A7. $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}\times(0,1)})$ erfülle

$$\begin{cases} \text{(i)} & \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \quad \mathbb{R}\times(0,1) \\ \text{(ii)} & u(t,0) = u(t,1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{(iii)} & u(0,x) = 3\sin(\pi x) \cancel{+} -4\sin(5\pi x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

<u>Lösung</u> $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ ~~Fu~~ Ansatzfunktionen. Wegen (ii) sollten die räumlichen Ansatzfunktionen von der Form sein: $\phi_k(x) := \sin(k\pi x)$. Andererseits sollten die zeitlichen Ansatzfunktionen $\varphi_k(t)$ die Gleichung $\partial_t(\phi_k \varphi_k) \overset{!}{\underset{(i)}{=}} \partial_{xx}(\phi_k \varphi_k)$ erfüllen, d.h. $\phi_k \partial_t \varphi_k = \varphi_k \partial_{xx} \phi_k$, d.h. $\sin(k\pi x)\,\partial_t \varphi_k(t) = \varphi_k(t)(-(k\pi)^2)\sin(k\pi x)$. Also sollte gelten: $\partial_t \varphi_k(t) = -k^2\pi^2 \varphi_k(t)$. Damit: $\varphi_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}$; also ist ein Ansatz: $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$. Nun soll (iii) gelten, womit $u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)$ ergibt, dass $c_k = 0 \iff k \notin \{1,5\}$, und $c_1 = 3$, $c_5 = -4$. Also ~~lö~~ ergibt sich als Kandidat für u:

$$u(t,x) = 3e^{\cancel{1}-\pi^2 t}\sin(\pi x) \cancel{+} -4e^{-\pi^2 t \cdot 25}\sin(5\pi x).$$

Man bestätigt sodann durch explizite Rechnung, dass es sich hierbei um eine Lösung der obigen Gleichung handelt. $\square$

A8. $k > 0$, $g : \mathbb{R}^3_{\setminus 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$g(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{\cos(k|x|)}{|x|}.$$

g ist Fundamentallösung von $(\Delta + k^2 \mathrm{id})$. Wir benutzen zuerst (Rechnung unten): $(\Delta + k^2)g = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ für jedes $\varepsilon > 0$. Damit ist zu zeigen, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt:

$$\langle (\Delta + k^2)g, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Dies bedeutet in $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^3)$:

$\langle g, (\Delta + k^2)\varphi \rangle = \varphi(0)$. Dies bedeutet

$$\int_{\mathbb{R}^3} g\,(\Delta + k^2)\varphi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} g\,(\Delta + k^2)\varphi}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} g\,(\Delta + k^2)\varphi}_{II_\varepsilon} = \cancel{\varphi 0} = \varphi(0).$$

Nun: Ad II_ε: Via Polarkoordinaten:

$$|II_\varepsilon| \leq C \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{\cos(|kx|)}{|x|} \|(\Delta + k^2)\varphi\|_{L^\infty}\, dx$$

$$\leq C\, \|(\Delta + k^2)\varphi\|_{L^\infty} \int_0^\varepsilon \frac{r^2}{r} \cos(|k|r)\, dr \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0.$$

Ad ~~III~~ I_ε. Wir integrieren partiell & nützen aus, dass $(\Delta + k^2) g = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)$ gilt. ~~Damit~~ Nach den Greenschen Identitäten gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} g\,(\Delta\varphi) - \varphi \underbrace{\Delta g}_{(= \cancel{0} - k^2)} = \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0))} g \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^{d-1},$$

und das Randintegral $\int_{\partial \mathbb{R}^3} (\ldots)$ verschwindet, da der Integrand gegen Null strebt mit $|x| \to \infty$. Also: $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} g(\Delta + k^2)\varphi =$

$$= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} g\,\Delta\varphi + k^2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} g\varphi = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \varphi\,\Delta g + k^2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \varphi g$$

$$\overset{+}{=} \int_{\cancel{\partial\mathbb{R}}\,\partial B_\varepsilon(0)} g \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} =: III_\varepsilon.$$

Minus, da die äußere Einheitsnormale hier durch $-\nu_{\partial B_\varepsilon(0)}$ gegeben ist (wir kommen von außen!) Aber für III_ε ist:

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} g \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^2 \right| \leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} C \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\cos(|kx|)}{|x|} \leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \cdot C \cdot \varepsilon^2 \frac{\cos(k\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= C \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\, \varepsilon \cos(k\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Also: $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu} = ?$ Wir berechnen:

$$\nabla g = -\frac{1}{4\pi} \frac{k x \sin(k|x|) - \cos(k|x|)\frac{x}{|x|}}{}$$

da $\partial_{x_i} g(x) = \partial_{x_i}\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\cos(k|x|)}{|x|}\right)$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{|x| k \frac{x_i}{|x|}\sin(k|x|) - \cos(k|x|)\frac{x_i}{|x|}}{|x|^2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{k x_i \sin(k|x|) - \cos(k|x|)\frac{x_i}{|x|}}{|x|^2}.$$

$\Rightarrow$ mit $\nu = \frac{x}{|x|}$ erhalten wir

$$\langle \nabla g, \nu\rangle = -\frac{1}{4\pi}\frac{k|x|\sin(k|x|) - \cos(k|x|)}{|x|^2}, \text{ Damit:}$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{(k|x|\sin(k|x|) - \cos(k|x|))}{|x|^2}\varphi(x)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{k|x|\sin(k|x|)}{|x|^2}\varphi(x) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\cos(k|x|)}{|x|^2}\varphi(x)$$

$= \mathrm{IV}_\varepsilon + \mathrm{V}_\varepsilon$. Nun: $|\mathrm{IV}_\varepsilon| \le \left| C k^2 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon}\varphi(x)\, dx\right|$

$\le C k^2 \underbrace{\frac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon}}_{\to 1,\ \varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \|\varphi\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$. Andrerseits: $\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\cos(k|x|)}{|x|^2}\varphi(x)\, d\mathcal{H}^2(x)$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \cos(k\varepsilon)\varphi(x)\, d\mathcal{H}^2 = \underbrace{\cos(k\varepsilon)}_{\to 1,\ \varepsilon\downarrow 0} \fint_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x)\, d\mathcal{H}^2(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \varphi(0).$$

verbleibt, $(\Delta + k^2) g = 0$ zu zeigen auf $\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)$.

Fine Properties of Weakly Differentiable Functions

Hiezu: Die partiellen Ableitungen haben wir bereits ausgerechnet. Weiters:

$$\partial_{x_i x_i} g(x) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{|x|^2\left(k \sin(k|x|) + k^2 \frac{x_i^2}{|x|}\cos(k|x|) + k\sin(k|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} - \cos(k|x|)\frac{|x| - \frac{x_i^2}{|x|}}{|x|^2}\right)}{|x|^4} \right.$$

$$\left. - \frac{\left(k x_i \sin(k|x|) - \cos(k|x|)\frac{x_i}{|x|}\right)\cdot 2x_i}{|x|^4}\right.$$

$$\overset{\Sigma!}{\Longrightarrow} \quad \Delta g = -k^2 g.$$

A9 Wir benötigen: $\mathcal{F}(\Delta^2 \Phi) = |\xi|^4 \mathcal{F}(\Phi)$. (Schon am Freitag, allerdings ist dies wie in A8.

A10 Am Donnerstag online / siehe unten.

A10 (a) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Sei $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und setze $u_R := \rho_R u$, wobei $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ ist derart, dass

$$\rho_R(x) = \begin{cases}1, & |x|\le R\\ 0, & |x|\ge 2R\end{cases} \quad \& \quad |\nabla^\alpha \rho_R| \le \frac{2}{R^{|\alpha|}} \ \forall \alpha\in\mathbb{N}_0^d.$$

Eine solche Funktion kann aus ρ_1 durch Reskalierung gewonnen werden. Dann ist $u_R\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (klar). Weiters gibt es eine Konst. $\cancel{C_{k+m,|\alpha|}>0}$ $C=C(k+m,\delta)>0$ ($k,m\in\mathbb{N}_0$, $\delta\in\mathbb{N}_0^d$) mit

(*) $$\sup_x \langle x\rangle^{k+m}|\partial^\delta u(x)|\le C \Rightarrow \forall x: \langle x\rangle^k|\partial^\delta u(x)|\le \frac{C}{\langle x\rangle^m}.$$

Damit, für $k\in\mathbb{N}$ & $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$: $\forall x\in\mathbb{R}^d$:

$$|\langle x\rangle^k \partial^\alpha (u_R-u)(x)| \le \langle x\rangle^k \sum_{\beta+\delta=\alpha} c_{\beta,\delta}\,|\partial^\beta(1-\rho_R)|\cdot|\partial^\delta u(x)|$$

$$\le \mathbb{1}_{\{|x|\ge R\}}\langle x\rangle^k\Big(\sum_{\substack{\beta+\delta=\alpha\\|\beta|\ge1}} \tilde c_{\beta,\delta}\,\frac{1}{R^{|\beta|}}\,|\partial^\delta u(x)| + \tilde C\,|\nabla^{|\alpha|}u(x)|\Big)$$

$$\le C\,\mathbb{1}_{\{|x|\ge R\}}\Big(\sum_{\substack{\beta+\delta=\alpha\\|\beta|\ge1}} \frac{1}{R^{|\beta|}} + \underbrace{|\nabla^{|\alpha|}u(x)|}_{\le \frac{C}{\langle x\rangle}}\Big)$$

$$\le C\,\mathbb{1}_{\{|x|\ge R\}}\Big(\frac{1}{R}+\frac{1}{\langle R\rangle}\Big)\le C\,\frac{1}{R}.$$ Nun gehe zum Supremum (über $\{x\}$) über, womit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\langle x\rangle^k\partial^\alpha(u_R-u)(x)|\le \frac{C}{R}\xrightarrow{R\to\infty}0.$$ Damit ist

(a) gezeigt. Ad (b). Sei $T\in\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ & notiere $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ einen ε-reskalierten Standardglätter. Damit folgt nach VL: $T*\eta_\varepsilon\in C^\infty_{poly}$, und $T*\eta_\varepsilon\to T$ in $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. (*) Nun sei ρ_R wie oben in (a). Betrachte

(A11) Sei $\eta \in C_c^\infty(B_1(0);[0,1])$ ein Glättungskern ($\eta \geq 0$, $\eta = \tilde{\eta}(|\cdot|^2)$, $\|\eta\|_{L^1} = 1$) & betrachte $T * \eta_\varepsilon(x) := \langle T, \eta_\varepsilon(x - \cdot)\rangle$.

Behauptung: $T * \eta_\varepsilon(x)$ hängt nicht von ε ab (das ist eine Variante der MWE für harmonische Distributionen). Hierzu:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\eta_\varepsilon(x-y) &= \frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^d}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\\ &= -d\,\varepsilon^{-d-1}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{-d}\nabla\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{x-y}{\varepsilon^2}\\ &= \frac{-1}{\varepsilon^{d+1}}\left(d\,\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \nabla\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{x-y}{\varepsilon}\right).\end{aligned}\right\} \circledast$$

Setze dann $\Phi(x) := -d\,\eta(x) - \nabla\eta(x)\cdot x$, womit via $\circledast$:

$\frac{d}{d\varepsilon}\eta_\varepsilon(x-y) = +\frac{1}{\varepsilon^{d+1}}\Phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$ gilt. Nun ist η radial, $\eta = \tilde{\eta}(|\cdot|^2)$. Damit $\Phi(x) = -\operatorname{div}(\eta(x)x)$ $(= -\eta(x)\cdot d - \langle\nabla\eta(x), x\rangle = -\operatorname{div}(\tilde{\eta}(|x|^2)x)$. Setze nun

$\vartheta(t) := \frac{1}{2}\int_t^\infty \tilde{\eta}(s)\,ds$. Damit $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$, und da $\eta(x) = 0$ für $|x| \geq 1$, $\vartheta(t) = 0$, $t \geq 1$, und letztlich $\vartheta'(t) = -\frac{1}{2}\tilde{\eta}(t)$. Hiermit:

$-\tilde{\eta}(|x|^2)x = \nabla(\vartheta(|x|^2))$, und damit folgt:

$\Phi(x) = -\operatorname{div}(\eta(x)x) = -\operatorname{div}(\tilde{\eta}(|x|^2)x) = \Delta\vartheta(|x|^2)$. Die

Funktion $\vartheta(|\cdot|^2)$ gehört zu $C_c^\infty(B_1(0))$, und weiters nach Vor.:

$\langle T, \Delta_y \left(\frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \vartheta\left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2\right)\right\rangle = 0$. Nach Vorlesung ist

$\frac{d}{d\varepsilon} \langle T, \eta_\varepsilon(x-\cdot)\rangle = \langle T, \frac{d}{d\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-\cdot)\rangle$, und nach der obigen

Rechnung ist dies gerade null. Damit $\langle T, \eta_\varepsilon(x-\cdot)\rangle =$

$\langle T, \eta_1(x-\cdot)\rangle$ – dies ist also unabh. von ε. Damit: Für

alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \eta_\varepsilon(x-\cdot)\rangle \varphi(x)\, dx = \langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(x)\, dx \rangle$$

$= \langle T, \eta_\varepsilon * \varphi\rangle \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \langle T, \varphi\rangle$, aber andererseits

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \eta_\varepsilon(x-\cdot)\rangle \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \eta_1(x-\cdot)\rangle \varphi(x)\, dx.$$

Also $T = T_{T * \eta_1}$, und damit ist die Beh. gezeigt. $\boxed{\text{E}}$

(A12) $d \geq 2$, $\begin{cases} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_d} + u = 0, & x_d > 0 \\ u(x',0) = f(x'), & x' = (x_1, \dots, x_{d-1}). \end{cases}$

($\oint$) { Gemeint war hier $u(\cdot, x_d) \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ für alle x_d (schlechte Notation).

Sei $\xi = (\xi', \xi_d)$. Fouriertransformiere in den ersten $(d-1)$-Variablen:

$$-|\xi'|^2 \hat{u}(\xi', x_d) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_d^2}(\xi', x_d) + \frac{\partial}{\partial x_d}\hat{u}(\xi', x_d) + \hat{u}(\xi', x_n) = 0.$$

Damit wird die PDE zu:

$$\begin{cases} \partial^2_{x_d x_d} \hat{u} + \hat{u}_{x_d} + (1 - |\xi'|^2)\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi', 0) = \hat{f}(\xi'). \end{cases}$$

Nun setze an: $\hat{u} := c e^{s x_d}$. Damit wird diese ODE zu

$s^2 + s + (1 - |\xi'|^2) = 0$, also nach Lösungsformel für quad. Gleich.:

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - |\xi'|^2)}}{2}$$

Nun wählen wir die negative Wurzel und finden:

$$\begin{cases} \hat{u}(\xi', x_d) = c(\xi')\, e^{\frac{-1 - \sqrt{1 - 4(1 - |\xi'|^2)}}{2} x_d} \\ \hat{u}(\xi', 0) = c = \hat{f}(\xi'), \end{cases}$$

also $\hat{u}(\xi', x_d) = \hat{f}(\xi')\, e^{\frac{-1 - \sqrt{1 - 4(1 - |\xi'|^2)}}{2}}$. Damit

nach Parseval: $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{u}(\xi', x_d)|^2 \, d\xi'$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{f}(\xi')|^2 \, d\xi' = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Damit folgt ($\oint$).