Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.9 — Abgabe vor der Vorlesung am 16.12.2013

Aufgabe 33 (Differenzierbarkeit I)

In dieser Aufgabe geht es um eine Modifikation des Differenzenquotienten.

a) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$ existiert.

b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $2f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$.

c) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass aus der Existenz des Limes in Aufgabenteil a) nicht die Differenzierbarkeit von f in x folgt.

Aufgabe 34 (Differenzierbarkeit II)

Seien $f_1, f_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad \text{und } f_2(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f_1 in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass f_2 in $x = 0$ differenzierbar ist.

c) Bestimmen Sie $f_2'(x)$ für $x \in (-1,1)$.

d) Sei $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 h(x)$, wobei $h : [-1,1]$ eine beschränkte Funktion ist. Beweisen Sie, dass $g(x)$ in $x = 0$ differenzierbar ist und, dass $g'(0) = 0$.

Aufgabe 35 (Polynome)

Sei $p(X) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ ein Polynom.

a) Zeigen Sie, dass $a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$, wobei wir mit $p^{(k)}(x_0)$ die $k-te$ Ableitung von p im Punkt x_0 bezeichnen. In anderen Worten: Beweisen Sie also die Identität $p(X) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}X + \frac{p''(0)}{2!}X^2 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}X^n$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $h \in \mathbb{R}$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$

$$p(x_0 + h) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}h + \frac{p''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

Bemerkung: Ein Polynom n-ten Grades ist also eindeutig durch die $n+1$ Werte $p^{(k)}(x_0)$, $k \in \{0, ..., n\}$ bestimmt.

Aufgabe 36 (Grenzwerte)

Bei dieser Aufgabe geht es um die Bestimmung von Grenzwerten.

a) Bestimmen Sie die Ableitung von

- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = \mathrm{Re}((x - i)^n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \cos(\frac{1}{n}))$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} ((n^2 + a^2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{2}{3}})$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{4}{3}}((n^2 + a^2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{2}{3}})$.

Tipp: Es könnte bei Aufgabenteil a) hilfreich sein, zunächst den Differenzenquotienten von $(x - i)^n$ zu betrachten und erst danach den Realteil zu bilden.

Hinweis: Begründen Sie bei allen Aufgaben alle Ihre Behauptungen sorgfältig!