Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.10 — Abgabe vor der Vorlesung am 06.01.2014

Dieses Aufgabenblatt dient der Wiederholung des Vorlesungsstoffs. Alle Aufgaben werden mit jeweils 5 Punkten bewertet. Diese Punkte werden als Zusatzpunkte gewertet.

Aufgabe 37 (Operationen auf $\mathbb{R}$)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ und sei $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(x, y) \mapsto x * y = x + y + \frac{xy}{\lambda}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für $*$ das Kommutativ- und das Assoziativgesetz gelten.

b) Bestimmen Sie das 1-Element bezüglich $*$.

c) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, die Gleichung

$$x_1 * \dots * x_n = \lambda^{1-n}(x_1 + \lambda)(x_2 + \lambda) \cdot \dots \cdot (x_n + \lambda) - \lambda.$$

Aufgabe 38 (Komplexe Zahlen)

Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)^2, \quad \frac{5 + 2i}{1 + 2i}, \quad \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^{-1}.$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion alle komplexwertigen Lösungen zu

$$X^7 - 3 = 0.$$

Beschreiben Sie diese geometrisch.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^3 = -8$.

d) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$.

e) Ist $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper? Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 39 (Induktion)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\prod\limits_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = \frac{n^n}{n!}$,

b) Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Produktregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Aufgabe 40 (Suprema/Infima)

Seien

$$M_1 := \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \,\Big|\, x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad M_2 := \left\{ \frac{x}{1+x} \,\Big|\, x > -1 \right\},$$
$$M_3 := \left\{ x + \frac{1}{x} \,\Big|\, \frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}, \; M_4 := \left\{ x \,|\, (x+1)^2 + 5y^2 < 4 \text{ und } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

a) Skizzieren Sie der Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 und bestimmen Sie ihre Suprema und Infima.

b) Handelt es sich auch um Maxima und Minima?

Aufgabe 41 (Exponentialfunktion)

Seien $a, b, x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $\exp(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}) \leq \frac{\exp(a)+\exp(b)}{2}$.

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n-4}\right)^n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Aufgabe 42 (Grenzwerte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+2n+4}}{n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^3-n^2+1}-\sqrt{2n^3}$,

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$,

f) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)$.

Aufgabe 43 (Stetigkeit)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion zu f.

e) Ist f differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 44 (Stetigkeit II)

Sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(xy)=f(x)+f(y)$ für alle $x,y>0$.

a) Zeigen Sie, dass $f(1)=0$.

b) Zeigen Sie, dass $f(x^n)=nf(x)$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Sei $0<a\neq 1$, so dass $f(a)=1$. Zeigen Sie, dass $f(a^x)=x$ für alle $x\in\mathbb{Q}$.

d) Sei f zusätzlich stetig in $x=1$. Zeigen Sie, dass dann f im gesamten Intervall $(0,\infty)$ stetig ist.

Aufgabe 45 (Differenzierbarkeit)

Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b>0$.

a) Berechnen Sie die Ableitung von $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{e^{-ax^2}}{1+bx^2}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle besitzt.

c) Beweisen Sie, dass dies die einzige Nullstelle im angegebenen Intervall ist.

Aufgabe 46 (Vermischtes)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Beweisen bzw. widerlegen Sie die Behauptungen:

a) Die Menge $M = \{(x_1, ..., x_n) |\ n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{N}\}$ aus allen endlichen Tupeln natürlicher Zahlen ist abzählbar.

b) Die Menge $M = \{(x_1, ..., x_n, ...) |\ x_k \in \mathbb{N}\}$ aller Folgen natürlicher Zahlen ist abzählbar.

c) Sei $\cos(z) := \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$. Dann ist die Menge $\{\cos(z) |\ z \in \mathbb{C}\}$ beschränkt.

d) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(x + iy)| = \exp(x)$.

e) $\left|\frac{3+4i}{1-i}\right| = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 47 (Folgen)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Beweisen bzw. widerlegen Sie die Behauptungen:

a) Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt.

b) Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $b_n = a_{n+1} - a_n$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist es auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $b_n = a_{n+1} - a_n + 2a_{n+2}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist es auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) Mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $b_n = |a_n|$.

Aufgabe 48 (Sätze)

Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass, den Mittelwertsatz und den Zwischenwertsatz. Beweisen Sie den Zwischenwertsatz.

Wir wünschen Ihnen schöne, erholsame Weihnachtsfeiertage und ein gutes, erfolgreiches neues Jahr 2014!