Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

universitätbonn

Analysis I

Übungsblatt Nr.1 Abgabe vor der Vorlesung am 21.10.2013

Bei den folgenden Aufgaben geht es besonders darum präzise und sorgfältig zu argumentieren.

Aufgabe 1 (Körper)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, „selbstverständliche“ Eigenschaften von z.B. den reellen Zahlen auch formal aus den Körperaxiomen herzuleiten. Dazu sei K ein Körper, $a, b \in K$. Leiten Sie die folgenden Behauptungen aus den Körperaxiomen ab:

a) Das multiplikativ inverse Element ist eindeutig,

b) $((a)^{-1})^{-1} = a$ für $a \neq 0$,

c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ für $a, b \neq 0$,

d) $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

Hinweis: Es könnte interessant sein, Kapitel 4 im Buch von Tao zu Rate zu ziehen.

Aufgabe 2 (Mengen)

a) Sei $f : M \mapsto N$ eine Abbildung und seien $A, A' \subset M$ und $B, B' \subset N$. Zeigen Sie:

$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A'), \quad f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$$
$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'), \quad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').$$

Hierbei bezeichnet $f^{-1}(B) = \{x \in M | \ f(x) \in B\}$ das Urbild der Menge B unter der Abbildung f.
Gilt auch $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$? Falls nein: Welche Bedingungen stellen sicher, dass die Aussage gilt?

b) Seien $B, C \subset A$ Mengen. Zeigen Sie:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$

Aufgabe 3 (Logik)

a) Enscheiden und begründen Sie, welche der Aussagen aus der Behauptung *„Wenn das Wetter gut ist, gehen wir wandern“* folgen (ohne zusätzliche Annahmen zu treffen).

   (i) Wenn das Wetter nicht gut ist, gehen wir nicht wandern.

   (ii) Wenn wir nicht wandern gehen, ist das Wetter nicht gut.

   (iii) Falls wir wandern, ist das Wetter gut.

b) Verneinen Sie die folgenden Aussagen, z.B.: „Alle Matheaufgaben sind schwierig.“ $\rightsquigarrow$ „Es gibt Matheaufgaben, die nicht schwierig sind.“

   - Zu jeder Aufgabe gibt es jemanden, der sie lösen kann oder es zumindest versucht.
   - Wenn es Sommer ist und es nicht regnet, gehen wir schwimmen.
   - Für $q \in \mathbb{Q}$ gibt es eine natürliche Zahl, die größer ist als q.
   - Zu je zwei rationalen Zahlen r_1 und r_2 mit $r_1 < r_2$ gibt es eine dritte rationale Zahl r mit $r_1 < r < r_2$.

Hinweis: Durch die Negation können sich (inhaltlich) falsche Aussagen ergeben.

Aufgabe 4 (Ungleichungen)

a) Es seien $r, s \in \mathbb{R}$, $0 < r < s$. Zeigen Sie:

$$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$$

b) Das Quadrat einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ sei größer als x. Bestimmen Sie die Menge aller solchen Zahlen.

c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $x + 2 < |x - 3|$.

d) Seien $a, b > 0$ mit $ab = 1$. Zeigen Sie:

$$a + b \geq 2.$$

   Unter welchen Bedingungen gilt Gleichheit? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Hinweis: Es genügt eine der Teilaufgaben auf die Axiome zurückzuführen. Bei den übrigen Aufgaben ist die Verwendung von Schulwissen erlaubt.