Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.3 — Abgabe vor der Vorlesung am 04.11.2013

Aufgabe 9 (Suprema, Infima, Maxima, Minima)

Bestimmen Sie das Supremum und Infimum der folgenden Mengen. Handelt es sich auch um Maxima und Minima?

a) $M_1 = \{(-1)^n \frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$,

b) $M_2 = \{\frac{\sqrt{n}}{n+1} |\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$,

c) $M_3 = \{x^2 - 3x + 2 |\ x \in \mathbb{Q}\} \cap \{y \in \mathbb{R} |\ y < 0\}$,

d) $M_4 = \{|x-1| + |x+1| |\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{y \in \mathbb{R} |\ y < 4\}$.

Skizzieren Sie die jeweiligen Mengen.

Aufgabe 10 (Rechenregeln für Suprema und Infima)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Wir definieren ihre Summe, Differenz und Produkt mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als

$$A + B = \{a + b |\ a \in A,\ b \in B\},\ A - B = \{a - b |\ a \in A,\ b \in B\},\ \lambda A = \{\lambda a |\ a \in A\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$,

b) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$, $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$,

c) Finden Sie Formeln für $\sup(\lambda A)$ in Abhängigkeit von λ.

Aufgabe 11 (Heron Algorithmus)

Der Heron Algorithmus ist ein Verfahren, das zur Berechnung von Quadratwurzeln benutzt werden kann. Möchte man die Wurzel aus $a \in \mathbb{R}_+$ berechnen, so kann man iterativ vorgehen. Sei $x_0 \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wir setzen dann

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass das beschriebene Verfahren gegen eine eindeutige Zahl konvergiert und dass diese die Quadratwurzel von a ist, d.h. konstruieren Sie mit Hilfe der angegebenen Iteration eine Intervallschachtelung, sodass der entstehende Schnitt genau $\sqrt{a}$ enthält. Führen Sie das Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$ durch, wählen Sie als Startwert $x_0 = 1$ und bestimmen Sie x_5. Was passiert, wenn Sie einen negativen Anfangswert wählen?
Tipp: Betrachten Sie zunächst $x_0 > \sqrt{a}$ und zeigen Sie, dass $\sqrt{a} \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Aufgabe 12 (Fibonacci Zahlen)

Es sei $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Wir definieren

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \mu = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Zeigen Sie, dass für $n > 1$ die folgenden Identitäten gelten:

a) $F_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$,

b) $F_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$,

c) $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$,

d) $\sum\limits_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Ausdrücke der definierenden Rekursionsformel für die Fibonacci Zahlen genügen.
Bem: Fibonacci hat diese Folge betrachtet, um das Wachstum einer Kaninchenpopulation zu beschreiben.