Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.11 Abgabe vor der Vorlesung am 13.01.2014

Aufgabe 49 (gleichmäßige Stetigkeit)

Bei dieser Aufgabe geht es darum, Beispiele von gleichmäßig stetigen Funktionen kennen zu lernen.

a) Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

b) Sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Quadrierungsabbildung $x \mapsto x^2$. Zeigen Sie, dass g nicht gleichmäßig stetig ist.

c) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Seien $f : [a, b] \to [c, d]$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Verknüpfung $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

d) * Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass f höchstens wie eine lineare Funktion wächst. Zeigen Sie also, dass eine Konstante C existiert mit

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|).$$

Aufgabe 50 (Differentiation und Grenzwerte)

a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x^x$,
- $f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \sqrt{\exp(\sin(\sqrt{x}))}$,
- $f_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \sinh(x)\cosh(x)$,
- $f_4 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \tanh(\frac{x}{1+x^2})$,
- $f_5 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f_5(x) = \frac{\tan(x)}{x^4+1}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{n}}}, \quad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}} \ln(x), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)}.$$

Aufgabe 51 (Integration)

Sei $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$D(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sei ferner $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass D auf $[0,1]$ nicht integrierbar ist.

b) Begründen Sie, dass f auf $[-1,1]$ integrierbar ist.

c) Berechnen Sie $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, zunächst ohne den Hauptsatz zu verwenden, d.h. betrachten Sie eine geeignete Zerlegung und berechnen Sie damit das Integral. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des Hauptsatzes.

Aufgabe 52 (Integration)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Sei $f \in T[a,b]$ und $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

b) Folgern Sie mit Hilfe der Monotonie des Integrals und durch Einschachtelung von f durch Treppenfunktionen, dass die Identität

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

auch für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt.

c) Berechnen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2-2x+2}$.