Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

Analysis I

Übungsblatt Nr.2 — Abgabe vor der Vorlesung am 28.10.2013

Aufgabe 5 (Mächtigkeiten)

a) Sei $M = \{1, 2, 7, 9\}$. Bestimmen Sie die Potenzmenge und die Anzahl ihrer Elemente.

b) Sei nun M eine beliebige n-elementige Menge mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Potenzmenge in Abhängigkeit von n. Finden Sie sowohl einen direkten als auch einen induktiven Beweis?

c) Geben Sie eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $p\mathbb{Z}$ an, wobei $p\mathbb{Z} := \{pz |\ z \in \mathbb{Z}\}$ für $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$.

Aufgabe 6 (Ungleichungen)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen

a) $2^n > n^2$,

b) $3^{2^n} < 2^{3^n}$,

c) $\prod\limits_{j=1}^{n} j^j < n^{\frac{n(n+1)}{2}}$?

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 7 (Binomialkoeffizienten)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Formeln:

a) $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$. Was hat diese Gleichung mit der Anzahl der Elemente der Potenzmenge zu tun?

b) $\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

c) Das Pascalsche Dreieck

$n=0$:					1				
$n=1$:				1		1			
$n=2$:			1		2		1		
$n=3$:		1		3		3		1	
$n=4$:	1		4		6		4		1

ist induktiv definiert: Der k-te Eintrag in der $(n+1)$-ten Zeile ergibt sich als Summe aus dem $(k-1)$-ten und k-ten Eintrag der n-ten Zeile, falls $k \neq 1, n+1$ ist. Für $k=1$ oder $k=n+1$ wird er als 1 festgesetzt. Zeigen Sie dass, der k-te Eintrag in der n-ten Zeile gleich $\binom{n}{k}$ ist, d.h. für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

d) Finden Sie mindestens zwei weitere interessante Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks (probieren, Bücher, Internet)!

Aufgabe 8 (Ungleichungen)

Sei $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n$.

b) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

c) Zeigen Sie: $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ für $k \in \{2, ..., n\}$.

d) Zeigen Sie: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. Hinweis: Binomische Formel.

e) Folgern Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Damit haben wir eine Approximation für $n!$ erhalten.