

# Diskrete Morsetheorie

Felix Jonathan Boes

Geboren am 18. November 1988 in Solingen

9. Juli 2012

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

MATHEMATISCHES INSTITUT

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER  
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Graphen</b>	<b>9</b>
<b>2 Diskrete Morsetheorie</b>	<b>13</b>
2.1 Notation . . . . .	13
2.2 Kombinatorische Kettenkomplexe und Morseflüsse . . . . .	13
2.3 Hauptsatz der diskreten Morsetheorie . . . . .	20
2.4 Algebraische Konstruktionen . . . . .	28
2.4.1 Koeffizientenerweiterung von Kettenkomplexen . . . . .	28
2.4.2 Koeffizientenerweiterung von Morseflüssen . . . . .	30
2.4.3 Direkte Summen von Morseflüssen . . . . .	32
2.4.4 Tensorprodukte von Morseflüssen . . . . .	33
2.4.5 Dualisieren von Morseflüssen . . . . .	37
<b>3 Ein Anwendungsbeispiel</b>	<b>39</b>
3.1 Motivation . . . . .	39
3.2 Faktorabilität der symmetrischen Gruppe . . . . .	39
3.3 Beschreibung der Zellen . . . . .	42
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>47</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>49</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>50</b>



# Einleitung

Gegeben eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit  $X$ , so fragt man sich, wie man ihre Homologie berechnen kann. Das Problem kann mit Hilfe der klassischen Morsetheorie vereinfacht werden. Dazu muss eine sogenannte Morsefunktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  gefunden werden, mit der man dann eine Zellenzerlegung von  $X$  konstruieren kann. Eine Forderung an  $f$  ist, dass die kritischen Stellen eine diskrete Menge bilden. Jeder kritischen Stelle  $x$  weist man ihren Index  $\text{Ind}(x) \in \mathbb{N}$  zu, der durch den Gradientenfluss von  $f$  bestimmt wird. Die Mannigfaltigkeit  $X$  kann dann zerlegt werden und man konstruiert einen homotopieäquivalenten CW-Komplex, der in jedem Grad  $n$  genauso viele Zellen hat, wie es kritische Stellen  $x$  mit  $\text{Ind}(x) = n$  gibt. Falls es uns gelingt, eine Morsefunktion mit besonders wenig kritischen Stellen zu finden, ist der zugehörige CW-Komplex klein und die Chancen stehen gut, dass die Homologie einfach berechnet werden kann.

In [For02] führt Forman die sogenannte diskrete Morsetheorie ein. Sie kann als kombinatorische Variante der klassischen Theorie verstanden werden und liefert vergleichbare Resultate. Hier gehen wir davon aus, dass es einen freien Kettenkomplex  $C$  von endlichem Typ gibt, der dieselbe Homologie wie  $X$  besitzt. Beispielsweise ist  $X$  ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen. Die diskrete Morsetheorie erlaubt es uns, auch in diesem Kontext von einer Morsefunktion  $f$  und ihren kritischen Stellen zu sprechen. Weiterhin gibt es dann einen homotopieäquivalenten Kettenkomplex, der von den kritischen Stellen erzeugt wird.

Die diskrete Morsetheorie liefert eine weitere Möglichkeit, einen kleineren, homotopieäquivalenten Kettenkomplex zu konstruieren. Dazu notiert man einen freien Kettenkomplex von endlichem Typ als gewichteten Graphen, wobei jeder Knoten einem Basiselement  $b_i$  entspricht. Eine Kante  $(b_i, b_j)$  mit nicht verschwindendem Gewicht  $\lambda$  existiert genau dann, wenn es den entsprechenden Eintrag des Differentials  $\partial_{b_j, b_i} = \lambda$  gibt. Ein Morsefluss  $F$  ist ein Matching in den Kanten mit invertierbarem Gewicht, das einer weiteren Bedingung genügt. Dann definiert jeder Knoten, der nicht in  $F$  liegt, genau einen Erzeuger des sogenannten Morsekompleses.

Eine Anwendung dieser Theorie findet sich beispielsweise bei der Homologieberechnung des Modulraums  $\mathfrak{M}_{g,1}^m$  Riemannscher Flächen von topologischem Geschlecht  $g$  mit  $m$  Punktierungen und einer Randkurve. In [Bö90], [Bö03] und [Bö05] zeigt Bödigheimer, dass es einen endlichen, bisimplizialen Komplex  $\overline{P}$  mit Unterkomplex  $P'$  gibt, sodass  $\overline{P} \setminus P'$  eine Mannigfaltigkeit und homotopieäquivalent zu  $\mathfrak{M}_{g,1}^m$  ist. Die Kohomologie kann nun mittels Poincaré-Lefschetz-Dualität bestimmt werden

$$H^{d-n}(\mathfrak{M}_{g,1}^m) \cong H_n(\overline{P}, P').$$

Mit Hilfe der diskreten Morsetheorie zeigen Ehrenfried in [Ehr98] und [Ehr04] sowie Abhau in [Abh05], wie die Homologie für  $2g + m \leq 6$  maschinell berechnet werden kann. Außerdem bestimmt Mehner in [Meh11] einen Teil der Erzeuger.

## Aufbau dieser Arbeit

Da wir Kettenkomplexe als Graphen notieren wollen, wiederholen wir im ersten Kapitel alle grundlegenden Definitionen.

Im zweiten Kapitel machen wir uns mit den Grundbegriffen der diskreten Morsetheorie vertraut, ausgehend von einem freien Kettenkomplex  $C$  von endlichem Typ mit ausgezeichneten Basen  $\mathfrak{B}$ . Neben elementaren Definitionen und Beispielen – die in der Sprache der Graphentheorie formuliert werden – machen wir uns klar, was diese Aussagen in der ursprünglichen Notation bedeuten. So stellt sich beispielsweise heraus, dass ein Matching  $F$  genau dann ein Morsefluss ist, wenn gewisse Teilmatrizen der Differentiale obere Dreiecksgestalt haben.

Zu einem Morsefluss  $F$  definieren wir – ebenfalls graphentheoretisch – den Morsekomplex  $\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)$ . Dieser wird von allen kritischen Knoten erzeugt. Die Differentiale werden durch alle Wege im  $F$ -invertierten Graphen  $G[F^{-1}]$  bestimmt. Im zweiten Abschnitt beweisen wir den folgenden Hauptsatz.

**Hauptsatz.** *Sei  $F$  ein Morsefluss. Dann ist der Morsekomplex von  $C$  bezüglich  $\mathfrak{B}$  und  $F$  ein homotopieäquivalenter Unterkomplex von  $C$ .*

$$\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F) \simeq C$$

Nachdem wir Morsekomplexe verstanden haben, konzentrieren wir uns im dritten Abschnitt darauf, algebraische Konstruktionen sinnvoll auf Morseflüsse zu erweitern. Wir wollen die Koeffizienten vermöge eines unitalen Ringhomomorphismus  $\zeta$  erweitern

$$\mathbb{M}(\text{Erw}_{\zeta}(C), \text{Erw}_{\zeta}(\mathfrak{B}), \text{Erw}_{\zeta}(F)) \cong \text{Erw}_{\zeta}(\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)),$$

Summen und Tensorprodukte bilden

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(C_1 \oplus C_2, \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2, F_1 \oplus F_2) &\cong \mathbb{M}(C_1, \mathfrak{B}_1, F_1) \oplus \mathbb{M}(C_2, \mathfrak{B}_2, F_2) \\ \mathbb{M}(C_1 \otimes C_2, \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2, F_1 \otimes F_2) &\cong \mathbb{M}(C_1, \mathfrak{B}_1, F_1) \otimes \mathbb{M}(C_2, \mathfrak{B}_2, F_2) \end{aligned}$$

und Kettenkomplexe dualisieren

$$\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)^* \cong \mathbb{M}(C^*, \mathfrak{B}^*, F^*).$$

Zusätzlich sollen die jeweiligen Isomorphismen kanonisch sein.

Im dritten Kapitel zeigen wir, wie man die diskrete Morsetheorie benutzen kann, um die Homologie eines nichttrivialen Beispiels auszurechnen. Der zu untersuchende Komplex wurde allerdings nicht konstruiert, um künstlich eine Anwendung zu schaffen, sondern spielt bei der Berechnung von  $H_n(\overline{P}, P')$  eine Rolle.

## **Danksagung**

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um mich an dieser Stelle bei allen zu bedanken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben. Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Carl-Friedrich Böttgheimer, dass er sich immer die Zeit genommen hat, meine Fragen zu beantworten. Meinen Kommilitonen Birthe Frenzel und Anna Hermann danke ich für das Lesen und Korrigieren meiner Arbeit. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für das Korrekturlesen sowie meiner gesamten Familie für die moralische Unterstützung und möchte mich abschließend besonders bei meiner Mutter bedanken denn ohne ihre finanzielle Rückendeckung wäre ich sicherlich in der Kürze nicht so weit gekommen.





# 1 Graphen

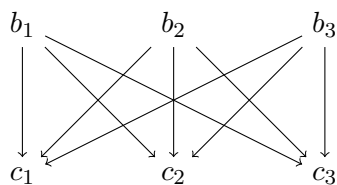
Graphen bieten die Grundlage, um eine bestimmte Klasse von Kettenkomplexen auf eine andere Art zu notieren. Dieses Kapitel fasst die notwendigen Definitionen und Erkenntnisse zu Graphen zusammen, die in den folgenden Kapiteln vorausgesetzt werden.

Bei uns sind Graphen immer gerichtet und zwischen zwei Knoten benötigen wir höchstens eine Kante. Deswegen können wir folgende Definition verwenden.

**Definition 1.1** (Graph). Ein **Graph** ist ein Tupel  $G = (V, E)$  mit **Knotenmenge**  $V$  und **Kantenmenge**  $E \subset V \times V$ , wobei wir keine Kanten der Form  $(v, v)$  zulassen. Ein Knoten  $v$  besitzt eine **ausgehende** bzw. **eingehende Kante**, wenn es eine Kante der Form  $(v, w)$  bzw.  $(w, v)$  gibt.

Häufig notiert man Graphen durch ein Diagramm, indem Knoten und Kanten in die Ebene eingezeichnet werden. Dabei kann es sein, dass sich Kanten überschneiden, ohne dass der Schnittpunkt ein Knoten ist. Deswegen wollen wir Knoten durch dicke Punkte oder Namen auszeichnen. Am folgenden Beispiel werden wir diese und folgende Definitionen verdeutlichen.

**Beispiel 1.2.** Sei  $V = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$  und  $E = \{(b_i, c_j) \mid 1 \leq i, j \leq 3 \text{ und } i \neq j\}$ . Dann wird  $G = (V, E)$  durch das folgende Diagramm beschrieben.

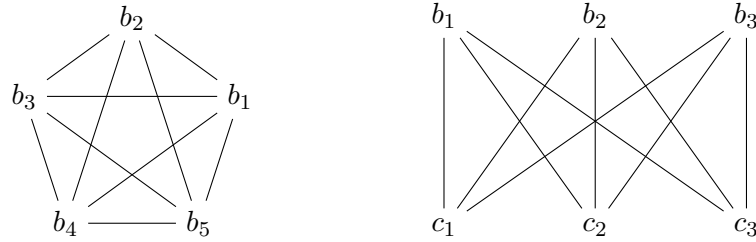


Die Knoten  $b_i$  besitzen ausschließlich ausgehende Kanten und die  $c_i$  nur eingehende.

Wir gönnen uns einen Ausblick zur naheliegenden Frage, welche Graphen ohne Überschneidungen in die Ebene „eingebettet“ werden können. Das heißt, man definiert zu einem Graphen  $G = (V, E)$  einen CW-Komplex  $X$  mit 0-Zellen  $V$  und 1-Zellen  $E$ , die in naheliegender Weise an die 0-Zellen geklebt werden. Die Frage ist nun, ob der Raum  $X$  eine Einbettung

## 1. Graphen

$X \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  besitzt. Wir betrachten die beiden folgenden ungerichteten Graphen.



Der linke trägt den Namen  $K_5$  und der rechte heißt  $K_{3,3}$ . Kuratowski hat im Jahre 1930 den folgenden erstaunlichen Satz bewiesen.

**Satz 1.3** (Kuratowski (1930)). *Ein endlicher Graph lässt sich genau dann in die Ebene einbetten, wenn er keinen Teilgraph enthält, der zu  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  homöomorph ist.*<sup>1</sup>

Kehren wir nun zu unserem Thema zurück.

**Definition 1.4** (Pfad). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine Folge von Kanten der Form

$$\gamma = (v_1, v_2) (v_2, v_3) \dots (v_{n-1}, v_n)$$

heißt **Pfad**. Eine kürzere Notation für  $\gamma$  ist

$$\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n).$$

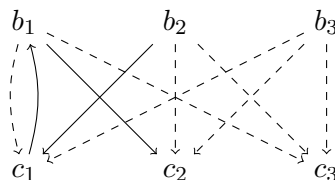
Der Knoten  $v_1$  heißt **Startknoten** und  $v_n$  heißt **Endknoten**. Wenn wir ausdrücken wollen, dass  $\gamma$  ein Weg von  $v$  nach  $w$  ist, ohne die besuchten Kanten zu erwähnen, schreiben wir

$$\gamma: v \rightsquigarrow w.$$

Die Menge der Wege von  $v$  nach  $w$  notieren wir mit  $\Gamma(G, v, w)$ .

Ein Pfad mit identischem Start- und Endknoten heißt **Kreis**. Ein Graph, der keine Kreise enthält, heißt **kreisfrei**.

**Beispiel 1.5.** Wenn wir zu dem in Beispiel 1.2 beschriebenen Graphen noch die Kante  $(c_1, b_1)$  hinzufügen, gibt es offenbar die beiden Kreise  $(b_1, c_1, b_1)$  und  $(c_1, b_1, c_1)$ . In diesem Beispiel notieren wir die Kanten des Pfades  $\gamma = (b_2, c_1, b_1, c_2)$  mit Startknoten  $b_2$  und Endknoten  $c_2$ , als durchgezogenen Linien. Die restlichen Kanten sind gestrichelt.



<sup>1</sup>Beweise des Satzes finden sich beispielsweise in Kuratowski, Kazimierz: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. In: *Fundamenta Mathematicae* 15 (1930), S. 271–283 oder Thomassen, Carsten: *Kuratowski's Theorem*. In: *Journal of Graph Theory* 48 (1981), Nr. c, S. 1–35.

**Definition 1.6** (Gewichteter Graph). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $\mathbb{K}$  ein Ring. Dann heißt eine Abbildung  $\kappa: E \rightarrow \mathbb{K}$  **Gewicht** und  $G = (V, E, \kappa)$  **gewichteter Graph**.

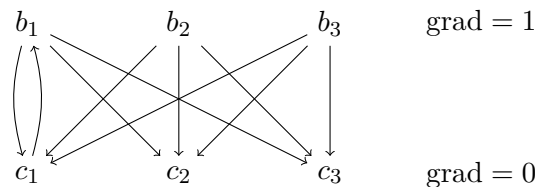
Sei  $\gamma: (v_1, \dots, v_n)$  ein Weg. Dann trägt  $\gamma$  das **Gewicht**

$$g(\gamma) = \kappa((v_{n-1}, v_n)) \cdot \dots \cdot \kappa((v_1, v_2)).$$

Gewichte werden oft neben den jeweiligen Kanten notiert. Man beachte, dass bei nicht kommutativen Ringen die vorgeschriebene Reihenfolge der einzelnen Faktoren eingehalten werden muss.

**Definition 1.7** (Graduierter Graph). Falls es eine Funktion  $\text{grad}: V \rightarrow \mathbb{Z}$  gibt, heißt der Graph **graduierter**. In diesem Fall heißt eine Kante  $(v, w)$  **steigend**, falls  $\text{grad}(v) < \text{grad}(w)$ , und **fallend**, falls  $\text{grad}(v) > \text{grad}(w)$  erfüllt ist. Eine Kante, die den Grad nicht verändert, bekommt keinen zusätzlichen Namen. Man notiert steigende Kanten mit  $v \nearrow w$  und fallende mit  $v \searrow w$ .

**Beispiel 1.8.** Wir führen die visuell naheliegende Graduierung  $\text{grad}(b_i) = 1$  und  $\text{grad}(c_i) = 0$  ein. Dann ist  $c_1 \nearrow b_1$  die einzige steigende Kante. Die übrigen Kanten sind fallend.

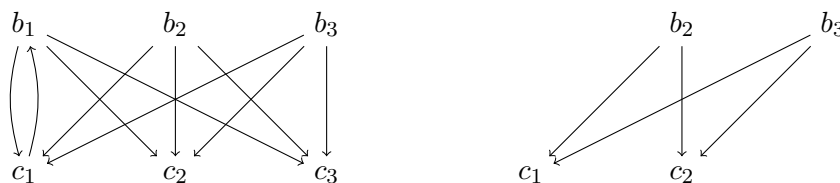


**Definition 1.9** (Aufgespannter Teilgraph). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $W \subset V$ . Dann ist die Menge der Kanten, die zwischen Knoten aus  $W$  verlaufen,

$$E_W = \{(v, w) \in E \mid v, w \in W\}.$$

Man nennt  $G_W = (W, E_W)$  den von  $W$  **aufgespannten Teilgraphen**.

**Beispiel 1.10.** Für die Knotenmenge  $W = \{b_2, b_3, c_1, c_2\} \subset V$  ist der von  $W$  aufgespannte Teilgraph  $G_W = (W, E_W)$  auf der rechten Seite eingetragen. Zum Vergleich steht der ursprüngliche Graph  $G = (V, E)$  links daneben.

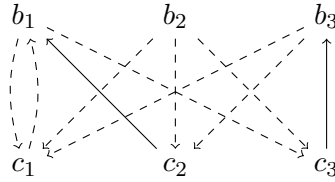


**Definition 1.11** ( $F$ -invertiert). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $F \subset E$ , sodass für alle Kanten  $(v, w) \in F$  die Kante  $(w, v)$  nicht in  $E$  liegt. In diesem Fall entsteht  $E[F^{-1}]$  aus  $E$  durch Umkehren aller Kanten  $e \in F$ , das heißt,

$$E[F^{-1}] = \{(w, v) \mid (v, w) \in F\} \cup E \setminus F.$$

Die Kanten in  $\{(w, v) \mid (v, w) \in F\}$  heißen **invertiert** und  $G[F^{-1}] = (V, E[F^{-1}])$  nennt man den  **$F$ -invertierten Graphen**.

**Beispiel 1.12.** Die Kantenmenge  $F = \{(b_1, c_2), (b_3, c_3)\}$  genügt den Voraussetzungen, denn weder  $(c_2, b_1)$  noch  $(c_3, b_3)$  sind in  $E$  enthalten. Im  $F$ -invertierten Graphen  $G[F^{-1}]$  sind die invertierten Kanten  $(c_2, b_1)$  und  $(c_3, b_3)$  als durchgezogene Linien angedeutet, die übrigen Kanten sind gestrichelt.



**Definition 1.13** (Matching). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $F \subset E$ , sodass jeder Knoten in höchstens einer Kante von  $F$  enthalten ist. Man nennt  $F$  ein **Matching** oder eine **Paarung**. Ist  $(v, w) \in F$ , so heißen  $v$  und  $w$  **gepaart** oder **Partner**, kurz  $w = p(v)$  bzw.  $v = p(w)$ .

Die Abbildung  $p$  ist eine Involution, also ist  $p \circ p = \text{id}_V$ .

**Beispiel 1.14.** Offenbar ist  $\{(c_1, b_1), (b_2, c_3)\}$  ein Matching. Die Knoten  $c_1$  und  $b_1$  sind gepaart, ebenso wie  $b_2$  und  $c_3$ .

Genauso leicht sieht man ein, dass  $\{(c_1, b_1), (b_1, c_2)\}$  kein Matching ist.

## 2 Diskrete Morsetheorie

In diesem Kapitel wollen wir mit Hilfe der diskreten Morsetheorie die Homologie eines gegebenen Kettenkomplexes berechnen, indem wir zeigen, wie man aus einem *Morsefluss*  $F$  einen homotopieäquivalenten Unterkomplex gewinnt. Der zugrundeliegende Ring ist aus notationellen Gründen kommutativ, denn die vorgestellten Beweise lassen sich leicht auf nicht-kommutative Ringe verallgemeinern.

Diese Arbeit orientiert sich an Mehners Diplomarbeit [Meh11]. Immer wenn ein hier vorgestellter Beweis die gleiche Idee formalisiert, entspricht die nebenstehende Zahl der in [Meh11] verwendeten Nummerierung.

### 2.1 Notation

Es bezeichne  $\mathbb{K}$  unseren kommutativen Grundring mit Eins. Die invertierbaren Elemente bilden unter Multiplikation die Einheitengruppe  $\mathbb{K}^\times$ . Wir fixieren einen freien Kettenkomplex  $(C_n, \partial_n)_n$  von endlichem Typ, das heißt, fast alle Moduln verschwinden. Außerdem wählen wir für jeden Grad  $n$  eine geordnete Basis  $\mathfrak{B}_n$ . Wir sagen  $b_i \in \mathfrak{B}_n$  ist kleiner als  $b_j \in \mathfrak{B}_n$ , falls  $i < j$ . Diese Ordnung setzen wir fort und sagen,  $b \in \mathfrak{B}_n$  ist kleiner als  $b' \in \mathfrak{B}_m$ , wann immer  $n < m$  ist. Die Randabbildung  $\partial_n$  identifizieren wir mit ihren darstellenden Matrizen. Im Folgenden ist ein Kettenkomplex  $C$  immer von dieser Form, das heißt,  $C = (C_n, \partial_n, \mathfrak{B}_n)_n$ .

### 2.2 Kombinatorische Kettenkomplexe und Morseflüsse

In Kapitel 1 wurden Graphen eingeführt, um Kettenkomplexe  $C = (C_n, \partial_n, \mathfrak{B}_n)_n$  durch eine neue Notation beschreiben zu können.

**Definition 2.2.1** (Kombinatorischer Kettenkomplex). Sei  $G = (V, E, \kappa)$  der gewichtete, graduierte Graph, bestehend aus

1. der graduierten Knotenmenge

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{B}_n.$$

2. der Kantenmenge

$$E = \{(b_i, b_j) \in V \times V \mid \text{grad}(b_i) = \text{grad}(b_j) + 1 \text{ und } \partial_{j,i} \neq 0\},$$

das heißt, jeder Nichtnulleintrag einer Randabbildung definiert genau eine Kante zwischen den zugehörigen Basiselementen. Diese ist eine fallende Kante.



*Beweis (M2).* Falls  $G$  ein kombinatorischer Kettenkomplex von  $C$  ist, gilt die erste Bedingung bereits nach Definition. Die darstellende Matrix von  $\oplus_n \partial_n$  zur Basis  $\oplus_n \mathfrak{B}_n$  entspricht der Matrix  $D$  und genügt der Bedingung.

Andererseits definieren wir  $C_n$  als den von  $\{v \in V \mid \text{grad}(v) = n\}$  frei erzeugten  $\mathbb{K}$ -Modul. Die Matrix  $D$  beschreibt dann für jeden Grad eine Randabbildung.  $\square$

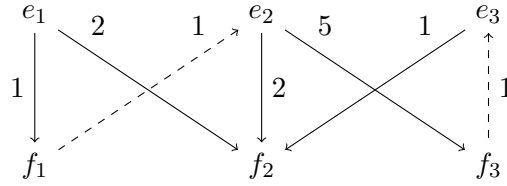
**Definition 2.2.4** (Morsefluss). Sei  $F \subset \{e \in E \mid \kappa(e) \in \mathbb{K}^\times\}$  eine Teilmenge der invertierbaren Kanten. Wir nennen  $F$  **Morsefluss**, falls  $F$  ein Matching und  $G[F^{-1}]$  kreisfrei ist. In diesem Fall statten wir  $G[F^{-1}]$  mit Gewichten  $\kappa_F$  aus

$$\kappa_F((v, w)) = \begin{cases} \kappa((v, w)) & (w, v) \notin F \\ -\kappa((w, v))^{-1} & (w, v) \in F \end{cases}.$$

Ist  $(v, w) \in F$ , so heißt  $v$  **kollabierbar** und  $w$  **redundant**. Alle anderen Knoten heißen **kritisch** oder auch **essentiell**.

*Bemerkung.* Jeder Kettenkomplex besitzt einen Morsefluss, nämlich das leere Matching. Außerdem kann  $G[F^{-1}]$  keine Kanten von Gewicht Null haben, denn der kombinatorische Kettenkomplex hatte bereits keine.

**Beispiel 2.2.5.** In unserem Beispiel ist  $F = \{(e_2, f_1), (e_3, f_3)\}$  ein Morsefluss, denn  $F$  ist offenbar ein Matching und  $G[F^{-1}]$  ist kreisfrei. Die invertierten Kanten sind gestrichelt.



Die Knoten  $e_1$  und  $f_2$  sind essentiell,  $e_2$  und  $e_3$  sind kollabierbar und  $f_1$  und  $f_3$  sind redundant.

Im Folgenden fixieren wir einen Morsefluss  $F$  sowie den kombinatorischen Kettenkomplex  $G$  zu  $(C_n, \partial_n, \mathfrak{B}_n)_n$  und damit auch den  $F$ -invertierten Graphen  $G[F^{-1}]$ .

Die Bedingung an  $F$ , ein Matching zu sein, ist leicht überprüfbar, denn man muss nur zählen, ob jeder Knoten höchstens einmal in  $F$  vorkommt. Ob ein gegebenes Matching einen kreisfreien Graphen erzeugt, ist hingegen etwas aufwändiger.

**Lemma 2.2.6.** Jeder kombinatorische Kettenkomplex ist kreisfrei.

*Beweis (M3).* Sei  $e = (v, w)$  eine beliebige Kante. Diese muss nach Definition fallend sein, denn  $\text{grad}(v) = \text{grad}(w) + 1$ . Angenommen es gibt einen Kreis  $\gamma: v \rightsquigarrow v$  der Länge  $n$ . Dieser besteht dann aber ausschließlich aus fallenden Kanten. Damit folgt aus

$$\text{grad}(v) = \text{grad}(v) + n$$

bereits  $n = 0$ . Ein Kreis besteht aber aus mindestens einer Kante.  $\square$

**Lemma 2.2.7.** *Sei  $F$  ein Matching. Dann hat jeder Weg in  $G[F^{-1}]$ , der nur aus steigenden Kanten besteht, die Länge Eins.*

*Beweis.* Sei  $s_0 \nearrow s_1$  eine steigende Kante. Dann ist  $s_1$  der Partner von  $s_0$  oder kurz  $s_0 = p(s_1)$ . Außerdem ist  $\text{grad}(s_1) = \text{grad}(s_0) + 1$ . Angenommen es existiert die Kante  $s_1 \nearrow s_2$ , dann ist  $s_2 = p(s_1) = s_0$  und somit wäre

$$\text{grad}(s_0) = \text{grad}(s_2) = \text{grad}(s_1) + 1 = \text{grad}(s_0) + 2.$$

□

**Satz 2.2.8.** *Sei  $F$  ein Matching. Der  $F$ -invertierte Graph  $G[F^{-1}]$  ist genau dann kreisfrei, wenn es keine paarweise verschiedenen Knoten  $b_1, \dots, b_n$  vom selben Grad gibt, sodass Kanten*

$$p(b_1) \searrow b_2, \quad p(b_2) \searrow b_3, \quad \dots, \quad p(b_n) \searrow b_1$$

*existieren.*

*Beweis (M7).* Angenommen solche Knoten  $b_i$  existieren. Nach Konstruktion existieren in  $G[F^{-1}]$  die Kanten  $b_i \nearrow p(b_i)$ . Da  $b_i$  mit  $p(b_i)$  gepaart ist, kann  $b_{i+1}$  nicht zusätzlich mit  $p(b_i)$  gepaart sein und die oben beschriebenen Kanten bleiben in  $G[F^{-1}]$  erhalten.<sup>1</sup> Wir erhalten einen Kreis

$$b_1 \nearrow p(b_1) \searrow b_2 \nearrow p(b_2) \searrow \dots \nearrow p(b_n) \searrow b_1.$$

Wir nehmen nun an, dass  $G[F^{-1}]$  einen Kreis  $\gamma = (s_1, \dots, s_m, s_1)$  besitzt. Ohne Einschränkung ist  $s_1$  von kleinstem Grad. Wir zeigen, dass die Knoten  $b_i = s_{2i+1}$  die Bedingung erfüllen. Es ist  $b_1 \nearrow s_2$  eine steigende Kante, also  $p(b_1) = s_2$ . Wegen Lemma 2.2.7 muss  $p(b_1) \searrow b_2$  eine fallende Kante sein und  $b_2$  hat denselben minimalen Grad wie  $b_1$ . Induktiv müssen alle  $b_i$  denselben Grad haben und  $(s_{2i+2}, s_{2i+3})$  ist eine fallende Kante der Form  $p(b_i) \searrow b_{i+1}$ . □

Wenn wir in die alte Notation zurückgehen, das heißt, wir notieren einen Kettenkomplex als Sequenz von Moduln, so wollen wir nun verstehen, was ein Morsefluss ist. Die Eigenschaft, ein Matching in den Kanten mit invertierbaren Gewichten zu sein, heißt, wir bilden Paare von Basiselementen  $(k_i, r_j)$  mit  $\text{grad}(k_i) = \text{grad}(r_j) + 1$ , sodass jedes Basiselement höchstens einen Partner hat und die zugehörigen Einträge in den Randabbildungen invertierbar sind. Wir müssen uns also noch klar machen, was es heißt, dass der  $F$ -invertierte Graph  $G[F^{-1}]$  kreisfrei ist. Um die Notation zu vereinfachen, nennen wir die Knoten eines generellen Matchings  $F$  analog zu Definition 2.2.4 auch kollabierbar, redundant und essentiell.

**Lemma 2.2.9.** *Entstehe  $(\mathfrak{B}'_n)_n$  aus  $(\mathfrak{B}_n)_n$  durch Permutation der Basiselemente. Dann sind die kombinatorischen Kettenkomplexe von  $(C_n, \partial_n, \mathfrak{B}_n)_n$  und  $(C_n, \partial_n, \mathfrak{B}'_n)_n$  identisch.*

*Beweis.* Die ungeordneten Basen sind identisch. □

---

<sup>1</sup>Hier ist  $b_{n+1} = b_1$ .



Für ein gewähltes Matching  $F$  kann man somit ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass die geordneten Basen  $\mathfrak{B}_n$  die Form  $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n^R \oplus \mathfrak{B}_n^K \oplus \mathfrak{B}_n^E$  haben, wobei  $\mathfrak{B}_n^R$  die redundanten,  $\mathfrak{B}_n^K$  die kollabierbaren,  $\mathfrak{B}_n^E$  die essentiellen Knoten enthält und zusätzlich für alle  $k_i \in \mathfrak{B}_n^K$  und  $r_i \in \mathfrak{B}_{n-1}^R$  die Kante  $(k_i, r_i)$  im Matching  $F$  liegt. Damit hat jedes Differential  $\partial_n$  die Form

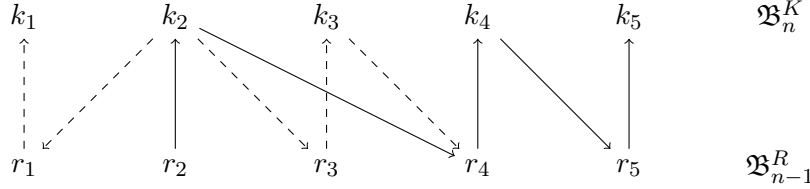
$$\partial_n = \left( \begin{array}{c|c|c} R_n & K_n & E_n \\ \hline R'_n & K'_n & E'_n \\ \hline R''_n & K''_n & E''_n \end{array} \right),$$

wobei  $R_n$  die Blockmatrix ist, die entsteht, wenn wir  $\partial_n$  auf das Erzeugnis von  $\mathfrak{B}_n^R$  bzw.  $\mathfrak{B}_{n-1}^R$  einschränken bzw. koeinschränken. Die anderen Blöcke entstehen analog.

**Lemma 2.2.10.** *Sei  $F$  ein Matching,  $G[F^{-1}]$  kreisfrei und  $\{k_1, \dots, k_m\} \subset \mathfrak{B}_n^K$  eine Menge kollabierbarer Knoten von gleichem Grad. Bezeichne  $r_1, \dots, r_m \in \mathfrak{B}_{n-1}^R$  die jeweiligen Partner, das heißt,  $(k_i, r_i) \in F$ . Dann gibt es – in dem von  $\{k_1, \dots, k_m\} \cup \{r_1, \dots, r_m\}$  aufgespannten Teilgraph von  $G[F^{-1}]$  – einen Knoten  $k_i$ , der keine ausgehenden Kanten besitzt.*

*Beweis.* Der Graph  $G[F^{-1}]$  ist kreisfrei, somit gibt es einen Weg  $\gamma$ , der zwei kollabierbare Knoten verbindet und mit dieser Eigenschaft maximale Länge hat. Sei  $k_i$  der Endknoten. Falls es eine ausgehende Kante  $(k_i, r_j)$  gäbe, so wäre der Weg  $\gamma(k_i, r_j, k_j)$  länger als  $\gamma$ .  $\square$

**Beispiel 2.2.11.** Für  $\{k_2, k_4, k_5\} \subset \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\} = \mathfrak{B}_n^K$  ist der zu betrachtende Teilgraph in  $G[F^{-1}]$  mit durchgezogenen Kanten angedeutet. Der Knoten  $k_5$  hat keine ausgehende Kante.



**Satz 2.2.12.** *Ein Matching  $F$  von invertierbaren Kanten ist genau dann ein Morsefluss, wenn die Basen  $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n^R \oplus \mathfrak{B}_n^K \oplus \mathfrak{B}_n^E$  so nummeriert werden können, dass die darstellenden Matrizen  $K_n$  obere Dreiecksgestalt haben und die Diagonaleinträge den Gewichten der Kanten des Matchings entsprechen.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Wir beweisen die Aussage für jedes  $n$  induktiv. Sei  $J_1 = \mathfrak{B}_n^K$  und  $L_1 = \mathfrak{B}_{n-1}^R$ . Nach Lemma 2.2.10 gibt es einen Knoten  $k_1 \in J_1$ , für den es keine Kante  $(k_1, r_j)$  mit  $r_j \in L_1$  gibt. Wir können nach Lemma 2.2.9 davon ausgehen, dass  $k_1$  bzw. sein Partner  $r_1$  jeweils der erste Basisvektor in  $\mathfrak{B}_n^K$  bzw.  $\mathfrak{B}_{n-1}^R$  ist. Sei  $J_2 = J_1 \setminus \{k_1\}$ ,  $L_2 = L_1 \setminus \{r_1\}$  und bezeichne  $\alpha_1 = \kappa((k_1, r_1))$  das Gewicht der Kante  $(k_1, r_1) \in F$ . Dass es keine Kante  $(k_1, r_j)$  mit  $r_j \in L_1$  gibt, bedeutet, dass  $(\partial_n)_{L_1}^{J_1}$  die Form

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ (\partial_n)_{L_2}^{J_2} \\ \end{array}$$

hat. Nun wendet man dasselbe Argument induktiv auf alle  $L_{i+1} = L_i \setminus \{k_i\}$  an.

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen es existiert in  $G[F^{-1}]$  ein Kreis. Nach Satz 2.2.8 wissen wir, dass es redundante Knoten  $b_1, \dots, b_m$  vom selben Grad gibt, sodass Kanten

$$p(b_1) \searrow b_2, \quad p(b_2) \searrow b_3, \quad \dots, \quad p(b_m) \searrow b_1$$

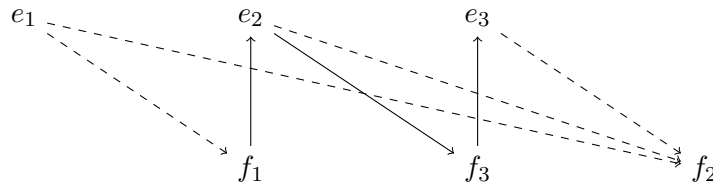
existieren. Nach Voraussetzung entsprechen die Diagonaleinträge der darstellenden Matrix den Gewichten der invertierbaren Kanten. Das heißt, dass der Zeilenindex von einem  $b_i$  gleich dem Spaltenindex seines Partners  $p(b_i)$  ist. Wir können davon ausgehen, dass  $b_1$  das größte Basiselement unter den  $b_i$  ist (vgl. Abschnitt 2.1). Damit ist der Spaltenindex von  $p(b_m)$  kleiner als der Zeilenindex von  $b_1$ . Aber die darstellende Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix und das heißt, die Kante  $(p(b_m), b_1)$  muss das Gewicht Null tragen. Der kombinatorische Kettenkomplex enthält nach Definition 2.2.1 keine Kanten mit verschwindendem Gewicht, der  $F$ -invertierte Graph  $G[F^{-1}]$  nach Definition 2.2.4 somit auch nicht. Eine solche Kante kann es also nicht geben.  $\square$

Man kann sich auch anschaulich klar machen, was es heißt, dass  $K$  obere Dreiecksgestalt besitzt. Wenn wir die kollabierbaren Knoten aufsteigend bezüglich ihrer Nummerierung von rechts nach links in die Ebene eintragen und die zugehörigen redundanten Knoten darunter platzieren, so verlaufen steigende Kanten von unten nach oben und fallende Kanten von links nach rechts.

**Beispiel 2.2.13.** In unserem obigen Beispiel 2.2.2 permutieren wir die Basen, um  $\mathfrak{B}_1 = (e_3, e_2, e_1)$  und  $\mathfrak{B}_0 = (f_3, f_1, f_2)$  zu erhalten. Damit wird der Kettenkomplex durch das folgende Diagramm beschrieben.

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

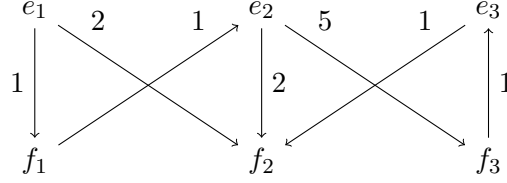
Den kombinatorischen Kettenkomplex notieren wir vermöge der Nummerierung der kollabierbaren Knoten, wobei (zur besseren Lesbarkeit) der essentielle Knoten  $e_1$  im Grad 1 links und der essentielle Knoten  $f_2$  im Grad 0 rechts eingetragen wird. Die Kanten des von den kollabierbaren und redundanten Knoten induzierten Teilgraphen sind durchgezogen.



**Definition 2.2.14** (Verbindungszahl). Sei  $F$  ein Morsefluss sowie  $b$  und  $c$  Knoten in  $G[F^{-1}]$ . Die **Verbindungszahl**  $\vartheta(b, c)$  ist die Summe der Gewichte aller Wege von  $b$  nach  $c$

$$\vartheta(b, c) = \sum_{\substack{\gamma: b \rightsquigarrow c \\ \text{ist ein Weg in } G[F^{-1}]}} g(\gamma).$$

**Beispiel 2.2.15.** Wir wollen unser Beispiel wieder aufgreifen und die Verbindungszahl  $\vartheta(e_1, f_2)$  bestimmen.



Es gibt genau drei Wege von  $e_1$  nach  $f_2$ , nämlich den kurzen Weg

$$\alpha = (e_1, f_2) \quad \text{mit Gewicht} \quad 2,$$

den etwas längeren Weg

$$\beta = (e_1, f_1, e_2, f_2) \quad \text{mit Gewicht} \quad 2 = 2 \cdot 1 \cdot 1$$

und den langen Weg

$$\gamma = (e_1, f_1, e_2, f_3, e_3, f_2) \quad \text{mit Gewicht} \quad 5 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1.$$

Also ist  $\vartheta(e_1, f_2) = 2 + 2 + 5 = 9$ .

**Definition 2.2.16** (Morsekomplex). Sei  $F$  ein Morsefluss. Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  definieren wir den von den kritischen Knoten des Grades  $n$  frei erzeugten  $\mathbb{K}$ -Modul

$$M_n = \mathbb{K}\langle \mathfrak{B}_n^E \rangle.$$

Außerdem definieren wir Homomorphismen  $\partial_n^M: M_n \rightarrow M_{n-1}$  durch die Verbindungszahl von zwei essentiellen Knoten:

$$(\partial_n^M)_{j,i} = \vartheta(e_i, e_j),$$

wobei  $e_i$  und  $e_j$  Basiselemente sind, die  $n = \text{grad}(e_i) = \text{grad}(e_j) + 1$  erfüllen. Man nennt

$$\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F) = (M_n, \partial_n^M)_n$$

den **Morsekomplex** von  $C$  bezüglich  $\mathfrak{B}$  und  $F$ .

Dass der Morsekomplex tatsächlich ein Kettenkomplex ist, sieht man nicht direkt aus der Definition. Allerdings zeigen wir im nächsten Abschnitt, dass er ein homotopieäquivalenter Unterkomplex von  $C$  ist.

**Beispiel 2.2.17.** In unserem Beispiel sind  $e_1$  und  $f_2$  die einzigen essentiellen Knoten. Ihre Verbindungszahl ist  $\vartheta(e_1, f_2) = 9$ . Der Morsekomplex ist somit durch folgendes Diagramm gegeben.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}\langle e_1 \rangle \xrightarrow{9} \mathbb{Z}\langle f_2 \rangle \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Die Homologie des Morsekomplexes kann direkt abgelesen werden.

$$H_n(\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_9\langle f_2 \rangle & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 2.3 Hauptsatz der diskreten Morsetheorie

**Satz 2.3.1** (Hauptsatz). *Sei  $F$  ein Morsefluss. Dann ist der Morsekomples von  $C$  bezüglich  $\mathfrak{B}$  und  $F$  ein homotopieäquivalenter Unterkomplex von  $C$ .*

Um den Hauptsatz zu beweisen, gehen wir einen anderen Weg als Mehner in [Meh11] und orientieren uns an der folgenden Beobachtung.

**Beispiel 2.3.2.** In den Beispielen aus Abschnitt 2.2 ist das einzige nicht verschwindende Differential durch die linke Matrix gegeben. Durch Zeilen- und Spaltenoperationen – also Basiswechsel – erhalten wir die rechte Randabbildung.

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

Wenn wir die entstehenden Basen  $(\bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_1)$  und  $(\bar{f}_3, \bar{f}_1, \bar{f}_2)$  nennen, wird der Morsekomples als Unterkomplex von  $\bar{e}_1$  und  $\bar{f}_2$  erzeugt. Eine Homotopie kann auch leicht konstruiert werden.

Nach Satz 2.2.12 können wir davon ausgehen, dass die Randabbildungen die Form

$$\partial_n = \left( \begin{array}{c|c|c} R_n & K_n & E_n \\ \hline R'_n & K'_n & E'_n \\ \hline R''_n & K''_n & E''_n \end{array} \right)$$

haben, wobei  $K_n$  eine obere Dreiecksmatrix mit invertierbaren Diagonaleinträgen ist. Im Beweis zeigen wir, wie Spaltenoperationen die Teilmatrix  $K_n$  auf Diagonalform und  $E_n$  auf Nullgestalt bringen sowie in der unteren rechten Ecke den Eintrag  $\partial_n^M$  erzeugen. Spaltenoperationen entsprechen Basiswechseln und es wird so sein, dass in diesen neuen Basen der Eintrag  $\partial_n^M$  erhalten bleibt. Durch weitere Zeilenoperationen werden wir Basen finden, sodass  $\partial_n$  die Form

$$\left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \phi_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \partial_n^M \end{array} \right)$$

hat und  $\phi_n$  eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge die (invertierbaren) Gewichte der Kanten aus  $F$  sind. Damit ist der Morsekomples bis auf Umbenennung der Erzeuger ein Unterkomplex von  $C$ . Mit Hilfe von  $\phi_n$  können wir dann eine Kettenhomotopie angeben.

Zunächst erinnern wir uns daran, wie Spalten- und Zeilenoperationen durch Matrizenmultiplikationen realisiert werden.

**Definition 2.3.3** (Elementarmatrix). Sei  $n, m > 0$  und  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Dann heißt  $E_{j,i} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  mit

$$(E_{j,i})_{j',i'} = \begin{cases} 1 & i' = i \text{ und } j' = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Standardmatrix.** Sei  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $n = m$  und  $i \neq j$ . Dann heißt  $T_{j,i}(\lambda) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  mit

$$T_{j,i}(\lambda) = \mathbf{1}_n + \lambda E_{j,i}$$

**Elementarmatrix.**

*Bemerkung.* Die Standardmatrizen bilden eine Basis von  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Außerdem gilt für Skalare  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\lambda E_{j,i} \cdot \mu E_{i',j'} = \begin{cases} \lambda \mu E_{j,j'} & i = i' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Lemma 2.3.4** (Zeilen- & Spaltenoperationen). *Seien  $A \in M_{n \times l}(\mathbb{K})$  und  $B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt für  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i \neq j$*

1.  $T_{j,i}(\lambda) \cdot T_{j,i}(-\lambda) = \mathbf{1}_n$ .
2.  $A \cdot T_{j,i}(\lambda)$  ist die Matrix  $A$ , wobei zur  $i$ -ten Spalte die  $j$ -te Spalte  $\lambda$  mal addiert wurde.
3.  $T_{j,i}(\lambda) \cdot B$  ist die Matrix  $B$ , wobei zur  $j$ -ten Zeile das  $\lambda$ -fache der  $i$ -ten Zeile addiert wurde.<sup>2</sup>

*Beweis.* 1. Aus  $i \neq j$  folgt  $\lambda E_{j,i} \cdot (-\lambda) E_{j,i} = 0$  und somit ist

$$T_{j,i}(\lambda) \cdot T_{j,i}(-\lambda) = \mathbf{1}_n + \lambda E_{j,i} + (-\lambda) E_{j,i} = \mathbf{1}_n.$$

2. Es ist

$$\begin{aligned} A \cdot T_{j,i}(\lambda) &= A + \sum_{\substack{1 \leq p \leq l \\ 1 \leq q \leq n}} A_{q,p} E_{q,p} \cdot \lambda E_{j,i} \\ &= A + \sum_{1 \leq q \leq n} A_{q,j} \lambda \cdot E_{q,i}. \end{aligned}$$

3. Analog zu 2. ist

$$T_{j,i}(\lambda) \cdot B = B + \sum_{1 \leq p \leq n} \lambda B_{i,p} \cdot E_{j,p}.$$

□

Wir wollen als Nächstes verstehen, was mit den Matrizen  $E_n''$  geschieht, wenn wir die Teilmatrizen  $(K_n \mid E_n)$  durch Spaltenoperationen auf die Form  $(\phi_n \mid 0)$  bringen, wobei die Diagonaleinträge von  $K_n$  unverändert bleiben und  $\phi_n$  die entsprechende Diagonalmatrix ist. Um die Notation zu vereinfachen, führen wir die folgende Definition ein.

<sup>2</sup>Falls  $\mathbb{K}$  nicht kommutativ ist, so muss man beachten, dass bei Spaltenoperationen das Ringelement von rechts, bei Zeilenoperationen jedoch von links multipliziert wird.

**Definition 2.3.5** (Zeilenreduktion). Sei  $D \in M_{l \times m}(\mathbb{K})$  und  $1 \leq j \leq l$ . Wir nennen die  $j$ -te Zeile **reduziert**, falls  $D_{j,j}$  der einzige von Null verschiedene Eintrag dieser Zeile ist.

Sei  $D_{j,j}$  invertierbar und  $\lambda_{j,i} = -D_{j,j}^{-1} \cdot D_{j,i}$ . Dann heißt die Matrix  $S_j \in M_{m \times m}$

$$S_j = \prod_{\substack{1 \leq l \leq m \\ l \neq j}} T_{j,l}(\lambda_{j,l})$$

die  **$j$ -te Zeilenreduktion** von  $D$ .

**Lemma 2.3.6.** Sind  $D$  und  $S_i$  wie in obiger Definition. Dann gilt:

1.  $S_j = \mathbf{1}_m + \sum_{l \neq j} \lambda_{j,l} E_{j,l}$ .
2. Die  $j$ -te Zeile von  $D \cdot S_j$  ist reduziert und der Eintrag  $D_{j,j}$  bleibt erhalten.

*Beweis.* Es ist

$$S_j = \prod_{l \neq j} T_{j,l}(\lambda_{j,l}) = \prod_{l \neq j} (\mathbf{1}_m + \lambda_{j,l} E_{j,l})$$

und weil  $E_{j,l} \cdot E_{j,k} = 0$  für  $l \neq j$  gilt

$$= \mathbf{1}_m + \sum_{l \neq j} \lambda_{j,l} E_{j,l}.$$

Damit können wir  $(D \cdot S_j)_{j,i}$  bestimmen.

$$D \cdot S_j = D + \sum_{l \neq j} D \cdot \lambda_{j,l} E_{j,l}$$

Ist  $i = j$ , so gilt

$$\left( \sum_{l \neq j} D \cdot \lambda_{j,l} E_{j,l} \right)_{j,j} = 0,$$

denn  $E_{j,j}$  kommt in der Summe nicht vor. Somit ist

$$(D \cdot S_j)_{j,j} = D_{j,j} + 0 = D_{j,j}.$$

Für  $i \neq j$  folgt aus

$$(D \cdot \lambda_{j,i} E_{j,i})_{j,i} = D_{j,j} \cdot \lambda_{j,i},$$

dass die Gleichung

$$\left( \sum_{l \neq j} D \cdot \lambda_{j,l} E_{j,l} \right)_{j,i} = D_{j,j} \cdot \lambda_{j,i}$$

erfüllt ist. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} (D \cdot S_j)_{j,i} &= D_{j,i} + D_{j,j} \cdot \lambda_{j,i} \\ &= D_{j,i} + D_{j,j} \cdot (-D_{j,j}^{-1}) \cdot D_{j,i} \\ &= D_{j,i} - D_{j,i} = 0. \end{aligned}$$

□

Die Zeilenreduktionen  $S_1, \dots, S_m$  bringen  $(K_n \mid E_n)$  also auf die gewünschte Form. Außerdem bekommen wir Spaltenoperationen

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & S_j \end{array} \right),$$

die wir auf  $\partial_n$  anwenden können.<sup>3</sup> Bezeichnet  $S = S_1 \cdot \dots \cdot S_m$ , dann ist

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & S_1 \end{array} \right) \cdot \dots \cdot \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & S_m \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & S \end{array} \right).$$

Wir wollen verstehen, was die Spaltenoperationen auf dem Eintrag rechts unten bewirkt. Im Folgenden unterdrücken wir das Subskript  $n$ , um die Lesbarkeit zu erhöhen.

**Lemma 2.3.7.** *Ist  $S$  so wie oben, dann gilt*

$$\left( \begin{array}{c|c|c} R & K & E \\ \hline R' & K' & E' \\ \hline R'' & K'' & E'' \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & S \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi & 0 \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & \partial^M \end{array} \right),$$

wobei  $\phi_n$  eine Diagonalmatrix ist, die dieselben Einträge hat wie die Diagonale von  $K$ .

*Beweis.* Dass nach Ausführen der Spaltenoperationen oben rechts die Teilmatrix  $(\phi \mid 0)$  entsteht, ist die Aussage von Lemma 2.3.6. Wir müssen also noch verstehen, was

$$\left( K'' \mid E'' \right) \cdot S$$

ist. Wir beobachten, was passiert, wenn wir die Spaltenoperationen nacheinander ausführen. Bezeichne dafür

$$D_p = \left( K'' \mid E'' \right) \cdot S_1 \cdot \dots \cdot S_p.$$

Die invertierten Kanten  $(r_i, k_i)$  im  $F$ -invertierten Graphen  $G[F^{-1}]$  nennen wir kurzerhand  $\beta_i$ . Um die Notation weiter zu vereinfachen, ordnen wir die Kanten mittels  $\beta_i > \beta_j$ , wann immer  $i > j$ . Mit  $b_i$  bezeichnen wir Basiselemente aus  $\mathfrak{B}_n^K \oplus \mathfrak{B}_n^E$ , also kollabierbare oder essentielle Knoten, und  $e_j$  sind Basiselemente aus  $\mathfrak{B}_{n-1}^E$ , also essentielle Knoten des nächst niedrigeren Grades. Wir zeigen induktiv:

$$(D_p)_{j,i} = \sum_{\substack{\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j \text{ ohne steigende} \\ \text{Kanten } \beta_l > \beta_p \text{ zu nutzen}}} g(\gamma)$$

Die Aussage ist für  $p = 0$  offensichtlich: Ein Weg, der keine steigende Kante benutzt, muss die Länge Eins haben. Damit ist der einzige Weg von  $b_i$  zu  $e_j$  die Kante  $(b_i, e_j)$ . Nun sind aber die Einträge von  $D_0 = (K'' \mid E'')$  die Gewichte solcher Kanten  $(b_i, e_j)$ .

Sei die Aussage für  $p - 1$  wahr. Zuerst untersuchen wir die rechte Seite und verstehen, wie Wege entstehen, die zusätzlich die steigende Kante  $\beta_p$  benutzen dürfen. Sei  $\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j$  ein Weg, der  $\beta_p$  aber keine steigende Kante  $\beta_l > \beta_p$  durchläuft. Wir zeigen, dass  $\gamma$  von der Form

$$\gamma = (b_i, r_p, k_p, \dots, e_j)$$

<sup>3</sup>Aus notationellen Gründen werden Nullblöcke nicht hervorgehoben.

sein muss. Der Weg  $\gamma$  verbindet zwei Knoten, die sich im Grad um Eins unterscheiden. Nach Lemma 2.2.7 besitzt  $\gamma$  keine zwei steigenden Kanten, die aufeinanderfolgen. Der Startknoten ist nicht redundant, das heißt, die ausgehende Kante ist fallend. Also muss der restliche Weg abwechselnd aus steigenden Kanten und fallenden Kanten bestehen. Wir hatten die Basen so sortiert, dass steigende Kanten die Form  $(r_l, k_l)$  besitzen. Fallende Kanten sind immer von der Form  $(b_q, r_s)$ . Somit muss  $\gamma$  mit der Kante  $(b_i, r_l)$  starten und abwechselnd redundante und kollabierbare Knoten besuchen, bis der essentielle Endknoten  $e_j$  erreicht wird.

$$b_i \searrow r_l \nearrow \dots \searrow e_j$$

Falls  $\gamma$  nicht mit der Kante  $(b_i, r_p)$  beginnt, gibt es den Teilweg  $(b_l, r_p, k_p)$  mit  $b_l \neq b_i$ . Da  $b_i$  der Startknoten von  $\gamma$  ist, muss es auch den Teilweg

$$b_q \searrow r_l \nearrow b_l \searrow r_p \nearrow k_p \searrow \dots$$

geben, das heißt,  $k_l = b_l$  ist kollabierbar und  $\gamma$  muss die Kante  $\beta_l$  benutzen. Nach Voraussetzung ist  $l \leq p$ . Es muss aber bereits  $l < p$  gelten, denn  $\gamma$  durchläuft die Kante  $(k_l, r_p)$  und  $(k_p, r_p)$  ist keine Kante des Graphen  $G[F^{-1}]$ . Aber dann ist  $(k_l, r_p)$  eine fallende Kante von dem kollabierbaren Knoten  $k_l$  zu dem redundanten Knoten  $r_p$  und der Spaltenindex  $l$  ist kleiner als der Zeilenindex  $p$ . Das heißt,

$$0 \neq \kappa(k_l, r_p) = K_{p,l} = 0,$$

denn  $K$  ist eine obere Dreiecksmatrix. Aber wir hatten keine Kanten zugelassen, die kein Gewicht haben. Wenn wir also zusätzlich die Kante  $\beta_p$  erlauben, bekommen wir zu allen alten Wegen  $b_i \rightsquigarrow e_j$ , die  $\beta_p$  noch nicht benutzen, die Wege  $(b_i, r_p, k_p)\gamma$ , wobei die  $\gamma: k_p \rightsquigarrow e_j$  Wege sind, die  $\beta_p$  ebenfalls nicht benutzen. Wir erhalten für die rechte Seite die folgende Formel. Ist  $(b_i, r_p)$  eine Kante in  $G[F^{-1}]$ , so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_p}} g(\gamma) &= \sum_{\substack{\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_{p-1}}} g(\gamma) + \sum_{\substack{\gamma: k_p \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_{p-1}}} g((b_i, r_p, k_p)\gamma) \\ &= \sum_{\substack{\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_{p-1}}} g(\gamma) + \sum_{\substack{\gamma: k_p \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_{p-1}}} g(\gamma) \cdot g((b_i, r_p, k_p)) \\ &= (D_{p-1})_{j,i} + (D_{p-1})_{j,p} \cdot g((b_i, r_p, k_p)). \end{aligned}$$

Ist andererseits  $(b_i, r_p)$  keine Kante in  $G[F^{-1}]$ , so ist

$$\sum_{\substack{\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_p}} g(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma: b_i \rightsquigarrow e_j \\ \text{ohne } \beta_l > \beta_{p-1}}} g(\gamma) = (D_{p-1})_{j,i}.$$

Das vergleichen wir mit der linken Seite  $D_p = D_{p-1} \cdot S_p$ . Lemma 2.3.6 besagt

$$S_p = \mathbf{1}_m + \sum_{l \neq p} \lambda_{p,l} E_{p,l}.$$

Man überzeugt sich durch explizites Ausrechnen, dass

$$(D_{p-1} \cdot S_p)_{j,i} = (D_{p-1})_{j,i} + (D_{p-1})_{j,p} \cdot \lambda_{p,i}$$



gilt. Es ist für  $i \neq p$

$$(b_i, r_p) \in G[F^{-1}] \Leftrightarrow (b_i, r_p) \in G \Leftrightarrow (K \mid E)_{p,i} \neq 0.$$

Die Skalare  $\lambda_{p,i}$  sind also nach Definition

$$\lambda_{p,i} = -(K_{p,p})^{-1} \cdot (K \mid E)_{p,i} = \begin{cases} g((b_i, r_p, k_p)) & (b_i, r_p) \in G[F^{-1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir haben uns also davon überzeugt, dass

$$(D_p)_{j,i} = \begin{cases} (D_{p-1})_{j,i} + (D_{p-1})_{j,p} \cdot g((b_i, r_p, k_p)) & (b_i, r_p) \in G[F^{-1}] \\ (D_{p-1})_{j,i} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit sind linke und rechte Seite auch für  $p$  gleich und der Induktionsschritt ist vollendet. Nun sind wir fertig, denn für essentielle Knoten  $e_i$  und  $e_j$  ist

$$(D_m)_{e_j, e_i} = \sum_{\gamma: e_i \rightsquigarrow e_j} g(\gamma) = (\partial_n^M)_{j,i}.$$

□

Die Matrizen können nun weiter vereinfacht werden.

**Definition 2.3.8** (einfache Basen). Sei  $F$  ein Morsefluss. Wir nennen die geordneten Basen  $\overline{\mathfrak{B}}_n = \overline{\mathfrak{B}}_n^R \oplus \overline{\mathfrak{B}}_n^K \oplus \overline{\mathfrak{B}}_n^E$  **einfach**, falls sie aus  $\mathfrak{B}_n$  durch Basiswechsel  $A_n$  entstehen und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1.  $\overline{\mathfrak{B}}_n^R$  geht aus den redundanten,  $\overline{\mathfrak{B}}_n^K$  aus den kollabierbaren und  $\overline{\mathfrak{B}}_n^E$  aus den essentiellen Knoten hervor, das heißt, jedes Basiselement  $\overline{b}_i$  in  $\overline{\mathfrak{B}}_n$  erfüllt  $\overline{b}_i = A_n b_i$ .
2. In diesen Basen  $\overline{\mathfrak{B}}_n$  haben die Differentiale die Form

$$\partial_n = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \phi_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \partial_n^M \end{array} \right).$$

3. Die Blockmatrix  $\phi_n$  hat Diagonalgestalt und die Einträge sind die Gewichte der Kanten des Morseflusses.
4. Die Blockmatrix  $\partial_n^M$  ist wie in Definition 2.2.16

$$(\partial_n^M)_{j,i} = \vartheta(e_i, e_j),$$

wobei  $\overline{e}_l$  aus  $e_l$  hervorgeht.

**Satz 2.3.9.** *Zu jedem Morsefluss  $F$  gibt es einfache Basen.*

*Beweis.* Wir führen für jedes  $n$  die unmittelbar vor Lemma 2.3.7 beschriebenen Spaltenoperationen

$$T = T_n = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & S \end{array} \right)$$

auf den Spalten zwei und drei durch. Dabei werden ausschließlich Vielfache der zweiten Spalte auf die zweite und dritte Spalte addiert. Wir erhalten nach Lemma 2.3.7 die Matrix

$$\partial_n T_n = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi_n & 0 \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & \partial_n^M \end{array} \right),$$

wobei  $\phi_n$  ein Isomorphismus ist, der durch die Diagonalmatrix beschrieben wird, deren Einträge den Gewichten der Kanten aus dem Morsefluss entsprechen. Die Matrix  $(T_{n-1})^{-1}$  entspricht gewissen Zeilenoperationen auf  $\partial_n$ , wobei auf die zweite Zeile Vielfache von sich selbst und der dritten Zeile addiert werden. Die erste und dritte Zeile bleiben unverändert. Das sind direkte Konsequenzen aus Lemma 2.3.4. Die Differentiale werden dann in diesen Basen durch

$$\tilde{\partial}_n = (T_{n-1})^{-1} \partial_n T_n = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi_n & 0 \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & \partial_n^M \end{array} \right)$$

beschrieben. Die Relation  $\tilde{\partial}^2 = 0$  ist offensichtlich immer noch erfüllt. Aus den Rechengesetzen für Blockmatrizen folgt sofort

$$\tilde{\partial}_n = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi_n & 0 \\ \hline * & * & 0 \\ \hline * & * & \partial_n^M \end{array} \right).$$

Wir führen nun sukzessiv Zeilenoperationen durch. Sei  $\tilde{\partial}_n$  verschieden von Null und  $n$  maximal. Dann gibt es ein Produkt von Zeilenoperationen  $Z_n$ , das durch Vielfache der ersten Zeile die Zeilen zwei und drei so ändern, dass die Matrix die Form

$$Z_n \tilde{\partial}_n = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi_n & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & \partial_n^M \end{array} \right)$$

besitzt. (Dass  $\tilde{\partial}_n$  keine zweite Zeile hat, ist nicht von Bedeutung.) Der durch  $Z_n$  bestimmte Basiswechsel gibt uns dann das Differential

$$\tilde{\partial}_{n-1}(Z_n)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi_{n-1} & 0 \\ \hline * & * & 0 \\ \hline * & * & \partial_{n-1}^M \end{array} \right),$$

denn  $(Z_n)^{-1}$  ist mit Hilfe von 2.3.4 das Produkt von Spaltenoperationen, die Vielfache der zweiten und dritten Spalte auf die erste addieren. Induktiv können wir also Basiswechsel  $Z_n$  für alle  $n$  definieren, sodass die Differentiale in diesen Basen die Form

$$\bar{\partial}_n = Z_n \tilde{\partial}_n Z_{n+1} = \left( \begin{array}{c|c|c} * & \phi_n & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & \partial_n^M \end{array} \right)$$

haben. Aus den Rechengesetzen für Blockmatrizen und  $\bar{\partial}^2 = 0$  folgt nun, dass die erste Spalte die Nullspalte sein muss

$$\bar{\partial}_n = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \phi_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \partial_n^M \end{array} \right).$$

Wir haben also neue Basen  $\bar{\mathfrak{B}}_n$  konstruiert, in denen die Differentiale die gewünschte Gestalt haben.  $\square$

**Satz 2.3.10.** *Sei  $F$  ein Morsefluss und  $\bar{\mathfrak{B}}_n = \bar{\mathfrak{B}}_n^R \oplus \bar{\mathfrak{B}}_n^K \oplus \bar{\mathfrak{B}}_n^E$  einfach. Dann ist der ursprüngliche Kettenkomplex homotop zu dem von  $(\bar{\mathfrak{B}}_n^E)_n$  erzeugten Unterkomplex. Dieser ist – bis auf Umbenennung der Erzeuger – der Morsekomplex von  $C$  bezüglich  $F$ .*

*Beweis.* Wir nennen den von  $\bar{\mathfrak{B}}_n^E$  erzeugten Unterkomplex  $M = (M_n, \partial_n^M)_n$ , die beiden anderen  $R$  und  $K$ . Die Projektionen heißen  $\pi$  und die Inklusionen  $\iota$ . Offensichtlich gilt  $\pi_M \circ \iota_M = \text{id}_M$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\iota_M \circ \pi_M \simeq \text{id}_{R \oplus K \oplus M}$  via einer Kettenhomotopie  $h_n$  ist.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & R_n \oplus K_n \oplus M_n & \longrightarrow & R_{n-1} \oplus K_{n-1} \oplus M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \searrow h_n & & \swarrow h_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & R_{n+1} \oplus K_{n+1} \oplus M_{n+1} & \longrightarrow & R_n \oplus K_n \oplus M_n & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Aus dem Diagramm und der darstellenden Matrix wird schnell klar, dass

$$h_n: C_n \xrightarrow{\pi_{R_n}} R_n \xrightarrow{\phi_{n+1}^{-1}} K_{n+1} \xrightarrow{\iota_{K_{n+1}}} C_{n+1}$$

die einzige sinnvolle Abbildung ist, die den Grad um Eins erhöht. Und in der Tat, man sieht leicht ein, dass  $h_n$  bereits die gewünschte Homotopie ist:

$$\begin{aligned} \text{id}_{K \oplus R \oplus M} - \iota_M \circ \pi_M &= \text{id}_{K \oplus R} \\ &= \text{id}_{R_n} + \text{id}_{K_n} \\ &= \partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n. \end{aligned}$$

$\square$

*Beweis des Hauptsatzes.* Nach Satz 2.3.9 gibt es einfache Basen  $\bar{\mathfrak{B}}_n = \bar{\mathfrak{B}}_n^R \oplus \bar{\mathfrak{B}}_n^K \oplus \bar{\mathfrak{B}}_n^E$  und wegen Satz 2.3.10 ist  $C$  homotop zu dem von  $(\bar{\mathfrak{B}}_n^E)_n$  erzeugten Unterkomplex, welcher – bis auf Benennung der Basiselemente – mit dem Morsekomplex übereinstimmt.  $\square$

## 2.4 Algebraische Konstruktionen

Wir wollen algebraische Konstruktionen wie *Tensorprodukte* und *Summen* so auf Morseflüsse übertragen, dass sich diese Konstruktionen mit dem Bilden des Morsekomples gut vertragen. Das heißt, wir wollen Formeln der Form

$$\mathbb{M}(C_1 \oplus C_2, \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2, F_1 \oplus F_2) \cong \mathbb{M}(C_1, \mathfrak{B}_1, F_1) \oplus \mathbb{M}(C_2, \mathfrak{B}_2, F_2),$$

wobei der Isomorphismus besonders einfach sein soll.

Die Beweise der Abschnitte 2.4.2 bis 2.4.5 verlaufen alle nach demselben Muster. Wir

- verstehen, wie sich der assoziierte Graph unter der jeweiligen Konstruktion verhält.
- definieren den neu konstruierten Morsefluss.
- zeigen, dass dies ein Morsefluss ist.
- verstehen, wie sich der  $F$ -invertierte Graph unter der jeweiligen Konstruktion verhält.
- zeigen, dass das Bilden des Morsekomples mit der algebraischen Konstruktion verträglich ist.

Da die einzelnen Schritte sehr ähnlich sind, fällt ein Teil der Beweise in den Abschnitten 2.4.3 bis 2.4.5 etwas kürzer aus.

### 2.4.1 Koeffizientenerweiterung von Kettenkomplexen

Dieser Abschnitt fasst elementare Definitionen und Eigenschaften der *Koeffizientenerweiterung von Moduln und Kettenkomplexen* zusammen.

**Satz 2.4.1.** *Sei  $\zeta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  ein unitaler Ringhomomorphismus und  $M$  ein Modul über  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $\mathbb{K}$  vermöge  $\zeta$  ein  $\mathbb{L}$ -Modul und  $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M$  ist ein  $\mathbb{L}$ -Modul mit Skalarmultiplikation*

$$(b, b' \otimes m) \mapsto bb' \otimes m.$$

*Ist  $N$  ein weiterer  $\mathbb{K}$ -Modul und  $g: M \rightarrow N$  ein  $\mathbb{K}$ -Modulhomomorphismus, so ist*

$$\text{id}_{\mathbb{L}} \otimes g: \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M \rightarrow \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} N$$

*ein  $\mathbb{L}$ -Modulhomomorphismus.*

*Beweis.* Man überzeugt sich leicht, dass

$$\mathbb{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}, \quad (a, b) \mapsto \zeta(a) \cdot b$$

eine  $\mathbb{K}$ -Modulstruktur auf  $\mathbb{L}$  erklärt. Mit dieser ist auch  $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M$  ein  $\mathbb{K}$ -Modul. Ferner bekommen wir für jedes  $b \in \mathbb{L}$  eine  $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildung

$$\mathbb{L} \times M \rightarrow \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M, \quad (b', m) \mapsto bb' \otimes m,$$

die einen  $\mathbb{K}$ -Modulhomomorphismus

$$\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M \rightarrow \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M, \quad b' \otimes m \mapsto bb' \otimes m$$

induziert. Damit ist  $\cdot$  eine wohldefinierte Skalarmultiplikation

$$\because \mathbb{L} \times \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M \rightarrow \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M, \quad b \cdot \sum_i c_i \otimes m_i = \sum_i bc_i \otimes m_i.$$

Dass der  $\mathbb{K}$ -Modulhomomorphismus  $\text{id}_{\mathbb{L}} \otimes g$  auch  $\mathbb{L}$ -linear ist, sieht man sofort, denn

$$b \cdot \sum_i c_i \otimes m = \sum_i bc_i \otimes m \mapsto \sum_i bc_i \otimes g(m) = b \cdot \sum_i c_i \otimes g(m).$$

□

**Definition 2.4.2** (Koeffizientenerweiterung). Seien  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{L}$  Ringe,  $\zeta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  ein unitaler Ringhomomorphismus,  $M$  und  $N$  Moduln über  $\mathbb{K}$  sowie  $g: M \rightarrow N$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Moduln. Man sagt, dass der – in Satz 2.4.1 erklärte –  $\mathbb{L}$ -Modul

$$\text{Erw}_{\zeta}(M) = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} M$$

sowie der  $\mathbb{L}$ -Modulhomomorphismus

$$\text{Erw}_{\zeta}(g) = \text{id}_{\mathbb{L}} \otimes g: \text{Erw}_{\zeta}(M) \rightarrow \text{Erw}_{\zeta}(N)$$

durch **Koeffizientenerweiterung vermöge  $\zeta$**  entsteht.

*Bemerkung.* 1. Für jeden unitalen Ringhomomorphismus  $\zeta$  ist

$$\text{Erw}_{\zeta}: \text{MOD}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{MOD}_{\mathbb{L}}$$

ein kovarianter, additiver Funktor.

2. Obwohl man bei einer „Erweiterung“ davon ausgehen könnte, dass der entstehende Modul größer wird, ist das im Allgemeinen nicht der Fall. Zum Beispiel ist die Projektion

$$\pi: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}$$

auf den Grundring unital, aber weit davon entfernt, injektiv zu sein. Wenn wir uns auf  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[X]$  und  $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$  festlegen, so ist  $M = \mathbb{Q}[X]$  ein freier  $\mathbb{K}$ -Modul, den wir vermöge  $\pi$  erweitern. Der entstehende  $\mathbb{L}$ -Modul ist nicht etwa  $\mathbb{Q}[X]$ , denn in  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}[X]} \mathbb{Q}[X]$  gilt

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \otimes X = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \otimes X \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{Q}[X]} = \pi(X) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{Q}[X]} = 0.$$

**Definition 2.4.3** (Koeffizientenerweiterung). Seien  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{L}$  Ringe,  $\zeta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  ein unitaler Ringhomomorphismus,  $C = (C_n, \partial_n)_n$  und  $D = (D_n, \partial_n)_n$  Kettenkomplexe über  $\mathbb{K}$  sowie  $g: C \rightarrow D$  ein Kettenmorphismus. Dann entsteht der  $\mathbb{L}$ -Kettenkomplex

$$\text{Erw}_{\zeta}(C) = (\text{Erw}_{\zeta}(C_n), \text{Erw}_{\zeta}(\partial_n))_n$$

sowie der  $\mathbb{L}$ -Kettenmorphismus

$$\text{Erw}_{\zeta}(f)_n = \text{Erw}_{\zeta}(f_n)$$

durch **Koeffizientenerweiterung vermöge  $\zeta$** .

*Bemerkung.* 1. Man überzeugt sich leicht, dass  $\text{Erw}_\zeta(C)$  und  $\text{Erw}_\zeta(D)$  Kettenkomplexe sind und  $\text{Erw}_\zeta(f)$  eine Kettenabbildung ist, denn  $\text{Erw}_\zeta: \text{MOD}_\mathbb{K} \rightarrow \text{MOD}_\mathbb{L}$  ist kovariant und additiv.

2. Die Koeffizientenerweiterung von Kettenkomplexen ist ebenfalls ein kovarianter, additiver Funktor.

### 2.4.2 Koeffizientenerweiterung von Morseflüssen

Sei  $\zeta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  ein unitaler Ringhomomorphismus und  $F$  ein Morsefluss. Wir wollen nun  $\text{Erw}_\zeta(F)$  sinnvoll definieren, sodass sich  $\text{Erw}_\zeta$  und  $\mathbb{M}$  gut vertragen. Bei uns ist jeder Kettenmodul  $C_n = \mathbb{K}\langle e_1, \dots, e_m \rangle$  ein endlich erzeugter freier  $\mathbb{K}$ -Modul. Der durch Koeffizientenerweiterung entstehende  $\mathbb{L}$ -Modul ist isomorph zu

$$\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}\langle e_1, \dots, e_m \rangle \cong \mathbb{L}\langle e_1, \dots, e_m \rangle$$

vermöge eines natürlichen Isomorphismus

$$\sum_{i,j} b_{j,i} \otimes a_{j,i} \cdot e_i \mapsto \sum_{i,j} (b_{j,i} \cdot \zeta(a_{j,i})) \cdot e_i.$$

Die Basen  $\mathfrak{B}$  von  $C$  können also auch als Basen  $\text{Erw}_\zeta(\mathfrak{B})$  von  $\text{Erw}_\zeta(C)$  aufgefasst werden. Der kombinatorische Kettenkomplex  $G' = (V', E', \kappa')$  zu  $\text{Erw}_\zeta(C)$  besitzt somit dieselben Knoten wie  $G = (V, E, \kappa)$ . Außerdem erhalten die darstellenden Matrizen – in diesen Basen – die erweiterten Koeffizienten. Für  $i, j$  heißt das

$$\text{Erw}_\zeta(\partial)_{j,i} = \zeta(\partial_{j,i}).$$

Die Kanten  $E'$  erfüllen also

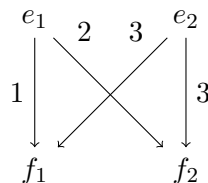
$$E' = \{(v, w) \in E \mid \zeta(\kappa(v, w)) \neq 0\}$$

und die Gewichte  $\kappa'$  sind durch

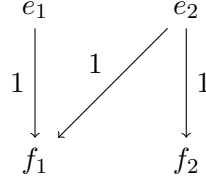
$$\kappa'(v, w) = \zeta(\kappa(v, w))$$

gegeben. Anschaulich beschriften wir jede Kante im Graphen mit dem neuen Gewicht. Die Kanten mit verschwindendem Gewicht werden entfernt. Vernachlässigt man die Gewichte, so kann man  $G'$  als Teilgraph von  $G$  auffassen.

**Beispiel 2.4.4.** Man betrachte den folgenden kombinatorischen Kettenkomplex über  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  mit Morsefluss  $F = \{(e_1, f_1)\}$ .



Die Kante  $(e_2, f_2)$  kann nicht zu  $F$  hinzugefügt werden, denn sonst wäre der  $F$ -invertierte Graph nicht kreisfrei. Der Ringhomomorphismus  $\pi: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist durch  $\pi(1) = 1$  eindeutig bestimmt und unital. Wenn wir die Koeffizienten des Kettenkomplexes vermöge  $\pi$  erweitern, erhalten wir den folgenden Graphen.



Es ist  $\{(e_1, f_1)\}$  weiterhin ein Morsefluss. Außerdem haben wir nun die Möglichkeit,  $F$  zu vergrößern, denn die Kante  $(e_2, f_2)$  kann nun hinzugefügt werden.

Wenn wir die Koeffizienten des Morsekomplexes bezüglich  $F$  vermöge  $\zeta$  erweitern, so bleiben die Basen erhalten und die darstellenden Matrizen der Differentiale erhalten für feste  $i, j$  die erweiterten Koeffizienten

$$\text{Erw}_\zeta(\partial^M)_{j,i} = \zeta(\partial_{j,i}^M).$$

**Beispiel 2.4.5.** Sei  $\zeta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  die Quotientenprojektion und ein Morsekomplex  $M$  durch das folgende Diagramm gegeben

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Dann ist  $\text{Erw}_\zeta(M)$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

**Definition 2.4.6** (Koeffizientenerweiterung). Sei  $F$  ein Morsefluss und  $\zeta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  ein unitaler Ringhomomorphismus. Man sagt, dass

$$\text{Erw}_\zeta(F) = \{(v, w) \in E' \mid (v, w) \in F\}$$

aus  $F$  durch **Erweiterung der Koeffizienten vermöge  $\zeta$**  entsteht.

Zur besseren Lesbarkeit nennen wir den koeffizientenerweiterten Morsefluss

$$F' = \text{Erw}_\zeta(F).$$

Knoten und Kanten mit invertierbarem Gewicht bleiben unter Koeffizientenerweiterung erhalten. Wir können also  $F$  mit  $F'$  und die kritischen Knoten in  $G$  mit den kritischen Knoten in  $G'$  identifizieren. Wenn wir die Gewichtsfunktionen vernachlässigen, so kann  $G'[F'^{-1}]$  als Teilgraph von  $G[F^{-1}]$  verstanden werden. Wege in  $G'[F'^{-1}]$  sind dann auch immer Wege in  $G[F^{-1}]$ . Umgekehrt ist ein Weg  $\gamma$  in  $G[F^{-1}]$  nur dann ein Weg in  $G'[F'^{-1}]$ , wenn die Gewichte der besuchten Kanten unter Koeffizientenerweiterung nicht verschwinden. Das ist äquivalent zu

$$\zeta(g(\gamma)) \neq 0.$$

**Lemma 2.4.7.** *Ist  $F$  ein Morsefluss in  $G$ , so ist  $F'$  ein Morsefluss in  $G'$ .*

*Beweis.* Wir fassen  $G'[F'^{-1}]$  als Teilgraph von  $G[F^{-1}]$  auf. Dieser ist kreisfrei, denn  $F$  ist ein Morsefluss.  $\square$

**Satz 2.4.8.** *Sei  $F$  ein Morsefluss. Dann ist*

$$\text{Erw}_\zeta(\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)) \cong \mathbb{M}(\text{Erw}_\zeta(C), \text{Erw}_\zeta(\mathfrak{B}), \text{Erw}_\zeta(F))$$

*vermöge eines Kettenisomorphismus  $\Phi$ , der die Basiselemente identisch abbildet*

$$\Phi: b_i \mapsto b_i.$$

*Beweis (M21).* Der Ausdruck  $\Phi: b_i \mapsto b_i$  macht für Basiselemente  $b_i$  Sinn, denn  $C$  und  $\text{Erw}_\zeta(C)$  besitzen die gleichen kritischen Knoten.

Offenbar ist  $\Phi$  in jedem Grad ein Modulisomorphismus und es bleibt zu zeigen, dass

$$\Phi \circ \partial = \partial' \circ \Phi$$

erfüllt ist. Dazu reicht es aus, dass die Einträge der darstellenden Matrizen gleich sind. Bezeichne  $\vartheta$  bzw.  $\vartheta'$  die Verbindungszahl in  $G[F^{-1}]$  bzw.  $G'[F'^{-1}]$ . Damit ist

$$\partial_{j,i} = \zeta(\vartheta(b_i, b_j)) = \sum_{\Gamma(G[F^{-1}], b_i, b_j)} \zeta(g(\gamma)) = \sum_{\substack{\Gamma(G[F^{-1}], b_i, b_j) \\ \zeta(g(\gamma)) \neq 0}} \zeta(g(\gamma)).$$

Nach unseren Überlegungen vor Lemma 2.4.7 summieren wir links die Gewichte aller Wege in  $G'[F'^{-1}]$ . Somit ist

$$\partial_{j,i} = \sum_{\Gamma(G'[F'^{-1}], b_i, b_j)} g(\gamma) = \vartheta'(b_i, b_j) = \partial'_{j,i}$$

Damit sind alle Einträge gleich und  $\Phi$  ist ein Kettenisomorphismus.  $\square$

### 2.4.3 Direkte Summen von Morseflüssen

Wir fixieren zwei Kettenkomplexe  $C_1$  und  $C_2$  mit Basen  $\mathfrak{B}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}_2$ , zusammen mit den zugehörigen kombinatorischen Kettenkomplexen  $G_1$  bzw.  $G_2$  sowie je einen Fluss  $F_1$  bzw.  $F_2$ . Wenn wir den kombinatorischen Kettenkomplex  $G_1 \oplus G_2$  der Summe  $(C_1 \oplus C_2, \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2)$  betrachten, entsteht dieser als disjunkte Vereinigung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ .

**Definition 2.4.9** (Direkte Summe von Morseflüssen). Die in  $G_1 \oplus G_2$  liegende Kantenmenge

$$F_1 \oplus F_2 = F_1 \cup F_2$$

ist die **direkte Summe der Morseflüsse** von  $F_1$  und  $F_2$ .

**Lemma 2.4.10.** *In  $G_1 \oplus G_2$  ist  $F_1 \oplus F_2$  ein Morsefluss.*



*Beweis.* Es ist klar, dass  $F_1 \oplus F_2$  ein Matching ist, denn eine Kante liegt entweder vollständig in  $G_1$  oder  $G_2$ . Die Kreisfreiheit des  $(F_1 \oplus F_2)$ -invertierten Graphen folgt direkt mit Satz 2.2.12, da wir durch naheliegende Kombination der Basen

$$(\mathfrak{B}_1)_n^R \oplus (\mathfrak{B}_2)_n^R \oplus (\mathfrak{B}_1)_n^K \oplus (\mathfrak{B}_2)_n^K \oplus (\mathfrak{B}_1)_n^E \oplus (\mathfrak{B}_2)_n^E$$

für jeden Grad  $n$  eine obere Dreiecksmatrix bilden, deren Diagonaleinträge die Gewichte des Matchings  $F_1 \oplus F_2$  sind.  $\square$

**Satz 2.4.11.** *Der Morsekomplex der direkten Summe ist isomorph zur Summe der Morsekomplexe*

$$\mathbb{M}(C_1 \oplus C_2, \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2, F_1 \oplus F_2) \cong \mathbb{M}(C_1, \mathfrak{B}_1, F_1) \oplus \mathbb{M}(C_2, \mathfrak{B}_2, F_2)$$

vermöge eines Isomorphismus, der Basiselemente identisch abbildet.

*Beweis (M22).* Die Basen der beiden Kettenkomplexe können wieder miteinander identifiziert werden und  $\Phi: b_i \mapsto b_i$  ist in jedem Grad ein Isomorphismus.

Damit  $\Phi$  ein Kettenisomorphismus ist, müssen die darstellenden Matrizen der Differentiale gleich sein. Das sieht man aber leicht ein, denn der  $(F_1 \oplus F_2)$ -invertierte Graph ist die Vereinigung der beiden  $F_i$ -invertierten Graphen.  $\square$

#### 2.4.4 Tensorprodukte von Morseflüssen

Wir fixieren ein weiteres Mal zwei Kettenkomplexe  $C_1$  und  $C_2$  mit Basen  $\mathfrak{B}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}_2$ , zusammen mit den zugehörigen kombinatorischen Kettenkomplexen  $G_1$  bzw.  $G_2$  sowie je einen Fluss  $F_1$  bzw.  $F_2$ . Bekanntlicherweise ist das Tensorprodukt von Kettenkomplexen  $C_1 \otimes C_2$  in jedem Grad  $n$  durch

$$(C_1 \otimes C_2)_n = \bigoplus_{p+q=n} (C_1)_p \otimes (C_2)_q$$

gegeben, besitzt als Randabbildungen

$$\partial^{C_1 \otimes C_2}(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes \partial b$$

und besitzt die Basen

$$(\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2)_n = \bigoplus_{p+q=n} (\mathfrak{B}_1)_p \otimes (\mathfrak{B}_2)_q.$$

Den kombinatorischen Kettenkomplex zu  $(C_1 \otimes C_2)$  nennen wir  $G_1 \otimes G_2$ .

Der kombinatorische Kettenkomplex  $G_1 \otimes G_2$  besteht aus den Knoten

$$V_1 \otimes V_2 = \{a \otimes e \mid a \in V_1 \text{ und } e \in V_2\},$$

der Kantenmenge  $E_1 \otimes E_2$  als Vereinigung von

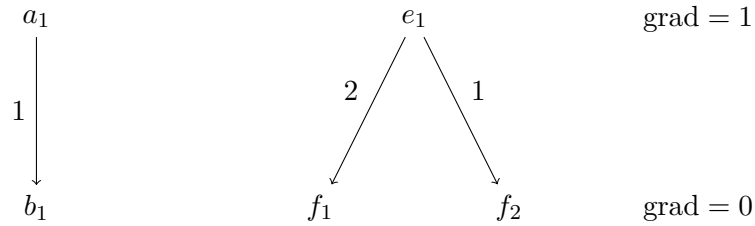
$$\{a \otimes e \searrow a' \otimes e \mid a \searrow a' \text{ in } E_1\} \cup \{a \otimes e \searrow a \otimes e' \mid e \searrow e' \text{ in } E_2\}$$

und den Gewichten  $\kappa_1 \otimes \kappa_2$

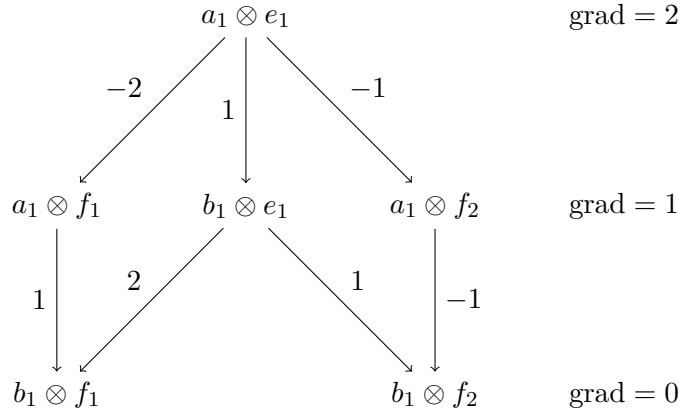
$$(a \otimes e \searrow a' \otimes e') \mapsto \begin{cases} \kappa_1(a, a') & e = e' \\ (-1)^{|a|} \kappa_2(e, e') & a = a' \end{cases}.$$

Wir wollen uns an einem Beispiel klar machen, wie man  $F_1 \otimes F_2$  definieren möchte.

**Beispiel 2.4.12.** Seien  $G_1$  bzw.  $G_2$  über  $\mathbb{Z}$  durch das linke bzw. rechte Diagramm gegeben.

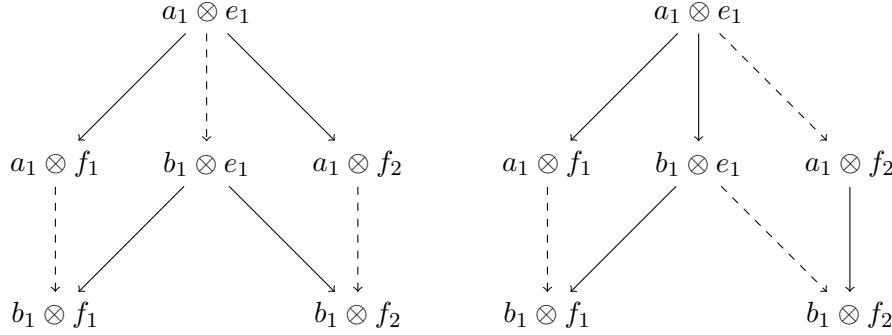


Dann sind  $F_1 = \{(a_1, b_1)\}$  und  $F_2 = \{(e_1, f_2)\}$  beides Morseflüsse. In  $G_1 \otimes G_2$  wollen wir einen Morsefluss  $F_1 \otimes F_2$  aus den Morseflüssen  $F_1$  und  $F_2$  konstruieren.



Wenn wir den jeweiligen Morsekomples mit  $M_1$  bzw.  $M_2$  bezeichnen, so ist  $M_1$  der Nullkomplex, denn  $G_1$  besitzt keine essentiellen Knoten. Also verschwindet auch  $M_1 \otimes M_2$ . Damit sich das Erschaffen von Morsekomples gut mit Tensorprodukten verhält, muss der Morsekomples von  $G_1 \otimes G_2$  bezüglich  $F_1 \otimes F_2$  verschwinden. Wir fordern hier also, dass alle Knoten in  $F_1 \otimes F_2$  enthalten sind. Zunächst können wir alle Kanten wählen, für die ein Tensorfaktor kritisch ist. Hier ist  $f_1$  in  $G_1$  der einzige kritische Knoten, das heißt, die Kante  $(a_1 \otimes f_1 \searrow b_1 \otimes f_1)$  wird in  $F_1 \otimes F_2$  aufgenommen. Jetzt haben wir genau zwei Möglichkeiten, die restlichen (invertierbaren) Kanten aufzuteilen. Das deuten wir im nachfolgenden Diagramm durch gestrichelte Kanten an. Links werden die Kanten bevorzugt, die von  $F_1$

kommen, und rechts die von  $F_2$ .



**Definition 2.4.13** (Tensorprodukt von Morseflüssen). Wir nennen die in  $G_1 \otimes G_2$  liegende Kantenmenge  $F_1 \otimes F_2$ , beschrieben als Vereinigung von

$$T_1 = \{a \otimes e \searrow a' \otimes e \mid a \searrow a' \text{ liegt in } F_1\}$$

und

$$T_2 = \{a \otimes e \searrow a \otimes e' \mid a \text{ ist kritisch und } e \searrow e' \text{ liegt in } F_2\}$$

das **Tensorprodukt der Flüsse**  $F_1$  und  $F_2$ .

Bevor wir fortfahren, fällt uns auf, dass jeder Weg  $\gamma$ , der in  $G_1 \otimes G_2$  verläuft, einen Weg  $\gamma_i$  in  $G_i$  beschreibt, indem wir die Kantenfolge im  $i$ -ten Faktor betrachten. Analog gibt jeder Wege im  $(F_1 \otimes F_2)$ -invertierten Graphen einen Weg in  $G_i[F_i^{-1}]$ .

**Lemma 2.4.14.** In  $G_1 \otimes G_2$  ist  $F_1 \otimes F_2$  ein Morsefluss.

*Beweis (M24).* Es ist klar, dass sowohl  $T_1$  als auch  $T_2$  Matchings sind, denn  $F_1$  und  $F_2$  sind es auch. Weiterhin teilen sich  $T_1$  und  $T_2$  keine Knoten, denn der linke Faktor einer Kante aus  $T_1$  ist immer kollabierbar oder redundant, wohingegen der linke Faktor eines jeden Knotens aus  $T_2$  ausschließlich kritisch ist. Das heißt,  $F_1 \otimes F_2 = T_1 \cup T_2$  ist ein Matching.

Angenommen im  $F_1 \otimes F_2$ -invertierten Graphen existiert ein Kreis  $\gamma$  mit Startknoten  $a \otimes e$ . Die Folge von Kanten, bei denen sich der erste Faktor ändert, gibt uns einen Weg  $\gamma_1$  im  $F_1$ -invertierten Graphen. Dieser ist kreisfrei, das heißt,  $\gamma_1$  muss die Länge Null haben und alle Knoten, die von  $\gamma$  besucht werden, haben denselben linken Faktor. Analog kann sich aber auch der zweite Faktor nicht ändern und  $\gamma$  hat die Länge Null.  $\square$

*Bemerkung.* In  $G_1 \otimes G_2$  ist die Menge der kritischen Knoten

$$\{a \otimes e \mid a \text{ und } e \text{ sind beide kritisch}\}.$$

**Satz 2.4.15.** Es gibt einen Kettenisomorphismus,

$$\mathbb{M}(C_1 \otimes C_2, \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2, F_1 \otimes F_2) \cong \mathbb{M}(C_1, \mathfrak{B}_1, F_1) \otimes \mathbb{M}(C_2, \mathfrak{B}_2, F_2),$$

der Basiselemente identisch abbildet.

*Beweis (M25) und (M26).* Das rechte Differential ist von der Form

$$\partial(a \otimes e) = \partial a \otimes e + (-1)^{|a|} a \otimes \partial e.$$

Wenn wir zeigen können, dass ein Weg zwischen zwei essentiellen Knoten  $\gamma: a_1 \otimes e_1 \rightsquigarrow a_n \otimes e_n$  mit

$$\text{grad}(a_n \otimes e_n) + 1 = \text{grad}(a_1 \otimes e_1) \quad (2.1)$$

genau einen der beiden Faktoren invariant lassen muss, sind wir fertig, denn dann stimmen die beiden Differentiale überein. Dazu verstehen wir zuerst, warum die steigenden Kanten eines Weges in genau einer der Mengen  $T_1$  bzw.  $T_2$  liegen müssen.

Falls  $\gamma$  eine Kante  $a_i \otimes e_i \nearrow a_{i+1} \otimes e_{i+1}$  aus  $T_2$  benutzt, so ist der linke Faktor per Definition  $a_{i+1} = a_i$  essentiell und  $e_i$  redundant. Wir haben eine steigende Kante benutzt, das heißt,

$$\text{grad}(a_i \otimes e_i) + 1 = \text{grad}(a_i \otimes e_{i+1}).$$

Der Startknoten  $a_1 \otimes e_1$  ist essentiell, das heißt die erste Kante ist fallend. Da der Endknoten auch essentiell ist, folgt mit Lemma 2.2.7 und Gleichung (2.1)

$$\text{grad}(a_i \otimes e_i) + 1 = \text{grad}(a_i \otimes e_{i+1}) = \text{grad}(a_1 \otimes e_1).$$

Wir erhalten somit

$$\text{grad}(a_i) + \text{grad}(e_{i+1}) = \text{grad}(a_i \otimes e_{i+1}) = \text{grad}(a_1 \otimes e_1) = \text{grad}(a_1) + \text{grad}(e_1). \quad (2.2)$$

Wenn wir den Weg im  $F_1$ -invertierten Graphen betrachten, der durch den ersten Faktor gegeben ist, so muss  $\text{grad}(a_i) \leq \text{grad}(a_1)$  gelten, denn  $a_1$  ist essentiell. Analog ist  $\text{grad}(e_{i+1}) \leq \text{grad}(e_1)$ . Aus Gleichung (2.2) folgt dann  $\text{grad}(a_i) = \text{grad}(a_1)$ . Das heißt, wir haben im  $F_1$ -invertierten Graphen einen Weg  $a_1 \rightsquigarrow a_i$  zwischen zwei essentiellen Knoten vom selben Grad, was nur für

$$a_1 = a_i$$

möglich ist. Falls im Anfangsstück  $a_1 \otimes e_1 \rightsquigarrow a_i \otimes e_i$  von  $\gamma$  eine Kante aus  $T_1$  läge, so müssten  $a_1$  und  $a_i$  verschieden sein, indem man sich wieder den gegebenen Weg im  $F_1$ -invertierten Graphen anschaut. Aber so eine Kante kann auch nicht später durchlaufen werden, denn sonst ist  $\text{grad}(a_1) = \text{grad}(a_n) + 1$  und – da  $e_i$  kollabierbar ist – auch  $\text{grad}(e_1) = \text{grad}(e_n) + 1$ . Das steht im Widerspruch zu

$$\text{grad}(a_1) + \text{grad}(e_1) = \text{grad}(a_1 \otimes e_1) = \text{grad}(a_n \otimes e_n) + 1 = \text{grad}(a_n) + \text{grad}(e_n) + 1.$$

Insgesamt kann  $\gamma$  nicht gleichzeitig Kanten aus  $T_1$  und  $T_2$  verwenden.

Falls  $\gamma$  keine Kante aus  $T_1$  benutzt, der rechte Faktor also nie im Grad steigt, so ist entweder  $a_1 = a_n$  oder aber  $\text{grad}(a_1) > \text{grad}(a_n)$ . Im zweiten Fall muss der rechte Faktor  $\text{grad}(e_1) = \text{grad}(e_n)$  erfüllen. Die beiden Knoten  $e_1$  und  $e_n$  sind essentiell im  $F_2$ -invertierten Graphen und es folgt  $e_1 = e_n$ . Wird keine Kante aus  $T_2$  benutzt, so folgt analog, dass einer der Faktoren konstant sein muss.  $\square$

*Bemerkung.* In der Definition von  $F_1 \otimes F_2$  hätte man auch die Kanten aus  $F_2$  bevorzugen können.

### 2.4.5 Dualisieren von Morseflüssen

Wenn wir einen endlichen freien Modul  $M$  mit Basis  $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$  vermöge  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$  dualisieren, ist  $\mathfrak{B}^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$  mit

$$b_i^*(b_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **duale Basis** von  $C^*$ . Für freie, endlich erzeugte Moduln ist das Dualisieren einer Matrix nichts anderes, als sie zu transponieren. Der kombinatorische Kettenkomplex  $G^*$  des dualisierten Komplexes  $C^*$  entsteht also aus  $G$  durch Umkehren aller Kanten, wobei die Kanten ihr Gewicht behalten.

**Definition 2.4.16** (Dualer Morsefluss). Sei  $F$  ein Morsefluss in  $G$ . Dann heißt die in  $G^*$  liegende Kantenmenge

$$F^* = \{(v, w) \mid (w, v) \in F\}$$

der zu  $F$  **duale Morsefluss**.

Offensichtlich ist  $F^*$  ein Matching. Man überzeugt sich leicht, dass der  $F^*$ -invertierte Graph aus dem  $F$ -invertierten Graphen durch Umkehren aller Kanten entsteht. Die Gewichte bleiben dabei erhalten. Deswegen ist der  $F^*$ -invertierte Graph kreisfrei. Ein Knoten  $b$  in  $G$  ist genau dann kritisch, wenn  $b^*$  in  $G^*$  kritisch ist.

**Satz 2.4.17.** *Es gibt einen Kettenisomorphismus,*

$$\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)^* \cong \mathbb{M}(C^*, \mathfrak{B}^*, F^*)$$

*der Basiselemente identisch abbildet.*

*Beweis.* Die Verbindungszahlen  $\vartheta(b_j, b_i)$  und  $\vartheta'(b_i^*, b_j^*)$  sind bis auf die Reihenfolge des jeweiligen Produkts gleich. Da unser Ring kommutativ ist, gilt bereits Gleichheit.<sup>4</sup> Dass dann die entsprechenden darstellenden Matrizen dieselben Einträge haben, folgt sofort, denn Dualisieren entspricht Transponieren.

$$\partial_{j,i}^* = \partial_{i,j} = \vartheta(b_j, b_i) = \vartheta'(b_i^*, b_j^*) = \partial'_{j,i}$$

□

<sup>4</sup>Falls  $\mathbb{K}$  nicht kommutativ ist, definieren wir das Gewicht eines Weges in Abhängigkeit davon, ob der zugehörige Komplex ein Links- oder Rechtsmodul ist.



## 3 Ein Anwendungsbeispiel

Diese Arbeit orientiert sich an Mehners Diplomarbeit [Meh11]. Immer wenn ein hier vorgestellter Beweis die gleiche Idee formalisiert, entspricht die nebenstehende Zahl der in [Meh11] verwendeten Nummerierung.

### 3.1 Motivation

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, wie man die diskrete Morsetheorie anwendet, um die Homologie eines ganz bestimmten Kettenkomplexes  $C$  auszurechnen. Dieser kommt als Spalte eines Bikomplexes vor, der die Kohomologie des Modulraum  $\mathfrak{M}_{g,1}^m$  bestimmt. Die Geometrie der Zellen wird unter anderem in [Abh05] und [Meh11] veranschaulicht. Um ihre Kombinatorik einfacher beschreiben zu können, erklären wir, was eine Faktorabilität der  $\mathfrak{S}_n$  ist. Eine allgemeine Definition und ausführliche Diskussion der Faktorabilität von Monoiden ist in Visys Dissertation [Vis10] zu finden.

### 3.2 Faktorabilität der symmetrischen Gruppe

Wir bezeichnen die symmetrische Gruppe der Menge  $\{1, \dots, n\}$  mit  $\mathfrak{S}_n$ . Ist  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  eine Permutation, so ist  $\text{cyc}(\sigma)$  die Menge der disjunkten Zyklen, in die  $\sigma$  zerfällt.<sup>1</sup> Außerdem nennen wir  $|\text{cyc}(\sigma)|$  die Zyklenzahl von  $\sigma$ .

**Beispiel 3.2.1.** Für  $\sigma = (123)(45) \in \mathfrak{S}_6$  ist die Menge der disjunkten Zyklen

$$\text{cyc}(\sigma) = \{(123), (45), (6)\}$$

und die Zyklenzahl ist

$$|\text{cyc}(\sigma)| = 3.$$

**Definition 3.2.2** (normierte Gruppe). Sei  $G$  eine Gruppe und  $N: G \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abbildung von Mengen, die

$$N(m_1 m_2) \leq N(m_1) + N(m_2) \tag{N1}$$

$$N(g) = N(g^{-1}) \tag{N2}$$

$$N(g) = 0 \Leftrightarrow g = 1_G \tag{N3}$$

erfüllt. Dann nennt man  $N$  eine **Norm** und  $(G, N)$  eine **normierte Gruppe**.

---

<sup>1</sup>Bei uns sind Fixpunkte auch Zyklen.

Eine naheliegende und häufig verwendete Norm ist die sogenannte Wortlängennorm.

**Definition 3.2.3** (Wortlängennorm). Sei  $G$  eine Gruppe und  $E \subset G$  ein Erzeugendensystem. Dann ist die **Wortlängennorm** bezüglich  $E$  definiert durch

$$N(g) = \min\{k \mid \exists e_1, \dots, e_k \in E : g = e_1 e_2 \cdots e_k\}.$$

*Bemerkung.* Das Minimum existiert immer, denn  $E$  ein Erzeugendensystem. Aus der Definition folgt sofort, dass die Dreiecksungleichung immer erfüllt ist, also  $N$  eine Norm auf  $G$  definiert.

Wenn wir  $\mathfrak{S}_n$  untersuchen, so legen wir als Erzeugendensystem die Menge aller Transpositionen fest. Die **Wortlängennorm** der  $\mathfrak{S}_n$  ist die Wortlängennorm bezüglich dieses Erzeugendensystems.

**Lemma 3.2.4.** Die Wortlängennorm der  $\mathfrak{S}_n$  ist

$$N(\sigma) = n - |\text{cyc}(\sigma)|.$$

*Beweis.* Für eine zyklische Permutation  $\rho \in \mathfrak{S}_n$ , die  $|\rho|$  Symbole nichttrivial permutiert, ist die Norm bekanntlich  $|\rho| - 1$ . Außerdem bleibt die Norm eines Produkts erhalten, wenn die zugehörigen nichttrivial permutierten Symbolmengen disjunkt sind.

Zerlegen wir eine beliebige Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  in ihre zyklischen Permutationen  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_l$ , so ist nach Definition  $l = |\text{cyc}(\sigma)|$  und

$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^{|\text{cyc}(\sigma)|} N(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{|\text{cyc}(\sigma)|} (|\sigma_i| - 1) = \sum_{i=1}^{|\text{cyc}(\sigma)|} |\sigma_i| - \sum_{i=1}^{|\text{cyc}(\sigma)|} 1 = n - |\text{cyc}(\sigma)|.$$

□

**Lemma 3.2.5.** Seien  $\sigma$  und  $\tau$  Permutationen mit  $N(\sigma\tau) = N(\sigma) + N(\tau)$ . Liegen zwei Symbole  $i$  und  $j$  im selben Zykel von  $\sigma$  oder  $\tau$ , so auch in  $\sigma\tau$ .

*Beweisskizze (M45) und (M46).* Man zeigt zunächst, dass das Produkt von zwei zyklischen Permutationen genau dann die Norm enthält, wenn sie sich höchstens ein nichttrivial permutiertes Symbol teilen. Nun führt man einen Induktionsbeweis über die Anzahl der nichttrivialen Zyklen von  $\sigma$  und  $\tau$ . □

**Definition 3.2.6** (Höhe einer Permutation). Sei  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  eine nichttriviale Permutation. Die **Höhe** von  $\sigma$  ist das größte Symbol, welches von  $\sigma$  nichttrivial permutiert wird

$$\text{ht}(\sigma) = \max\{1 \leq i \leq n \mid \sigma(i) \neq i\}.$$

Außerdem setzt man  $\text{ht}(\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n}) = 0$ .



**Definition 3.2.7** (Faktorabilität). Die **Faktorabilität**  $\eta: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$  ist wie folgt definiert. Für die triviale Permutation ist

$$\eta(\mathbf{1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

Sei  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  nichttrivial,  $k = \text{ht}(\sigma)$  und  $\sigma'$  die Transposition

$$\sigma' = (k, \sigma^{-1}(k)).$$

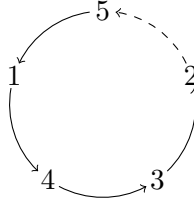
Dann ist

$$\eta(\sigma) = (\bar{\sigma}, \sigma') = (\sigma\sigma', \sigma').$$

Man nennt  $\sigma'$  das **Präfix** und  $\bar{\sigma} = \sigma\sigma'$  den **Rest** von  $\sigma$ .

Anschaulich spaltet  $\eta$  die Transposition mit dem größten Symbol ab.

**Beispiel 3.2.8.** Betrachtet man die zyklische Permutation  $\sigma = (14325) = (51432)$  in  $\mathfrak{S}_5$ , so ist  $\sigma' = (52) = (25)$  das Präfix und  $\bar{\sigma} = (1432)$  der Rest. Im folgenden Diagramm ist  $\sigma$  durch den vollständigen Kreis beschrieben sowie  $\sigma'$  mit gestrichelten und  $\bar{\sigma}$  mit durchgezogenen Linien angedeutet.



Als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt machen wir uns mit einigen elementaren Eigenschaften der Faktorabilität vertraut.

**Lemma 3.2.9.** Die Faktorabilität  $\eta$  erfüllt für alle  $\sigma \neq \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n}$  die Eigenschaften

1.  $\sigma = \bar{\sigma}\sigma'$
2.  $N(\sigma') = 1$
3.  $N(\sigma) = N(\bar{\sigma}) + N(\sigma')$
4.  $\text{ht}(\sigma) = \text{ht}(\sigma') > \text{ht}(\bar{\sigma})$
5. Erhält das Produkt von  $\sigma$  und  $\tau$  die Norm, so ist  $\text{ht}(\sigma\tau) = \max\{\text{ht}(\sigma), \text{ht}(\tau)\}$ .

*Beweis (M55).* 1. Nach Definition ist  $\bar{\sigma} = \sigma\sigma'$  und  $\sigma'$  ist selbstinvers.

2. Das Präfix  $\sigma'$  ist eine Transposition, liegt also im – von uns fixierten – Erzeugendensystem.

3. Sei  $\sigma = \sigma_l \cdots \sigma_1$  eine Zerlegung in disjunkte, zyklische Permutationen. Da disjunkte Permutationen kommutieren, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $\sigma_1$  von der Form

$$\sigma_1 = (s_1, \dots, s_{m-1}, s_m) = (s_1, s_2) \cdots (s_{m-1}, s_m)$$

### 3.3. Beschreibung der Zellen

---

ist und  $s_m$  die Höhe von  $\sigma$  ist. Damit ist  $\sigma' = (s_{m-1}, s_m)$  und

$$\bar{\sigma} = \sigma_l \cdots \sigma_2(s_1, \dots, s_{m-1}).$$

Die Norm von  $\bar{\sigma}$  ist demnach

$$N(\bar{\sigma}) = N(\sigma) - 1 = N(\sigma) - N(\sigma').$$

4. Aus der Definition des Rests folgt zum einen, dass alle von  $\bar{\sigma}$  nichttrivial permutierten Symbole auch von  $\sigma$  nichttrivial permutiert werden. Zum anderen ist die Höhe  $h$  von  $\sigma$  ein Fixpunkt des Rests. Das zeigt die  $\text{ht}(\sigma) > \text{ht}(\bar{\sigma})$ . Die Gleichung  $\text{ht}(\sigma) = \text{ht}(\sigma')$  folgt unmittelbar aus der Definition der Höhe.

5. Ist  $i$  ein Fixpunkt von  $\sigma$  und  $\tau$ , so auch von  $\sigma\tau$ . Das zeigt  $\text{ht}(\sigma\tau) \leq \max\{\text{ht}(\sigma), \text{ht}(\tau)\}$ . Falls  $i$  von  $\sigma$  oder  $\tau$  nichttrivial permutiert wird, so gilt nach Lemma 3.2.5, dass  $i$  kein Fixpunkt von  $\sigma\tau$  ist. Das zeigt die andere Ungleichung.  $\square$

**Lemma 3.2.10.** *Sei  $1_{\mathfrak{S}_n} \neq \sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Falls die Permutationen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die folgenden Bedingungen erfüllen, ist  $\bar{\sigma} = \sigma_1$  und  $\sigma' = \sigma_2$ .*

1.  $\sigma = \sigma_1\sigma_2$
2.  $N(\sigma_2) = 1$
3.  $\text{ht}(\sigma) = \text{ht}(\sigma_2) > \text{ht}(\sigma_1)$

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $\sigma_2 = (k, l)$  eine Transposition mit  $k = \text{ht}(\sigma_2) = \text{ht}(\sigma)$ . Außerdem ist  $k$  ein Fixpunkt von  $\sigma_1$  und es gilt

$$\sigma^{-1}(k) = (\sigma_1\sigma_2)^{-1}(k) = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}(k) = \sigma_2^{-1}(k) = l.$$

Deshalb ist

$$\sigma' = (k, \sigma^{-1}(k)) = \sigma_2$$

und

$$\bar{\sigma} = \sigma\sigma' = \sigma\sigma_2 = \sigma_1.$$

$\square$

### 3.3 Beschreibung der Zellen

Seien  $g$ ,  $m$  und  $p$  positive natürliche Zahlen. Dann ist  $C_q$  frei erzeugt von allen Tupeln  $(g_q \mid g_{q-1} \mid \dots \mid g_1) \in \mathfrak{S}_p^q$ , welche den folgenden Bedingungen genügen.

1. Die Summe der Normen  $N(g_q) + \dots + N(g_1)$  ist genau  $2g + m$ .
2. Die Permutation  $g_q \cdots g_1$  hat genau  $m + 1$  Zykel.
3. Keine Permutation  $g_i$  ist trivial.
4. Es gibt kein Symbol  $1 \leq j \leq n$ , das unter allen  $g_i$  ein Fixpunkt ist.

Das Differential  $\partial: C_q \rightarrow C_{q-1}$  ist die Wechselsumme

$$\partial = \sum_{i=0}^q (-1)^i d_i,$$

wobei die Randabbildungen  $d_i: \mathfrak{S}_p^q \rightarrow \mathfrak{S}_p^{q-1}$  durch

$$d_i((g_q | \dots | g_1)) = \begin{cases} (g_q | \dots | g_{i+1}g_i | \dots | g_1) & i < q \text{ und erfüllt 1. bis 4.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden. Dass  $C$  mit diesem Differential ein Kettenkomplex ist, folgt aus allgemeinen Resultaten in [Bö90], [Bö03] und [Bö05], kann aber auch per Hand nachgerechnet werden, indem man zeigt, dass für  $i < j$  bereits  $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$  erfüllt ist.

Wir konstruieren nun einen Morsefluss  $F = \cup F_n$ , mit dessen Hilfe wir zeigen, dass  $C$  höchstens eine nichttriviale Homologiegruppe besitzt. Diese befindet sich im Grad  $2g + m$  und ist frei erzeugt von allen Elementen  $(g_q | \dots | g_1)$ , die sowohl  $N(g_q) = \dots = N(g_1) = 1$  als auch  $\text{ht}(g_q) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$  erfüllen.

Es bestehe  $F_n$  aus allen Kanten

$$(g_q | \dots | \overline{g_n} | g'_n | \dots | g_1) \searrow (g_q | \dots | g_n | \dots | g_1),$$

die den beiden Bedingungen

1.  $N(g_n) > N(g_{n-1}) = \dots = N(g_1) = 1$
2.  $\text{ht}(g_n) \geq \text{ht}(g_{n-1}) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$

genügen.

**Lemma 3.3.1.** *Es ist  $F = \cup F_n$  ein Matching in den invertierbaren Kanten.*

*Beweis (M169).* Wir zeigen die Aussage induktiv. Beginnend bei dem leeren Matching  $F_0$  gehen wir davon aus, dass die Aussage für  $n - 1$  gezeigt wurde.

Sei  $i < n$  und  $v = (g_q | \dots | g_1)$  ein Knoten einer Kante aus  $F_i$ . Ist  $v$  ein Endknoten, so besagt die erste Bedingung  $N(g_i) > 1$ . Das heißt aber auch, dass  $v$  weder Anfangs- noch Endknoten einer Kante aus  $F_n$  sein kann. Ist  $v$  ein Anfangsknoten, so gilt nach Lemma 3.2.9  $\text{ht}(g_{i+1}) < \text{ht}(g'_i) = \text{ht}(g_i)$ . Die zweite Bedingung zeigt, dass  $v$  in keiner Kante aus  $F_n$  vorkommt. Das heißt, in  $F_n$  kommen keine Knoten aus  $F_i$  vor.

Sei  $v = (g_q | \dots | g_1)$  ein Knoten aus  $F_n$ . Ist  $v$  ein Anfangsknoten, so ist der  $n$ -te Eintrag  $g'_n$  ein nichttriviales Präfix, das heißt,  $N(g'_n) = 1$ . Der eindeutige Endknoten ist damit  $(g_1 | \dots | \overline{g_n}g'_n | \dots | g_1)$ . Ist  $v$  ein Endknoten, so ist  $N(g_n) > 1$ . Der eindeutige Anfangsknoten ist  $(g_1 | \dots | \overline{g_n} | g'_n | \dots | g_1)$ . Das heißt,  $F_n$  ist ein Matching.

Induktiv ist jede endliche Vereinigung der  $F_n$  ein Matching und somit – für  $n$  groß genug – auch  $F$ . Das Gewicht einer jeden Kante in  $F$  ist per Definition des Differentials  $\pm 1$ , also invertierbar.  $\square$

### 3.3. Beschreibung der Zellen

---

Im nächsten Schritt zeigen wir, weshalb  $G[F^{-1}]$  kreisfrei ist. Dazu verstehen wir das Verhältnis zweier Knoten  $v$  und  $x$ , zwischen denen ein Weg  $v \searrow w \nearrow x$  verläuft.

**Lemma 3.3.2.** *Sei  $v = (g_q \mid \dots \mid g_1)$  ein Knoten und  $w = d_j(v)$  der  $j$ -te Rand von  $v$  sowie  $w \nearrow x$  eine steigende Kante. Beginnt  $v$  mit genau  $k - 1$  Transpositionen, das heißt  $N(g_k) > N(g_{k-1}) = \dots = N(g_1) = 1$ , so gilt*

1. *Der Knoten  $x$  beginnt mit mindestens  $k - 1$  Transpositionen.*
2. *Beginnt  $x$  mit genau  $k - 1$  Transpositionen, so ist  $k > j$  und  $x$  entsteht aus  $w$  durch Faktorisieren des Eintrags  $g_{j+1}g_j$ .*

*Beweis (M170).* Wir bezeichnen  $w$  mit  $(h_{q-1} \mid \dots \mid h_1)$ . Der  $j$ -te Rand von  $v$  entsteht, indem die Einträge  $j + 1$  und  $j$  multipliziert werden. Somit ist

$$(h_{q-1} \mid \dots \mid h_j \mid \dots \mid h_1) = (g_q \mid \dots \mid g_{j+1}g_j \mid \dots \mid g_1).$$

Weiterhin ist  $(x, w)$  eine Kante in  $F$ , das heißt,  $x$  entsteht aus  $(h_{q-1} \mid \dots \mid h_1)$  durch Faktorisieren der ersten Permutation  $h_j$ , deren Norm größer als Eins ist.

$$x = (h_{q-1} \mid \dots \mid \overline{h_j} \mid h'_j \mid \dots \mid h_1)$$

Ist  $j > k$ , so ist  $h_k = g_k$ . Damit hat  $x$  die Form

$$x = (g_q \mid \dots \mid g_{j+1}g_j \mid \dots \mid \overline{g_k} \mid g'_k \mid \dots \mid g_1)$$

und beginnt mit mindestens  $k$  Transpositionen.

Ist  $j = k$ , so ist  $h_k = g_{k+1}g_k$  die erste Permutation, deren Norm größer als Eins ist. Somit beginnt

$$x = (g_q \mid \dots \mid \overline{g_{k+1}g_k} \mid (g_{k+1}g_k)' \mid \dots \mid g_1)$$

mit mindestens  $k$  Transpositionen.

Ist  $j < k$ , also  $w = (g_q \mid \dots \mid g_k \mid \dots \mid g_{j+1}g_j \mid \dots \mid g_1)$ , so entsteht  $x$  durch Trennen des Produkts  $g_{j+1}g_j$ . Unabhängig davon, ob  $j + 1 = k$  oder  $j + 1 < k$  gilt, beginnt

$$x = (g_q \mid \dots \mid g_k \mid \dots \mid \overline{g_{j+1}g_j} \mid (g_{j+1}g_j)' \mid \dots \mid g_1)$$

mit genau  $k - 1$  Transpositionen, denn im ersten Fall ist die Aussage klar und im zweiten Fall ist

$$N(\overline{g_{j+1}g_j}) = N(g_{j+1}g_j) - 1 = N(g_{j+1}) + N(g_j) - 1 = 1.$$

□

**Satz 3.3.3.** *Das Matching  $F$  ist ein Morsefluss.*

*Beweis (M171).* Angenommen im  $F$ -invertierten Graphen  $G[F^{-1}]$  gibt es einen nichttrivialen Kreis  $(v_0, w_0, v_1, \dots, v_0)$ . Nach Lemma 2.2.7 steigt und fällt der Weg abwechselnd und wir gehen davon aus, dass die  $v_i$  den höheren Grad besitzen. Im vorangegangenen Lemma 3.3.2 haben wir uns klar gemacht, dass die Anzahl der Transpositionen, mit denen ein Knoten

$v_i$  beginnt, im Vergleich zu  $v_{i+1}$  nie abnehmen kann. Da wir einen Kreis haben, ist es also unmöglich, dass die Anzahl variiert. Sie ist deswegen bei allen  $v_i$  identisch.

Nach Lemma 3.3.2 wissen wir, dass  $v_{i+1}$  aus  $v_i$  entsteht, indem das Produkt der Einträge  $j_i + 1$  und  $j_i$  faktorisiert wird. Da wir in einem Kreis sind, können wir annehmen, dass  $j = j_1$  maximal ist. Der Knoten  $v_1 = (g_q | \dots | g_1)$  erfüllt demnach  $\text{ht}(g_{j+1}) < \text{ht}(g_j) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$ . Sei  $m = \text{ht}(g_j)$ . Mit Hilfe von Lemma 3.2.9 (5.) sieht man ein, dass jeder Knoten  $v_i$  ein Element zwischen  $j$  und 1 mit Höhe  $m$  besitzen muss.

Angenommen es gibt ein minimales  $s > 1$  mit  $j_s = j_1 = j$ . Für  $v_{s-1} = (h_q | \dots | h_1)$  ist dann

$$v_s = (h_q | \dots | \overline{h_{j+1}h_j} | (h_{j+1}h_j)' | \dots | h_1).$$

Da  $j$  maximal und  $s$  minimal gewählt ist folgt  $h_{j+1} = g_{j+1}$ . Falls nun  $\text{ht}(h_{j+1}) < \text{ht}(h_j)$  gilt, so wendet man Lemma 3.2.10 auf  $\sigma_1 = h_{j+1}$  und  $\sigma_2 = h_j$  an und zeigt  $v_{s-1} = v_s$ . Ein Kreis der Länge zwei kann im  $F$ -invertierten Graphen aber nicht existieren. Demnach gilt  $\text{ht}(h_{j+1}) \geq \text{ht}(h_j)$ , also

$$m = \text{ht}(g_j) > \text{ht}(g_{j+1}) = \text{ht}(h_{j+1}) \geq \text{ht}(h_j) \geq \dots \geq \text{ht}(h_1).$$

Aber wir hatten uns davon überzeugt, dass jeder Knoten ein Element zwischen  $j$  und 1 der Höhe  $m$  besitzt. So ein  $s$  kann demnach nicht existieren.

Der  $j$ -te Rand wird also genau einmal gebildet. Da  $j$  maximal ist und wir in einem Kreis sind, muss der  $j + 1$ -te Eintrag aller Knoten  $v_i$  gleich sein. Der letzten Teil des Beweises kann analog auf die Knoten  $v_0$  und  $v_1$  angewandt werden.  $\square$

**Satz 3.3.4.** *Der Morsekomplex bezüglich  $F$  ist im Grad  $2g + m$  konzentriert und wird von allen Knoten  $(g_q | \dots | g_1)$  erzeugt, die sowohl  $N(g_q) = \dots = N(g_1) = 1$  als auch  $\text{ht}(g_q) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$  erfüllen.*

*Beweis (M172).* Sei  $v = (g_q | \dots | g_1)$  und  $n$  bezüglich  $\text{ht}(g_n) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$  maximal. Falls nun  $N(g_n) = \dots = N(g_1) = 1$  verletzt ist, gibt es ein minimales  $i \leq n$  mit  $N(g_i) > 1$  und damit ist

$$(g_q | \dots | \overline{g_i} | g_i' | \dots | g_1) \searrow (g_q | \dots | g_i | \dots | g_1)$$

eine Kante in  $F$ , also  $v$  redundant. Sei  $N(g_n) = \dots = N(g_1) = 1$  und  $n < q$  erfüllt. Nach Wahl von  $n$  haben wir  $\text{ht}(g_{n+1}) < \text{ht}(g_n)$ . Der  $n$ -te Rand ist deswegen nichttrivial. Außerdem ist nach Lemma 3.2.9  $\text{ht}(g_{n+1}g_n) = \text{ht}(g_n) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$ . Damit ist

$$(g_q | \dots | g_{n+1} | g_n | \dots | g_1) \searrow (g_q | \dots | g_{n+1}g_n | \dots | g_1)$$

eine Kante in  $F$ , also  $v$  kollabierbar. Damit sind alle Knoten, die nicht den Bedingungen genügen, kollabierbar oder redundant.

Erfüllt  $v$  die geforderten Bedingungen, so kann  $v$  nicht kollabierbar sein, denn sonst müsste dieser Knoten von der Form  $(g_q | \dots | \overline{g_n} | g_n' | \dots | g_1)$  sein, allerdings ist  $\text{ht}(\overline{g_n}) < \text{ht}(g_n')$ . Dass  $v$  redundant ist, muss auch falsch sein, da es dann einen Eintrag  $g_n$  mit  $N(g_n) > 1$  gäbe. Also sind alle solche Knoten essentiell. Nun enthält  $C$  aber nur solche Knoten, die  $N(g_q) + \dots + N(g_1) = 2g + m$  erfüllen, der Morsekomplex ist also im Grad  $2g + m$  konzentriert.  $\square$

**Korollar 3.3.5.** *Bezeichne  $\mathcal{E}$  die Menge der Knoten  $(g_q \mid \dots \mid g_1)$ , die sowohl  $N(g_q) = \dots = N(g_1) = 1$  als auch  $\text{ht}(g_q) \geq \dots \geq \text{ht}(g_1)$  erfüllen. Dann ist*

$$H_n(C) = \begin{cases} \mathbb{K}\langle \mathcal{E} \rangle & n = 2g + m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

*Beweis (M173).* Aus Kapitel 2 wissen wir, dass  $C$  homotopieäquivalent zum Morsekomples bezüglich  $F$  ist. Dieser ist aber nach Satz 3.3.4 im Grad  $2g + m$  konzentriert und somit seine eigene Homologie.  $\square$

# Symbolverzeichnis

$(C_n, \partial_n, \mathfrak{B}_n)_n$	Ein freier Kettenkomplex von endlichem Typ mit Basen $\mathfrak{B}_n$ – Abschnitt 2.1
$\mathfrak{B}_n^K, \mathfrak{B}_n^R, \mathfrak{B}_n^E$	Die kollabierbaren / redundanten / essentiellen Basiselemente – Seite 17
$\text{cyc}(\sigma)$	Die Menge der disjunkten Zykel inklusive Fixpunkte – Seite 39
$\text{Erw}_\zeta$	Koeffizientenerweiterung eines Moduls / Kettenkomplexes / Morseflusses – Abschnitte 2.4.1 und 2.4.2
$\eta$	Faktorabilität der symmetrischen Gruppe – Definition 3.2.7
$\gamma: v \rightsquigarrow w$	Ein Weg zwischen den Knoten $v$ und $w$ – Definition 1.4
$\text{grad}$	Die Graduierung eines Graphen – Definition 1.7
$G[F^{-1}]$	Der $F$ -invertierte Graph – Definition 1.11
$\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$	Kommutative Ringe mit Eins – Abschnitt 2.1
$\mathbb{K}^\times$ und $\mathbb{L}^\times$	Die Einheitengruppe von $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{L}$ – Abschnitt 2.1
$\kappa$ und $\kappa_F$	Das Gewicht eines Graphen / des $F$ -invertierten Graphen – Definition 1.1 / 1.6
$\mathbb{M}(C, \mathfrak{B}, F)$	Der Morsekomplex von $C$ bezüglich $F$ – Definition 2.2.16
$N$	Die Norm einer Gruppe / Wortlängennorm der symmetrischen Gruppe – Definition 3.2.2
$\oplus$	Die direkte Summe zweier Kettenkomplexe / Graphen / Morseflüsse – Abschnitt 2.4.3
$\otimes$	Das Tensorprodukt zweier Kettenkomplexe / Graphen / Morseflüsse – Abschnitt 2.4.4
$\bar{g}$ und $g'$	Präfix und Rest einer Permutation $g$ – Definition 3.2.7
$\mathfrak{S}_n$	Die symmetrische Gruppe einer $n$ elementigen Menge – Seite 39
$\vartheta$	Die Verbindungszahl – Definition 2.2.14

$*$	Das Dualisieren von Kettenkomplexen / Basen / Morseflüssen – Abschnitt 2.4.5
$E_{j,i}$	Die Standardmatrix – Definition 2.3.3
$G = (V, E, \kappa)$	Der bezüglich $\kappa$ gewichtete Graph – Definition 1.6
$g(\gamma)$	Das Gewicht eines Weges $\gamma$ – Definition 1.6
$G_W$	Der von der Knotenmenge $W$ aufgespannte Teilgraph – Definition 1.9
$p(v)$	Der Partnerknoten von $v$ bezüglich eines Matchings – Definition 1.13
$T_{j,i}(\lambda)$	Die Elementarmatrix – Definition 2.3.3
$v \nearrow w$	Eine Kante $(v, w)$ in einem graduierten Graphen, die den Grad erhöht – Definition 1.7
$v \searrow w$	Eine Kante $(v, w)$ in einem graduierten Graphen, die den Grad verringert – Definition 1.7



# Stichwortverzeichnis

- Basis
  - duale, 37
  - einfache, 25
- Direkte Summe von Morseflüssen, 32
- Faktorabilität, 39
  - der symmetrischen Gruppe, 41
- Graph, 9
  - $F$ -invertierter, 11
  - aufgespannter Teilgraph, 11
  - gewichteter, 11
  - graduierter, 11
  - kreisfreier, 10
- Gruppe
  - normierte, 39
  - symmetrische, 39
- Kante, 9
  - ausgehende, 9
  - eingehende, 9
  - fallende, 11
  - invertierbare, 13
  - invertierte, 11
  - steigende, 11
- Knoten, 9
  - Endknoten, 10
  - essentieller, 15
  - kollabierbarer, 15
  - kritischer, 15
  - redundanter, 15
  - Startknoten, 10
- Koeffizientenerweiterung
  - eines Kettenkomplexes, 29
  - eines Moduls, 29
  - eines Morseflusses, 31
- Kombinatorischer Kettenkomplex, 13
- Kreis, 10
- Matching, 12
- Matrix
  - Elementarmatrix, 20
  - Standardmatrix, 20
- Morsefluss, 15
- Morsekomplex, 19
- Norm einer Gruppe, 39
- Pfad, 10
- Spaltenoperation, 21
- Tensorprodukt
  - von Kettenkomplexen, 33
  - von Morseflüssen, 35
- Verbindungszahl, 18
- Wortlängennorm, 40
  - der symmetrischen Gruppe, 40
- Zeilenoperation, 21
- Zeilenreduktion, 22
- Zykelzahl, 39

# Literaturverzeichnis

- [Abh05] ABHAU, Jochen: *Die Homologie von Modulräumen Riemannscher Flächen - Berechnungen für  $g \leq 2$* , Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Diplomarbeit, Januar 2005
- [Bö90] BÖDIGHEIMER, Carl-Friedrich: The topology of moduli spaces, Part I : Hilbert uniformization. In: *Math. Gott. (Preprints of the SFB 170, Göttingen)* 9 (1990)
- [Bö03] BÖDIGHEIMER, Carl-Friedrich: The moduli space of Riemann surfaces with boundary. In: *Preprint* (2003)
- [Bö05] BÖDIGHEIMER, Carl-Friedrich: The Hilbert uniformization I. In: *Preprint* (2005)
- [Ehr98] EHRENFRIED, Ralf: *Die Homologie der Modulräume berandeter Riemannscher Flächen von kleinem Geschlecht*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Dissertation, 1998
- [Ehr04] EHRENFRIED, Ralf: On the homology of moduli spaces of Riemann Surfaces. In: *Preprint* (2004)
- [For02] FORMAN, Robin: A User's Guide to Discrete Morse Theory. In: *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* 48 (2002), S. 225–241
- [Meh11] MEHNER, Stefan: *Homologieberechnungen von Modulräumen Riemannscher Flächen durch diskrete Morse-Theorie*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Diplomarbeit, Dezember 2011
- [Vis10] VISY, Balázs: *Factorable Groups and their Homology*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Dissertation, November 2010