**Mathematisches Institut**
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

# Analysis I

Übungsblatt Nr.6 Abgabe vor der Vorlesung am 25.11.2013

## Aufgabe 21 (Liminf, Limsup)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$,

c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass auch echte Ungleichungen in (a) und (b) auftreten können.

## Aufgabe 22 (Wurzeln)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := a^{\frac{1}{n}}$ konvergent ist und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

b) Sei $0 < b \leq a$. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Ein Punkt $x \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* einer komplexwertigen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge gibt, die gegen $x$ konvergiert. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der (komplexwertigen) Folge

$$a_n := \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Tipp zu a): Nutzen Sie z.B. die Aussage von Aufgabe 13 b) falls $a > 1$ und eine vergleichbare Aussage für $0 < a < 1$.

## Aufgabe 23 (Quotienten)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}/a_n| \leq q$, wobei $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass $a_n$ gegen Null konvergiert.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = L$. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n := a_n^{\frac{1}{n}}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

*c) Folgern Sie aus b), dass $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

**Aufgabe 24 (Maxima)**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $a$ und $b$. Zeigen Sie, dass $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}.$$

Tipp: Verwenden Sie entweder eine Fallunterscheidung oder die explizite Darstellung des Maximums von Aufgabe A7, Anwesenheitsblatt 2.

**Hinweis:** Begründen Sie bei allen Aufgaben alle Ihre Behauptungen sorgfältig!

*Information von der Fachschaft Mathematik:* Die Fachschaft Mathematik feiert am 28.11. ihre Matheparty im Carpe Noctem. Der VVK findet am Mo. 25.11., Di. 26.11. und Mi. 27.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf unserer Internetseite.