Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.14 — Abgabe vor der Vorlesung am 03.02.2014

Aufgabe 61 (Taylorpolynome)

Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es seien f sowie f'' auf (a, ∞) beschränkte Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.

b) Beweisen Sie, dass

$$\left(\sup_{x \in (a,\infty)} |f'(x)| \right)^2 \leq 4 \sup_{x \in (a,\infty)} |f(x)| \sup_{x \in (a,\infty)} |f''(x)|.$$

c) Es gelte zusätzlich $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Folgern Sie, dass auch $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$ gilt, indem Sie Aufgabenteil b) auf das Intervall (b, ∞) anwenden und $b \to \infty$ untersuchen.

Tipp: Benutzen Sie, dass es für $x \in (0, \infty)$ und für $h > 0$ ein $\xi \in [x, x + 2h]$ gibt mit

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x + 2h) - f(x)) - hf''(\xi)$$

und betrachten Sie für Aufgabenteil b) $h = \left(\frac{\sup_{x \in (a,\infty)} |f(x)|}{\sup_{x \in (a,\infty)} |f''(x)|} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 62 (Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz/ absolute Konvergenz:

$$a_n = \frac{1}{n(\ln(n))^\gamma}, \quad a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}, \quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad a_n = \frac{i^n n}{2^n},$$

$$a_n = \frac{1}{\ln(n)^3}, \quad a_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}, \quad a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}, \quad a_n = \frac{n^5}{4^n}.$$

Aufgabe 63 (Reihen)

a) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn die verdichtete Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

b) Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Dezimalstellen von $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nd(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nd(n)d(d(n))}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nd(n)d(d(n))d(d(d(n)))},$$

divergieren, obwohl $d(n)$ gegen ∞ strebt.

Tipp zu Aufgabenteil b): Das Verdichtungskriterium gilt nicht nur zur Basis 2.

Aufgabe 64 (*Potenzreihen)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius:

$$a_n = n^5 \ln(n+1) + n^2 i, \quad a_n = \frac{n^3 \sin(n)}{1,3^n}, \quad a_n = 3^{\frac{n}{2}} \exp(-n), \quad a_n = \frac{(in)^n}{(n!)^2}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$.

c) Die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ seien R_a, R_b. Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ einen Konvergenzradius R mit $R \geq R_a R_b$ hat.