Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.8 — Abgabe vor der Vorlesung am 09.12.2013

Aufgabe 29 (monotone Funktionen und Stetigkeit)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

a) Zeigen Sie, dass der rechtsseitige Limes von f für x gegen a, $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$, und der linksseitige Limes von f für x gegen b, $\lim\limits_{x \uparrow b} f(x)$, existieren.

b) Folgern Sie, dass die links- und rechtsseitigen Limiten von f für alle Punkte $x \in [a, b]$ existieren.

c) Zeigen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

d) Geben Sie eine monotone Funktion mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen an.

Aufgabe 30 (Stetigkeit I)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen stetig sind:

a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Dabei ist $\lfloor x \rfloor := n,$ falls $n \leq x < (n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$.

c) $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Skizzieren Sie die angegebenen Funktionen.

Aufgabe 31 (Polynome)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome und spalten Sie die zugehörigen Linearfaktoren, d.h. Terme der Form $(X - a_j)$ mit $a_j \in \mathbb{C}$, ab:

$$X^3 - 3X^2 + X - 3, \quad X^4 + X^2 - 2.$$

b) Bestimmen Sie die (komplexwertige) Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2X+3}{(X-1)(X+1)}, \quad \frac{8X^3-16X+10}{X^3-4X^2+5X}.$$

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $X \to \pm\infty$ für die Funktionen aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 32 (Stetigkeit II)

a) Skizzieren Sie die nachfolgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},$$

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}, \quad f_3(x) = \frac{\exp(x)-1}{x}, \quad f_4(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

b) Existieren die folgenden Grenzwerte?

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Berechnen Sie sie gegebenenfalls.

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Eine stetige Funktion ist also schon durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ bestimmt.

Hinweis: Begründen Sie bei allen Aufgaben alle Ihre Behauptungen sorgfältig!