Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.12 — Abgabe vor der Vorlesung am 20.01.2014

Aufgabe 53 (Integration)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx, \quad \int_3^4 \frac{1}{x^3+x}dx, \quad \int_2^3 x^2\ln(x)dx, \quad \int_0^\pi \sin^2(t)dt.$$

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}^*$. Berechnen Sie $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

c) Zeigen Sie (z.B. mittels partieller Integration) für $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Identität:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 54 (Integration)

a) Seien $a, b, c, e \in \mathbb{R}$ und $e \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution, dass

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt, \quad \int_a^b f(er)dr = \frac{1}{e}\int_{ea}^{eb} f(t)dt.$$

b) Sei $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte $t(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $F(x) := \ln|t(x)|$ eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{t'(x)}{t(x)}$ ist.

c) Bestimmen Sie mögliche Stammfunktionen zu den Funktionen

$$f_1(t) := t\exp(t^2), \quad f_2(x) := x^2\cos(3x^3), \quad f_3(u) := \frac{u^3}{\sqrt{u^4+2}},$$

$$f_4(x) := \frac{1}{x\ln(x)} \text{ (wobei } x > 1), \quad f_5(x) := \sqrt{1+x^2}, \quad f_6(x) := \frac{1}{\sin(x)}.$$

Überprüfen Sie Ihre Resultate durch Ableiten Ihrer Stammfunktion.

Aufgabe 55 (Konvexe Funktionen)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$ gelte:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

a) Zeigen Sie, dass für $x_1, x_2, x \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x < x_2$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Interpretieren Sie diesen Zusammenhang geometrisch.

b) Folgern Sie daraus, dass für $x_1, x_2, x \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x < x_2$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Interpretieren Sie auch dies geometrisch.

c) Zeigen Sie, dass für $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ gilt:

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

d) Folgern Sie aus Aufgabenteil b), dass f stetig ist, also insbesondere, dass f auf $[a, b]$ integrierbar ist.

e) Schließen sie mit Hilfe der vorherigen Teilaufgaben, dass $f\left(\frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx.$

Aufgabe 56 (Gleichmäßige Konvergenz)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}, \quad g_n : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{1 + nx}.$$

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktionenfolge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [a, b]$ gelte $|f_n(x)| \geq c > 0$. Zeigen Sie, dass dann $g_n(x) := \frac{1}{f_n(x)}$ im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ konvergiert.