Vorlesung