Zusammenfassung der Vorlesung

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Herbert Koch
Universität Bonn
Sommersemester 2019

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Wie in der Vorlesung besprochen, werden folgende Bücher empfohlen:

- L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS Graduate Studies in Mathematics 19
- F. John, Partial Differential Equations, Springer
- J. Jost, Partielle Differentialgleichungen, Springer

Dieses Skript basiert auf den Skripten von Prof. Müller (SS 2009), Prof. Szekelyhidi (SS 2010), Prof. Niethammer (2014) und Prof. Conti (2015) und einer Vorlesung im SS 2019 und ist teils wörtlich übernommen.

Tippfehler und Korrekturen bitte an `koch@math.uni-bonn.de` oder in der Sprechstunde.

Diese Zusammenfassung ist nur für Hörer der Vorlesung V2B2 EPDE an der Universität Bonn, Sommersemester 2019, bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

1.1 Partielle Differentialgleichungen 4

1.2 Ein wichtiges Beispiel: die Wärmeleitungsgleichung 6

2 Harmonische Funktionen und die Poisson Gleichung **7**

2.1 Einführung 7

2.2 Maß, Integration und der Satz von Gauß 8

2.3 Eigenschaften harmonischer Funktionen 11

2.3.1 Definition 11

2.3.2 Mittelwerteigenschaft 11

2.3.3 Regularität 13

2.3.4 Maximumprinzip 15

2.4 Explizite Lösung der Poissongleichung 19

2.4.1 Fundamentallösung, Laplacegleichung im Ganzraum . 19

2.4.2 Greensche Funktion 23

2.4.3 Spezialgebiete 27

2.5 Existenz von Lösungen 35

2.6 Harmonische Polynome und Kugelflächenfunktionen 42

2.6.1 Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten 42

2.6.2 Harmonische Polynome 44

2.6.3 Orthonormalbasen in H_m^d 47

2.6.4 Der Fall $d = 2$ 47

2.6.5 Der Fall $d = 3$ und $m \geq 1$. 48

2.7 Holomorphe Funktionen und komplexe Differentialgleichungen 52

2.7.1 Wege und Zusammenhang 52

2.7.2 Holomorphe Funktionen 55

2.7.3 Holomorphe Differentialgleichungen 58

3 Die Fouriertransformation **62**

3.1 Die Fouriertransformation in $L^1(\mathbb{R}^d)$ 62

3.2 Schwartzfunktionen 66

3.3 Temperierte Distributionen 69

3.4 Beispiele und Anwendungen 73

3.4.1 Ein triviales lehrreiches Beispiel 73

3.4.2 Die Wärmeleitungsgleichung 74

3.4.3 Die Schrödingergleichung 75

3.4.4 Homogene radiale Distributionen 76

3.4.5 Der Poissonkern 79

3.4.6 Die Poissonsche Summenformel 79

3.4.7 Anwendung: Die θ Funktion 81

4 Die Wärmeleitungsgleichung **81**
4.1 Fundamentallösung, homogene Gleichung im Ganzraum . . . 82
4.2 Maximumprinzip 90
4.3 Regularität, Mittelwertformel 93
4.4 Hermitefunktionen und der Hermiteoperator 98
4.5 Eindeutigkeitsaussagen 100

2.04.2019

1 Einleitung

1.1 Partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen (abgekürzt 'PDG' oder nach dem englischen 'partial differential equations' als 'PDE' bezeichnet) sind Gleichungen, die eine Funktion mehrerer Variablen, sowie deren partielle Ableitungen enthalten. Die Ordnung der Differentialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Gleichung auftaucht.

Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige glatte (d.h. für uns, dass alle Ableitungen, die wir benötigen, existieren und stetig sind) Funktion auf Ω. Wir benutzen die folgenden Notationen für partielle Ableitungen. Die i-te partielle Ableitung von u ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.1}$$

und wird auch mit

$$\partial_{x_i} u, \qquad \partial_i u, \qquad D_i u, \qquad u_{x_i} \qquad u_i$$

abgekürzt. Ebenso schreiben wir partielle Ableitungen zweiter Ordnung als

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u, \quad \partial^2_{x_i x_j} u, \quad \partial^2_{ij} u, \quad u_{x_i x_j}, \qquad u_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.2}$$

Allgemein definiert man für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, mit Ordnung $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$

$$D^\alpha u(x) = \partial^\alpha u(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u \tag{1.3}$$

Für spätere Zwecke führen wir hier noch die Notation $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$, sowie $x^\alpha = \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$ ein. Mit

$$D^k u(x) = D^\alpha u(x); |\alpha| = k \tag{1.4}$$

bezeichnen wir die Menge aller partiellen Ableitungen der Ordnung k. Wichtige Spezialfälle sind die (totale) erste Ableitung

$$Du = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_1} u),$$

und der Gradient,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

sowie die Hesse matrix

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} u & \dots & \partial^2_{x_n x_1} u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_1 x_n} u & \dots & \partial^2_{x_n x_n} u \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Der Satz von Schwarz impliziert dass die Hessematrix symmetrisch ist falls u zweimal stetig differenzierbar ist.

Eine partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung läßt sich nun schreiben als

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0. \tag{1.7}$$

Als wichtigste Beispiele werden wir im nächsten Abschnitt die Wärmeleitungsgleichung, sowie die Poisson-Gleichung, etwas ausführlicher motivieren. Weitere bekannte Beispiele sind

(i) Die Helmholtz-Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$-\Delta u + \mu u = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}_+,$$

wobei

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i x_i} u. \tag{1.8}$$

(ii) Die Minimalflächengleichung $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$-\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

wobei $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^d \partial_i v_i$.

(iii) Die Wellengleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u_{tt} - \Delta u = f.$$

(iv) Die (viskose) Burgers-Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\nu \geq 0$

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}, \qquad \text{wobei } \nu \geq 0.$$

(v) Die Korteweg-de-Vries Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0.$$

(vi) Die stationäre Schrödingergleichung in $\mathbb{R}^d$. Gegeben $V \in C(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$-\Delta u + V u = \lambda u$$

1.2 Ein wichtiges Beispiel: die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung ist die einfachste Gleichung, welche die Ausbreitung von Stoffen durch Diffusion beschreibt. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Sei $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ die Massendichte eines Stoffes (d.h. $u(t,x)$ ist die Dichte im Raumpunkt $x \in \Omega$ zur Zeit t). Sei

$$j : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3 \tag{1.9}$$

die Flußdichte des Stoffes, d.h. der Gesamtfluß des Stoffes durch eine Hyperfläche A mit Normale ν ist durch $\int_A j \cdot \nu dS$ gegeben. Sei schließlich $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ die Produktionsrate des Stoffes. Dann gilt für jedem Ball $B_r(x) \subset \Omega$ und jedes t

$$\frac{d}{dt} \int_{B_r(x)} u dy = - \int_{\partial B_r(x)} j \cdot \nu dS + \int_{B_r(x)} f dy \tag{1.10}$$

wobei das linke Integral die Gesamtmasse in $B_r(x)$, das linke Integral auf der rechten Seite den Massenabfluß und das zweite Integral die Massenproduktion in $B_r(x)$ beschreibt. Mit dem Satz von Gauss (und der Vertauschung von Integration und Differentiation) folgt

$$\int_{B_r(x)} u_t dy = \int_{B_r(x)} (-\operatorname{div} j + f) dy. \tag{1.11}$$

Da dies für alle Bälle mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ gilt, folgt (für $u \in C^1$, $j \in C^1$, $f \in C$)

$$\partial_t u + \operatorname{div} j - f = 0 \qquad \in (0,T) \times \Omega \tag{1.12}$$

Diese Gleichung heißt Bilanzgleichung oder Erhaltungssatz, weil sie die Erhaltung der Masse bzw. die Massebilanz beschreibt. Diese Bilanzgleichung gilt unabhängig von dem konkreten Stoff, den wir betrachten. Um eine Gleichung für u zu gewinnen, fehlt noch eine Beziehung zwischen j und u (diese hängt von dem konkreten Stoff ab). Im einfachsten Fall ist j zu ∇u proportional,

$$j = -D\nabla u. \tag{1.13}$$

Die Konstante D heißt Diffusionskoeffizient. Es gilt $D > 0$, da der Fluß von Gebieten hoher Massedichte zu solchen niedriger Massedichte erfolgt. Setzt man der Einfachheit halber $D = 1$ so ergibt sich die Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \tag{1.14}$$

Lösungen der Gleichung $-\Delta v = f$ entsprechen gerade stationären Masseverteilungen, d.h $u(t,x) = v(x)$ ist eine Lösung von (1.14) Statt der Diffusion von Stoffen kann man auch die zeitliche Entwicklung der Temperatur in einem Stoff betrachten. In diesem Fall ist u die Temperatur, j der Wärmefluß und f die Wärmezufuhr. Die im Ball $B_r(x)$ gespeicherte Energie ist

$\int_{B_r(x)} cu\ dy$, wobei die Konstante c die spezifische Wärmekapazität (Energie/ Temperatur $\times$ Volumen) des Stoffes ist. Die zugehörige Bilanzgleichung ist

$$\partial_t(cu) = -\operatorname{div} j + f \tag{1.15}$$

und mit $j = -D\nabla u$ und $c = 1$, $D = 1$ ergibt sich wieder (1.14). Im den folgenden Kapiteln werden wir uns zunächst mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, dann mit der Gleichung $-\Delta u = f$, der sogenannten Poisson-Gleichung, beschäftigen und insbesondere zunächst mit dem Spezialfall $f = 0$.

2 Harmonische Funktionen und die Poisson Gleichung

2.1 Einführung

Die Poissongleichung

$$\Delta u = f$$

ist das wichtigste Beispiel elliptischer Differentialgleichungen. Beispiele sind

(i) Voll nichtlineare elliptische Gleichungen

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0 \qquad \text{in } U \subset \mathbb{R}^d$$

wobei F eine stetig differenzierbare Funktion auf eine offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ist. Die Strukturannahme der Elliptizität ist

$$D_A F(A, p, u, x)B \geq c\|B\|$$

für alle positiv semi definiten Matrizen B. $D_A F$ bezeichnet die totale Ableitung nach der ersten Komponenten (die eine $d \times d$ matrix ist).

(ii) Die Helmholtzgleichung und die Minimalflächengleichung sind elliptische Gleichungen.

(iii) Weitere Beispiele sind die Monge-Amperegleichung

$$\det D^2u = f$$

wobei V die Menge der positiv definiten Matrizen ist und $f > 0$. Eine Variante ist die Gleichung der vorgeschriebenen Gaußkrümmung

$$\det D^2u = f(1 + |Du|^2)^{d/2}$$

Der Graph der Lösung hat die Gaußkrümmung $f(x)$ im Punkt $(x, u(x))$.

(iv) Das elektrische Potential u eines stationären elektrischen Feldes im Vakuum ist harmonisch, d.h.

$$\Delta u = 0$$

(v) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann komplex linear, wenn es eine Drehstreckung ist:

$$\begin{aligned} a * b =& (\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \operatorname{Im} b) + i(\operatorname{Re} a \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} a \operatorname{Re} b) \\ =& \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} b \\ \operatorname{Im} b & \operatorname{Re} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ offen, $u : U \to \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit komplex linearer Ableitung, d.h. die Jacobimatrix

$$Du = \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} u & \partial_y \operatorname{Re} u \\ \partial_y \operatorname{Im} u & \partial_y \operatorname{Im} u \end{pmatrix}$$

ist eine Drehstreckung, i. e. es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x \operatorname{Re} u = \partial_y \operatorname{Im} u, \partial_y \operatorname{Re} u = -\partial_x \operatorname{Im} u.$$

Dann sind sowohl $\operatorname{Re} u$ wie auch $\operatorname{Im} u$ harmonische Funktionen. Wir zeigen dies unter der zusätzlichen Annahme, dass u zweimal stetig differnzierbar ist. Dann ist

$$\partial_x^2 \operatorname{Re} u + \partial_y^2 \operatorname{Re} u = \partial_x(\partial_y \operatorname{Im} u) - \partial_y(\partial_x \operatorname{Im} u) = 0.$$

Das Studium der Poissongleichung ist ein erster wesentlicher Schritt zum Verständnis einer großen Klasse von Gleichungen.

2.2 Maß, Integration und der Satz von Gauß

In diesem Abschnitt betrachten wir Grundlagen aus der Analysis I-III.

(i) Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist eine Menge X mit einer Sigmaalgebra $\mathcal{A}$ von Mengen von X und einem Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

(ii) Eine meßbare Funktion ist eine Abbildung $X \to [-\infty, \infty]$ für die $\{x : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Für nichtnegative meßbare Funktionen g ist das Integral durch

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt$$

definiert. Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, wenn $\int |f| d\mu < \infty$. In diesem Fall definieren wir

$$\int_X f d\mu = \int_X \max\{f, 0\} d\mu - \int_X \max\{-f, 0\} d\mu.$$

Das Integral ist linear, additiv in der Integrationsmenge und es gelten eine Reihe von Konvergenzsatz: Satz Beppo Levi, Lemma von Fatou und der Konvergenzsatz von Lebesgue.

(iv) Das Lebesguemaß m^d ist das eindeutig bestimmte vollständige Maß auf $\mathbb{R}^d$, das translationsinvariant ist, das auf jeder offenen Menge (und daher auf jeder Borelmenge) definiert ist, mit $m^d([0,1)^d) = 1$.

(v) Es gilt für den Ball mit Radius R um Null, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$,

$$m^d(B_R(0)) = R^d m^d(B_1(0))$$

(vi) Ist f integrierbar auf $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ so ist $x_2 \to f(x_1, x_2)$ für fast jedes x_1 integrierbar m^{d_2} integrierbar, $x_1 \to \int f(x_1, x_2) dm^{d_2}$ ist m^{d_2} integrierbar (die Nullmenge ist irrelevant) , und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, x_2) dm^d(x_1, x_2)$$

(vii) Mit diesen Eigenschaften läßt sich das Maß der Einheitskugel bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dm^d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} e^{-|x_1|^2} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-|x_2|^2} dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} e^{-|x_1|^2} dm^{d_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-|x_2|^2} dm^{d_2}(x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dm^d(x) = \int_0^\infty m^d(\{x : e^{-|x|^2} > t\}) &= \int_0^1 m^d(B_{(-\ln t)^{\frac{1}{2}}}(0)) dt \\
&= m^d(B_1(0)) \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{d}{2}} dt \\
&= m^d(B_1(0)) \int_0^\infty s^{\frac{d}{2}} e^{-s} ds \\
&= m^d(B_1(0)) \Gamma(\frac{d+2}{2})
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dm^2 = \pi, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}},$$

$$\Gamma(1/2) = \frac{1}{2} \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}.$$

(viii) Die Transformationsformel. Ist $U \subset \mathbb{R}^d$, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ injektiv so gilt

$$\int_{\phi(U)} f(y) dm^d(y) = \int_U f \circ \phi(y)) |\det D\phi(x)| dm^d(x) \tag{2.1}$$

(ix) Hausdorffmaß und Integration über Untermannigfaltigkeiten. Das s dimensionale Hausdorffmaß $\mathcal{H}^s$ ist ein translationsinvariantes Maß auf den Borelmengen. Im Fall $s = d$ stimmt es mit dem Lebesguemaß überein. Auf n dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M^n ist die Einschränkung ein Maß auf der Untermannigfaltigkeit, das ein Integral

$$\int_{M^n} f d\mathcal{H}^n$$

definiert.

(x) Die Areaformel. $n \geq d$ und $\phi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ injektiv so gilt

$$\int_{\phi(U)} f d\mathcal{H}^d = \int_U f \circ \phi (\det D\phi^T D\phi)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^d \tag{2.2}$$

Damit kann man das Maß des Einheitsballes mit Hilfe von Polarkoordinaten bestimmen.

(xi) Die Coareaformel. Ist $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $d \geq n$ so gilt

$$\int_U f (\det D\phi D\phi^T)^{\frac{1}{2}} dm^d = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\phi^{-1}(t)} f(x) d\mathcal{H}^{d-n} dm^n(t) \tag{2.3}$$

Genauer: Ist $f(\det D\phi D\phi^T)^{\frac{1}{2}}$ integrierbar, so ist für fast alle t f auf $\phi^{-1}(t)$ $\mathcal{H}^{d-n}$ integrierbar.

Beispiel: $n = d - 1$, $\phi(x) = |x|$, $D\Phi D\Phi^T = 1$ und

$$m^d(B_1(0)) = \int_0^1 \mathcal{H}^n(\partial B_t(0)) = \mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{S}^{d-1}) \int_0^1 t^{n-1} dt \tag{2.4}$$

und daher

$$\mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{S}^{d-1}) = d m^d(B_1(0)).$$

Insbesondere ist die Länge des Einheitskreises 2π. Hier kann man alternativ Polarkoordinaten verwenden und erhält diese Identität mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini.

(xii) Der Satz von Gauß. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene beschränkte Menge, deren Rand ∂U eine C^1 Untermannigfaltigkeit M^{d-1} enthält. Ω liege lokal immer auf einer Seite von M. Es gelte $\mathcal{H}^{d-1}(\partial U) < \infty$ und $\mathcal{H}^{d-1}(\partial U \backslash M^{d-1}) = 0$. Sei ν die äußere Einheitsnormale. Ist $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{U}, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} F$ integrierbar, so gilt

$$\int \operatorname{div} F dm^d = \int_{M^{d-1}} F \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1}. \tag{2.5}$$

Wir schreiben in der Regel

$$\int_U \dots dx$$

für das Integral bzgl. des Lebesguemasses.

Definition 2.1. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ mit $0 < \mu(E) < \infty$, u integrierbar. Dann definieren wir:*

$$⨍_E u \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u \, d\mu \,. \tag{2.6}$$

2.3 Eigenschaften harmonischer Funktionen

2.3.1 Definition

Definition 2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Die Funktion u heißt harmonisch wenn $\Delta u = 0$ auf Ω. Dabei $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$.*

Beispiele:

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Die Funktion $x \mapsto x \cdot Ax$ ist genau dann in $\mathbb{R}^d$ harmonisch, wenn $\operatorname{Tr} A = 0$ (die Spur von A). Insbesondere sind $x \mapsto x_1^2 - x_2^2$ und $x \mapsto x_1 x_2$ in $\mathbb{R}^d$ harmonisch.

(ii) $x \mapsto \ln |x|$ ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonisch, für $n \geq 3$ ist $x \mapsto |x|^{2-d}$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ harmonisch.

2.3.2 Mittelwerteigenschaft

Satz 2.3 (Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$.*

(i) Falls $\Delta u = 0$ in Ω, dann gilt

$$u(x) = ⨍_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} = ⨍_{B_r(x)} u \, dx \,. \tag{2.7}$$

(ii) Falls $-\Delta u \leq 0$ in Ω, dann gilt

$$u(x) \leq ⨍_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.8}$$

und

$$u(x) \leq ⨍_{B_r(x)} u(y) \, dy \,. \tag{2.9}$$

(iii) Falls $-\Delta u < 0$ in Ω, dann gilt

$$u(x) < \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.10}$$

und

$$u(x) < \fint_{B_r(x)} u(y) \, dy \, . \tag{2.11}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst (2.8). Sei $\varphi : [0, r] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(\rho) = \fint_{\partial B_1(0)} u(x + \rho z) \, d\mathcal{H}^{d-1}(z) \tag{2.12}$$

definiert. Die Funktion φ ist stetig (Konvergenzsatz von Lebesgue), $\varphi(0) = u(x)$ und für $\rho > 0$ gilt

$$\varphi(\rho) = \fint_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \, . \tag{2.13}$$

Die Funktion φ ist in allen $\rho \in (0, r)$ differenzierbar (Differenzenquotient, Konvergenzsatz von Lebesgue oder gleichmässige Konvergenz des Differenzenquotienten), und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho}\varphi(\rho) &= \fint_{\partial B_1(0)} Du(x + \rho z) \cdot z \, d\mathcal{H}^{d-1}(z) && (2.14) \\ &= \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{\partial B_1(0)} Du(x + \rho z) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{d-1}(z) && (2.15) \\ &= \frac{\rho}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0))} \int_{B_1(0)} (\Delta u)(x + \rho z) \, dx \geq 0 \, . && (2.16) \end{aligned}$$

Hier wurde den Satz von Gauß benutzt, und

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} D_i u(x + \rho z) = \rho \sum_i D_i D_i u(x + \rho z) = \rho \Delta u(x + \rho z) \tag{2.17}$$

gerechnet. Aus $-\Delta u \leq 0$ folgt, dass φ monoton wachsend ist. Da φ stetig ist, folgt $u(x) = \varphi(0) \leq \varphi(r)$ und (2.8) ist bewiesen.

(2.9) folgt mit der Coareaformel (2.4) mit $\phi(x) = |x|$ im ersten und letzten Schritt

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u dx &= \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u d\mathcal{H}^{d-1} ds \\ &\geq u(x) \int_0^r \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_s(x)) ds \\ &= u(x) m^d(B_r(x)) \end{aligned}$$

Der Beweis impliziert (iii) indem wir jeweils $\leq$ durch $<$ ersetzen. Für (i) wenden wir (ii) auf u und $-u$ an. □

Satz 2.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Die drei Eigenschaften*

(i) u ist harmonisch, d.h.,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega\,, \tag{2.18}$$

(ii) u erfüllt die sphärische Mittelwerteigenschaft, d.h.,

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u\, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.19}$$

für alle (x, r) mit $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$,

(iii) u erfüllt die Ballmittelwerteigenschaft, d.h.,

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u\, dy \tag{2.20}$$

für alle Bälle $B_r(x) \subset \Omega$,

sind äquivalent.

Beweis. (i)⇒(ii) folgt aus Satz 2.3.

(ii)⇒(iii) folgt aus

$$\int_{B_r(x)} u\, dy = \int_{[0,r]} \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u\, d\mathcal{H}^{d-1} \right) d\mathcal{L}^1(\rho) \tag{2.21}$$

$$= \int_{[0,r]} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho(x)) u(x) d\mathcal{L}^1(\rho) = u(x)\mathcal{L}^d(B_r(x))\,. \tag{2.22}$$

(vgl. (2.4)) .

(iii)⇒(i) wird durch Widerspruch bewiesen. Sei $x \in \Omega$, so dass $\Delta u(x) \neq 0$. Wir können oBdA annehmen, dass $\Delta u(x) > 0$ (sonst betrachten wir $-u$). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset \Omega$ und $\Delta u > 0$ in $B_r(x)$. Dann folgt aus Satz 2.3(iii), dass

$$u(x) < \fint_{B_r(x)} u\, dy\,, \tag{2.23}$$

entgegen der Annahme. □

2.3.3 Regularität

Die Funktion f auf $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar. Damit ist auch

$$g(x) = f(1 - 4|x|^2)$$

beiliebg oft differenzierbar mit Träger $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$. Die Funktion g ist positiv im Inneren. Wir definieren

$$\eta(x) = \frac{g(x)}{\int g dx}.$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, mit Träger in $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$, radial, radial fallend, mit Integral 1. Wir definieren die Funktion

$$\eta_r = r^{-d}\eta(x/r) \tag{2.24}$$

deren Integral wieder 1 ist.

Lemma 2.5. *Die Funktion u sei integrierbar und erfülle die Mittelwerteigenschaft, d.h.,*

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u\,dy \tag{2.25}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Dann folgt

$$u(x) = (u * \eta_r)(x) \tag{2.26}$$

für alle $B_r(x) \subset \Omega$.

Beweis.

$$\begin{aligned}(u * \eta_r)(x) &= \int_\Omega u(y)\eta_r(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \int_0^{\eta_r(x-y)} dt\,dy \\ &= \int_{\{(t,x):0\le t\le\eta_r(x-y)\}} u(y)dm^{d+1}(y,t) \\ &= \int_0^\infty \int_{\{\eta_r(x-y)>t\}} u(y)dm(y)dt \\ &= u(x)\int_0^\infty m^d(\{y : \eta_r(x-y) > t\})dt \\ &= u(x)\int \eta_r dy \\ &= u(x)\end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei wir mehrfach Fubini und in der fünften Gleichung die Mittelwerteigenschaft verwendet haben. □

Satz 2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar . Falls*

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u\,dm^d \tag{2.28}$$

für alle Bälle $B_r(x) \subset \Omega$, dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{2.29}$$

Insbesondere ist jede harmonische Funktion beliebig oft differenzierbar.

Beweis von Satz 2.6. Sei $x \in \Omega$, $r > 0$, so dass $B_{2r}(x) \subset \Omega$. Dann gilt

$$u(y) = \int_{B_{2r}(x)} u(z)\eta_r(z-y)dz \tag{2.30}$$

für alle $y \in B_r(x)$. Aus $\eta_r \in C_0^\infty$ folgt (mit Differenzenquotienten und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz) , dass u differenzierbar ist und

$$|\partial_i u(x)| = r^{-1}\left|\int_{B_r(x)} u(y)r^{-n}(\partial_i\eta)(\frac{x-y}{r})dy\right| \le r^{-1}\int |\partial_i\eta|dy\|u\|_{C_b(B_r(x))}. \tag{2.31}$$

Wir können das Argument iterieren und sehen, dass u beliebig oft differenzierbar ist. Insbesondere ist u zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Nach Satz 2.4 ist u harmonisch.

Da jede harmonische Funktion auf einer kleineren Menge integrierbar ist können wir die erste Aussage auf harmonische Funktionen anwenden.

□

Satz 2.7 (Liouville)**.** *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $M = \sup|u|(\mathbb{R}^d)$. Nach (2.31) gilt

$$|\partial_{x_i}u(x)| \le r^{-1}\int |\partial_{x_i}\eta|dy\|u\|_{sup}$$

Da r beliebig ist, folgt $Du(x) = 0$. □

2.3.4 Maximumprinzip

Definition 2.8. *Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ heißt zusammenhängend, wenn für alle offene Mengen $A, B \subset U$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = U$ gilt: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.*

Bemerkung. Eine offene Menge U in $\mathbb{R}^d$ ist genau dann zusammenhängend, wenn zu jedem Paar $x, y \in U$ eine Kurve $\varphi \in C([0,1], U)$ existiert, so dass $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$. Die Kurve darf auch in C^∞ gewählt werden. Jeder Punkt einer offenen Mengen liegt in einer maximalen zusammenhängenden offen Teilmenge. Derartige Teilmengen heißen Zusammenhangskomponenten.

Satz 2.9 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen, beschränkt. Sei* $u \in C(\overline{\Omega})$*, so dass*

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u\,dy \text{ für alle } B_r(x) \subset \Omega\,. \tag{2.32}$$

Dann gilt

$$u(x) \leq \max u(\partial\Omega) \qquad \text{für alle } x \in \Omega$$

Insbesondere nehmen harmonische Funktionen das Maximum auf dem Rand an.

Beweis. Das ist eine Konsequenz der Mittelwerteigenschaft. Sei x_0 ein Punkt im Inneren in dem ein Maximum angenommen wird. Nach der Mittelwerteigenschaft gilt

$$u(x_0) \leq \fint_{B_r(x_0)} u(y)dy = u(x_0) + \int_{B_r(x_0)} (u(y) - u(x_0))dy$$

und damit

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x_0)|dy = 0$$

Insbesondere gilt das auch für den maximalen Ball in Ω, der den Rand berührt. Aufgrund der Stetigkeit folgt die Behauptung. □

09.04.2019

Bemerkung. Falls u harmonisch ist, dann gilt auch

$$\min u(\overline{\Omega}) = \min u(\partial\Omega)\,. \tag{2.33}$$

Satz 2.10 (Eindeutigkeit)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt,* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*, so dass*

$$\Delta u = \Delta v \text{ in } \Omega \tag{2.34}$$

$$u = v \text{ auf } \partial\Omega\,. \tag{2.35}$$

Dann gilt $u = v$*.*

Beweis. Die Funktion $w = u - v$ ist harmonisch, und gleich null auf $\partial\Omega$. Deshalb gilt $w = 0$ in Ω. □

Satz 2.11 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen, beschränkt, zusammenhängend. Sei* $u \in C(\overline{\Omega})$*, so dass*

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u\,dy \text{ für alle } B_r(x) \subset \Omega\,. \tag{2.36}$$

Dann gilt entweder

(i) $u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$ *für alle* $x \in \Omega$

oder

(ii) Die Funktion u *ist konstant auf* Ω*.*

Bemerkung. Falls $u \in C^2(\Omega)$, dann kann die Annahme (2.36) durch $-\Delta u \leq 0$ in Ω ersetzt werden (Satz 2.3(ii)).

Beweis. Sei $M = \max u(\overline{\Omega})$, $V = \Omega \cap u^{-1}(M) = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$.

Sei $x \in V$, $B_r(x) \subset \Omega$. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt, $B_r(x) \subset V$. Deshalb ist V offen.

Da u stetig ist, ist auch die Menge $\Omega \setminus V = \{x \in \Omega : u(x) \neq M\})$ offen. Da Ω zusammenhängend ist, gilt $V = \emptyset$ (Option (i)) oder $V = \Omega$ (Option (ii)). □

Zur Vereinfachung der Notation sei

$$\omega_d = m^d(B_1(0)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}. \tag{2.37}$$

Satz 2.12 (Harnack-Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, V nichtleer, offen, beschränkt, zusammenhängend, mit $\overline{V} \subset \Omega$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, so dass*

$$\sup u(V) \leq c \inf u(V) \tag{2.38}$$

für alle $u \in C^2(\Omega)$ die $\Delta u = 0$ und $u \geq 0$ auf Ω erfüllen.

Beweis. Sei

$$r = \frac{1}{4} \min\{\operatorname{dist}(V, \partial\Omega) > 0, 1\}. \tag{2.39}$$

Da $\overline{V}$ kompakt ist können wir es mit endlichen vielen Bällen $B_r(x_j)$, $1 \leq j \leq N$ überdecken. Wir betrachten zuerst zwei Punkte $x, y \in B_r(x_j)$, mit $|x - y| < r$. Aus der Mittelwerteigenschaft, $B_r(x) \subset B_{2r}(y) \subset \Omega$ und $u \geq 0$ folgt

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u dy = \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_r(x)} u dy \tag{2.40}$$

$$\leq \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_{2r}(y)} u dy \tag{2.41}$$

$$= 2^d \fint_{B_{2r}(y)} u dy = 2^d u(y). \tag{2.42}$$

Aus der Stetigkeit von u folgt die gleiche Aussage für

$$u(z) \leq 2^d u(w) \qquad \text{für } z, w \in \overline{B}_r(x_j) \cap V.$$

Seien $x, y \in V$. Dann existiert eine Folge $(j_m)_{0 \leq m \leq M}$ mit $M \leq N$ und

$$x \in B_r(x_{j_0}), y \in B_r(x_{j_m}), B_r(x_{j_{m+1}}) \cap B_r(x_{j_m}) \neq \{\ \}.$$

Das sehen wir, indem wir $x \in \bar{V}$ wählen, und $W \subset \bar{V}$ als die Menge aller y wählen, für die eine derartige Kette existiert. Diese Menge ist offen in $\bar{V}$ und offensichtlich auch abgeschlossen, und daher ganz $\bar{V}$.

Iterativ sehen wir

$$u(x) \leq 2^{Nd} u(y)\,. \tag{2.43}$$

□

Satz 2.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u : \mathbb{N} \to C^2(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen, die in $L^1(\Omega)$ eine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es $u_* \in L^1(\Omega)$, so dass:*

(i) $u_j \to u_*$ in $L^1(\Omega)$;

(ii) $u_* \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u_* = 0$;

(iii) $D^\alpha u_j$ konvergiert punktweise gegen $D^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$, insbesondere ist die Funktion u_* harmonisch.

(iv) Falls $K \subset \Omega$ kompakt ist und $\alpha \in \mathbb{N}^d$, dann konvergiert $D^\alpha u_j \to D^\alpha u_*$ gleichmäßig in K.

Beweis. Sei $x \in \Omega$, $B_r(x) \subset \Omega$. Aus

$$|u_j - u_m|(x) \leq \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_r(x)} |u_j - u_m|(y) dy \leq \frac{1}{\omega_d r^d} \|u_j - u_m\|_{L^1(\Omega)} \tag{2.44}$$

folgt, dass $j \mapsto u_j(x)$ eine Cauchy-Folge ist (wir schreiben $\omega_d = m^n(B_1(0))$). Wir definieren $u_*(x) = \lim u_j(x)$. Da u_j eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$ ist, existiert eine integrierbare Funktione $\tilde{u}$, gegen die u_j in L^1 konvergiert. Eine Teilfolge konvergiert fast überall, also folgt $\tilde{u} = u_*$ fast überall, und damit auch $u_j \to u_*$ in $L^1(\Omega)$.

Aus

$$u_*(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x) = \lim_{j\to\infty} \fint_{B_r(x)} u_j \, dy = \fint_{B_r(x)} u_* \, dy \tag{2.45}$$

folgt, dass u_* die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Deshalb (Satz 2.6) ist u_* harmonisch.

Sei $K \subset \Omega$ kompakt, $r = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)/r$. Für alle $x \in K$ gilt $B_r(x) \subset \Omega$ mit η_r wie oben

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (u_j(x) - u_*(x))| =& |(u_j - u_*) * \partial^\alpha \eta_r(x)| \\ =& \left| \int (u_j(y) - u_*(y)) \partial^\alpha \eta_r(x-y) dy \right| \\ \leq& \|u_j - u_*\|_{L^1} \|\partial^\alpha \eta_r\|_{sup} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Es folgt, dass

$$\lim_{j\to\infty} \max_K |\partial^\alpha (u_j - u_*)| = 0\,. \tag{2.47}$$

Das beendet den Beweis. □

Satz 2.14 (Weyl's Lemma)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, u integrierbar. Falls*

$$\int u\Delta\varphi = 0 \tag{2.48}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann gibt es $\hat{u} \in C^\infty(\Omega)$ mit $\hat{u} = u$ fast überall und

$$\Delta\hat{u} = 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{2.49}$$

Beweis. Sei η_r wie in Lemma 2.5, $B = B_R(x_*)$ eine Ball mit $\overline{B_{2R}(x_*)} \subset \Omega$.
Wir definieren, für $r \in (0, R)$, $u_r = u * \eta_r \in C^\infty(B)$. Dann

$$\Delta u_r(x) = \Delta(u * \eta_r) = u * (\Delta\eta_\varepsilon) = \int u(y)\Delta\eta_r(x-y)dy = 0 \tag{2.50}$$

Deshalb $\Delta u_r = 0$. Da $u_r \to u$ in L^1 (η_r definiert eine Diracschar), folgt die Aussage aus Satz 2.13. □

2.4 Explizite Lösung der Poissongleichung

Definition 2.15. *Für $k \geq 1$ bezeichnet $C^k(\overline{\Omega})$ die Menge der Funktionen $u \in C^k(\Omega)$ so dass $\partial^\alpha u$ eine stetige Fortsetzung auf $\bar{\Omega}$ für alle α mit $|\alpha| \leq k$ besitzt. Analoges gilt für $C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$. Wir bezeichnen den Raum aller Funktionen in $C^k(\Omega)$ mit $\partial^\alpha u$ beschränkt für $|\alpha| \leq k$mit $C_b(\Omega)$.*

Wir bezeichen den Raum der $C^k(\Omega)$ Funktionen mit kompaktem Träger mit C_c^∞ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. Die Fortsetzung von Du auf dem Abschluss $\overline{\Omega}$ ist eindeutig. $C_c^k(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$.

2.4.1 Fundamentallösung, Laplacegleichung im Ganzraum

Definition 2.16 (Fundamentallösung)**.** *Man definiert $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x| & \textit{falls } d = 2 \\ \dfrac{1}{d(d-2)\omega_d} \dfrac{1}{|x|^{d-2}} & \textit{falls } d \geq 3 \end{cases} \tag{2.51}$$

und $\Phi(0) = 0$.

Bemerkung. Im Beispiel in Abschnitt 2.3.1 haben wir gesehen, dass

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\,. \tag{2.52}$$

Ist Ω eine Menge mit C^1 Rand und äußerer Einheitnormalen und $u \in C^1(\bar{\Omega})$ dann definieren wir $\partial_\nu u$ als die Richtungsableitung in Richtung ν.

Lemma 2.17. *Für alle $r > 0$ gilt*

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi \, d\mathcal{H}^{d-1} = -1 \,. \tag{2.53}$$

Beweis. Man rechnet $\nabla|x| = x/|x|$,

$$\nabla \Phi(x) = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{|x|^d} \,, \tag{2.54}$$

und

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi \, d\mathcal{H}^{d-1} = -\int_{\partial B_r(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{|x|^d} = -1 \,. \tag{2.55}$$

□

11.04.2019

Satz 2.18. *Sei $d \geq 2$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, $u = f * \Phi$, d.h.,*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y) dy \,. \tag{2.56}$$

Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$-\Delta u = f \,. \tag{2.57}$$

Definition 2.19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Man bezeichnet mit $L^1_{loc}(\Omega)$ die Menge der messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ integrierbar sind.*

Gegeben sei eine Funktionenfolge $f : \mathbb{N} \to L^1_{loc}(\Omega)$ und eine Funktion $f_* \in L^1_{loc}(\Omega)$; man sagt dass $f_j \to f_*$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |f_j - f_*| dy = 0 \,. \tag{2.58}$$

Bemerkung. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $f\chi_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $R > 0$; $f_j \to f_*$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $f_j\chi_{B_R(0)} \to f_*\chi_{B_R(0)}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $R > 0$.

Beispiele. $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ und $C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Insbesondere ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = |x|^2/j$, in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$; diese Folge konvergiert gegen 0 in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (aber nicht in L^1!).

Bemerkung. Die Fundamentallösung Φ, in Def. 2.16 eingeführt, erfüllt $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 2.20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.*

(i) $C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$;

(ii) Für $f \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy\,, \tag{2.59}$$

und $f * g \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Falls zusätzlich $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, dann $f * g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ und $D(f * g) = (Df) * g$.

Beweis. (i): Jede stetige Funktion ist auf einer beliebigen kompakte Menge integrierbar.

(ii): Sei $R > 0$, so dass $\operatorname{supp} f \in B_R(0)$. Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $f(x - y)g(y) = 0$ für alle $y \notin B_R(x)$, deshalb existiert das Integral.

Sei $x_j \to x$. Dann ist $B_R(x_j) \subset B_{R+1}(x)$ für alle j groß genug. Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_{R+1}(x)} f(x_j - y)g(y)dy = \int_{B_{R+1}(x)} \lim_{j\to\infty} f(x_j - y)g(y)dy \tag{2.60}$$

$$= \int_{B_{R+1}(x)} f(x-y)g(y)dy\,, \tag{2.61}$$

deshalb ist $f * g$ stetig.

(iii): Man rechnet, für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $h \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,

$$\frac{(f*g)(x+he_i) - (f*g)(x)}{h} = \int_{B_{R+1}(x)} g(y)\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}dy\,. \tag{2.62}$$

Da $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} = D_i f(x-y) \tag{2.63}$$

gleichmäßig in y. Mit $g \in L^1_{loc}$, und der Stetigkeit von Df folgt, dass $f * g \in C^1$ mit

$$D(f*g) = (Df) * g\,. \tag{2.64}$$

□

Beweis von Satz 2.18. Aus Lemma 2.20 folgt, dass das Integral existiert, $u \in C^1$ und

$$\partial_{x_j} u = \Phi * \partial_{x_j} f \,. \tag{2.65}$$

Eine weitere Anwendung von Lemma 2.20 zeigt dass $Du \in C^1$ und

$$\partial^2_{x_j x_k} u = \Phi * \partial^2_{x_j x_k} f \,. \tag{2.66}$$

Deshalb gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, mit $\Delta u = \Phi * \Delta f$.

Sei $R > |x|$, so dass $\operatorname{supp} f \in B_R(0)$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy && (2.67)\\
&= \int_{B_R(x)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy && (2.68)\\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy \,. && (2.69)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $y \mapsto \Phi(y)\Delta f(x-y)$ in $L^1(B_R(x))$ liegt, und $\chi_{B_\varepsilon(0)} \to 0$ punktweise fast überall. Wir wenden jetzt den Satz von Gauß zweimal an; dabei nehmen wir an, dass $B_\varepsilon(0) \subset B_R(x)$ (wenn nicht, können wir R durch $R + |x| + 1$ ersetzen).

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) dy && (2.70)\\
&\qquad = \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^d \partial_{y_j} (\Phi(y) \partial_{y_j} f(x-y)) dy && (2.71)\\
&\qquad = -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_{\nu_y} f(x-y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) && (2.72)\\
&\qquad\quad - \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^d \partial_{y_j} \Phi(y) \cdot \partial_{y_j} f(x-y) dy \,. && (2.73)
\end{aligned}$$

Die Integrale auf $\partial B_R(x)$ können weggelassen werden, weil $f(x-y) = 0$ und $Df(x-y) = 0$ für alle $y \in \partial B_R(x)$. Hier und im Folgendem ist schreiben wir $\partial_\nu f(x-y)$ für $(D_y f(x-y))\nu(y)$ – d.h., das Differential der Funktion f wird im Punkt $x-y$ entlang der Normale $\nu(y)$ im Punkt y ausgewertet. Dabei ist $\nu(y) = y/|y|$ die äußere Normale auf dem Rand von $B_\varepsilon(0)$ (diese ist zeitgleich die *innere* Normale auf dem Rand von $B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)$, daher das Minuszeichen).

Die zweite Anwendung von Gauß liefert

$$\int_{B-R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)dy \tag{2.74}$$

$$= -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\partial_{\nu_y} f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{2.75}$$

$$+\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_{\nu_y}\Phi(y)f(x-y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Delta\Phi(y)f(x-y)dy \tag{2.76}$$

Da $\Delta\Phi = 0$ auf $B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)$, folgt:

$$\int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy \tag{2.77}$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \left[\Phi(y)\partial_\nu f(x-y) - \partial_\nu \Phi(y) f(x-y)\right] d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,. \tag{2.78}$$

Man überprüft, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\partial_\nu f(x-y)d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| = 0 \tag{2.79}$$

(die Funktion $\partial_\nu f(x-y)$ ist beschränkt, der Rest wird explizit integriert). Deshalb gilt:

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y)d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,. \tag{2.80}$$

Mit dem Variabelwechsel $y = \varepsilon z$ folgt

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_1(0)} \partial_\nu \Phi(z) f(x-\varepsilon z)d\mathcal{H}^{d-1}(z)\,. \tag{2.81}$$

Da $f(x-\varepsilon z)$ beschränkt ist und punktweise gegen $f(x)$ konvergiert, folgt mit dominierter Konvergenz und Lemma 2.17 dass

$$\Delta u(x) = f(x) \int_{\partial B_1(0)} \partial_\nu \Phi(y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -f(x)\,. \tag{2.82}$$

Damit ist der Beweis beendet. □

2.4.2 Greensche Funktion

Der Satz von Gauß gilt für C^1-Polyeder, d.h. für beschränkte offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, deren Rand $\partial\Omega$ von endlichem $\mathcal{H}^{n-1}$ Maß ist, und für die eine C^1 Mannigfaltigkeit M in $\partial\Omega$, so dass Ω immer auf einer Seite von M liegt, und $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega\setminus M) = 0$.

Definition 2.21. *Eine beschränkte offene Menge, die den Bedingungen des Satzes von Gauß genügt, nennen wir C^1 Polyeder.*

Definition 2.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Eine Funktion $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω falls für jedes $x \in \Omega$ eine Funktion $\varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ existiert, so dass*

$$\Delta\varphi_x = 0 \ \text{in } \Omega \tag{2.83}$$

$$\varphi_x(y) = \Phi(y - x) \ \text{für alle } y \in \partial\Omega\,, \tag{2.84}$$

und $G(x, y) = \Phi(y - x) - \varphi_x(y)$.

Bemerkung. Das bedeutet, dass $G(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega \times \partial\Omega$ und dass $\Delta(G(x, \cdot) - \Phi(\cdot - x)) = 0$.

Sei $f \in \mathcal{D} := C_0^\infty$, mit $\operatorname{supp} f \in \Omega$ und $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Wir schreiben

$$\Lambda_g = \int_\Omega g(y)f(y)dy.$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$-\Delta\Lambda_{G(x,\cdot)}(f) = -\Delta\Lambda_{\Phi(\cdot - x)}(f) - \Delta\Lambda_{\varphi_x}(f) = f(x)\,. \tag{2.85}$$

Man schreibt auch suggestiv, für uns aber im Moment nicht rigoros definiert

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x \text{ in } \mathcal{D}', \text{ für alle } x \in \Omega \text{ fest} \tag{2.86}$$

$$G(x, \cdot) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{2.87}$$

Bemerkung. Für beschränkte Mengen Ω ist die Funktion φ_x, falls existent, eindeutig. Deshalb ist auch G in diesem Fall eindeutig.

Bemerkung. $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, für alle $x \in \Omega$ ist $G(x, \cdot) \in C^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$.

Satz 2.23. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes C^1-Polyeder mit $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$, G eine Green'sche Funktion für Ω, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in C(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{2.88}$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\partial_\nu G(x, y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_\Omega G(x, y)f(y)dy\,. \tag{2.89}$$

16.04.2019

Beweisidee: Mit dem Integralsatz von Gauß folgt

$$\int_\Omega (u\Delta G - G\Delta u)\; dx = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu G - G\partial_\nu u) d\mathcal{H}^{d-1}\,, \tag{2.90}$$

wobei ΔG distributionell (d.h. wie in (2.85)) interpretiert werden sollte. Mit $\Delta G(x-\cdot) = \delta_x$ und $G = 0$ auf dem Rand folgt die Aussage.

Beweis. Sei $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$, $V_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$. Dann gilt $G(x,\cdot) \in C^2(V_\varepsilon) \cap C^1(\overline{V}_\varepsilon)$, deshalb

$$\int_{V_\varepsilon} [u(y)\Delta G(x,y) - G(x,y)\Delta u(y)]\, dy = \tag{2.91}$$

$$\int_{\partial V_\varepsilon} [u(y)\partial_\nu G(x,y) - G(x,y)\partial_\nu u(y)]\; d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{2.92}$$

Mit $\Delta G = 0$ in V_ε und $G(x,\cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$ reduziert sich diese Gleichung auf

$$-\int_{V_\varepsilon} G(x,y)\Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_\nu G(x,y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \tag{2.93}$$

$$- \int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu G(x,y) - G(x,y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. \tag{2.94}$$

Da Ω beschränkt ist, $\Phi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi_x \in C(\overline{\Omega})$ gilt $G(x,\cdot) \in L_1(\overline{\Omega})$ und deshalb

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{V_\varepsilon} G(x,y)\Delta u(y) dy = -\int_\Omega G(x,y)\Delta u(y) dy = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy\,. \tag{2.95}$$

Wir werden unten zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu G(x,y) - G(x,y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) = u(x)\,. \tag{2.96}$$

Mit (2.93), (2.95) und (2.96) ist der Beweis beendet.

Es bleibt, (2.96) zu beweisen. Sei $G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi_x(y)$. Aus dem Beweis von Satz 2.18 folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu \Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -u(x)\,. \tag{2.97}$$

Der Term mit φ_x wird partiell integriert (d.h. mit dem Satz von Gauß):

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu \varphi_x(y) - \varphi_x(y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \tag{2.98}$$

$$= \int_{B_\varepsilon(x)} (u\Delta\varphi_x - \varphi_x \Delta u)(y) dy\,. \tag{2.99}$$

Mit $\Delta\varphi_x = 0$ und

$$\left|\int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_x \Delta u(y) dy\right| \leq \max\{|\varphi_x(y)| : y \in \overline{B_{r/2}(x)}\} \max\{|\Delta u(y)| : y \in \overline{B_{r/2}(x)}\}\omega_d \varepsilon^d \tag{2.100}$$

folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y)\partial_\nu \varphi_x(y) - \varphi_x(y)\partial_\nu u(y)]\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0\,. \tag{2.101}$$

Mit (2.97) ist der Beweis beendet. □

Satz 2.24. *Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $G(x,y) = G(y,x)$.*

Beweis. Seien $x, y \in \Omega$ fest. Wir brauchen nur den Fall $x \neq y$ zu betrachten. Wir definieren zwei Funktionen $v, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$v(z) = G(x,z) \tag{2.102}$$

$$w(z) = G(y,z)\,. \tag{2.103}$$

Dann ist $v(z) = w(z) = 0$ für $z \in \partial\Omega$ und $\Delta v = 0$ in $\Omega \setminus \{x\}$, und $\Delta w = 0$ in $\Omega \setminus \{y\}$.

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)} \subset \Omega$ und $\overline{B_\varepsilon(x)} \cap \overline{B_\varepsilon(y)} = \emptyset$. Sei $V_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)}$. Dann gilt

$$\int_{V_\varepsilon} (w\Delta v - v\Delta w)\, dz = \int_{V_\varepsilon} \sum_{j=1}^d \partial_{z_j} \left(w\partial_{z_j} v - v\partial_{z_j} w\right) dz \tag{2.104}$$

$$= \int_{\partial V_\varepsilon} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.105}$$

und deshalb

$$0 = \int_{\partial B_\varepsilon(x) \cup \partial B_\varepsilon(y)} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.106}$$

Wir betrachten die Ränder der zwei Bälle getrennt. Der erste ist

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.107}$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w(z)\partial_\nu G(x,z) - G(x,z)\partial_\nu w(z))\, d\mathcal{H}^{d-1}\,. \tag{2.108}$$

Da $w \in C^2(B_\varepsilon(x))$, folgt aus (2.96)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w(z)\partial_\nu G(x,z) - G(x,z)\partial_\nu w(z))\, d\mathcal{H}^{d-1} = -w(x)\,. \tag{2.109}$$

Analog,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} (w\partial_\nu v - v\partial_\nu w)\, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{2.110}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} (G(y,z)\partial_\nu v(z) - v(z)\partial_\nu G(y,z))\, d\mathcal{H}^{d-1} = v(y)\,. \tag{2.111}$$

Deshalb gilt

$$G(y,x) = w(x) = v(y) = G(x,y),$$

und der Beweis ist beendet. □

2.4.3 Spezialgebiete

Erinnerung: Aus Def. 2.16,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{falls } d = 2 \\ \dfrac{1}{d(d-2)\omega_d}\dfrac{1}{|x|^{d-2}} & \text{falls } d \geq 3\,, \end{cases} \tag{2.112}$$

folgt

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{d\omega_d}\frac{x}{|x|^d}\,. \tag{2.113}$$

Halbraum

Definition 2.25. *Die Greensche Funktion für das Gebiet*

$$\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} \tag{2.114}$$

ist

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-Px)\,, \tag{2.115}$$

wobei $Px = (x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d)$*, d.h.,* $P = \mathrm{Id} - 2e_d \otimes e_d$*. Man nennt* $K : \mathbb{R}^d_+ \times \partial\mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$*,* $K = -\partial_\nu G$*,*

$$K(x,y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_d} = \frac{2x_d}{d\omega_d}\frac{1}{|x-y|^d} \tag{2.116}$$

der Poissonkern des Halbraumes.

Lemma 2.26. *(i) Für alle* $x \in \mathbb{R}^d_+$ *ist* $K(x,\cdot) \in C(\partial\mathbb{R}^d_+) \cap L^1(\partial\mathbb{R}^d_+)$*.*

(ii) Für alle $y \in \partial\mathbb{R}^d_+$ *gilt* $K(\cdot,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ *und*

$$\Delta K(\cdot,y) = \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i} K(x,y) = 0.$$

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^d_+$ gilt

$$\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)dy = 1\,. \tag{2.117}$$

Beweis. (i): Stetigkeit folgt aus $|x-y| \geq |x_d - y_d| = x_d > 0$. Integrabilität folgt aus der Tatsache dass $|K(x,\cdot)| \leq C/|y|^d$ für alle y groß genug.

(ii): Folgt aus der Definition und $\Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

(iii): Sei $x \in \mathbb{R}^d_+$, $\varepsilon \in (0, x_d)$, $R > 2|x|$. Dann ist $y \mapsto \Phi(y-x) - \Phi(y-Px)$ harmonisch in $\Omega_\varepsilon = B_R(0) \cap \mathbb{R}^d_+ \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, und mit dem Satz von Gauß folgt

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_\nu \left[\Phi(y-x) - \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0\,. \tag{2.118}$$

Aus Lemma 2.17 folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu \Phi(y-x) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -1\,, \tag{2.119}$$

und mit $\Delta\Phi(y-Px) = 0$ auf $B_\varepsilon(x)$ folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu \Phi(y-Px) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0\,. \tag{2.120}$$

Deshalb gilt

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^d_+ \cap B_R(0))} \partial_\nu \left[\Phi(y-x) - \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -1\,. \tag{2.121}$$

Aus

$$D\Phi(y-x) = D\Phi\left(\frac{y-x}{R}\right)\frac{1}{R^{d-1}} \tag{2.122}$$

und dem Variablenwechsel $y = Rz$ folgt

$$\int_{\partial B_R(0)\cap\mathbb{R}^d_+} \partial_\nu \Phi(y-x) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \int_{\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^d_+} \partial_\nu \Phi(z - \frac{x}{R}) d\mathcal{H}^{d-1}(z)\,. \tag{2.123}$$

Da $|x|/R < 1/2$ gilt $|D\Phi(z - x/R)| \leq \max |D\Phi|(\overline{B_{\frac{3}{2}}(0)} \setminus B_{\frac{1}{2}}(0))$ für alle z und R, und mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R(0)\cap\mathbb{R}^d_+} \left[\partial_\nu \Phi(y-x) - \partial_\nu \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{2.124}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^d_+} \left[\partial_\nu \Phi(z - \frac{x}{R}) - \partial_\nu \Phi(z - \frac{Px}{R})\right] d\mathcal{H}^{n-1}(z) \tag{2.125}$$

$$= \int_{\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^d_+} \lim_{R\to\infty} \left[\partial_\nu \Phi(z - \frac{x}{R}) - \partial_\nu \Phi(z - \frac{Px}{R})\right] d\mathcal{H}^{n-1}(z) = 0\,. \tag{2.126}$$

Es folgt, dass

$$\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \partial_\nu \left[\Phi(y-x) - \Phi(y-Px)\right] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -1\,. \tag{2.127}$$

Hier ν ist die äußere Normale, $\nu = -e_d$, deshalb $-\partial_\nu = \partial/\partial y_d$. $\square$

Satz 2.27. *Sei $g \in C^0_b(\partial\mathbb{R}^n_+)$ (d.h., beschränkt und stetig) und sei*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)g(y) & \textit{falls } x \in \mathbb{R}^d_+ \\ g(x) & \textit{falls } x \in \partial\mathbb{R}^d_+\,. \end{cases} \tag{2.128}$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d_+) \cap C^0_b(\overline{\mathbb{R}^d_+})$, $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^d_+$ und $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}^d_+$.

Beweis. Teil 1: wir zeigen $u \in C^2(\mathbb{R}^d_+)$ und $\Delta u = 0$. Sei $x^* \in \mathbb{R}^d_+$ fest, $\varepsilon = x^*_d/2 > 0$. Die Ableitungen DK, D^2K sind auf $(x,y) \in B_\varepsilon(x^*) \times \partial\mathbb{R}^d_+$ beschränkt und gleichmäßig in y integrierbar. Deshalb gilt $u \in C^2(B_\varepsilon(x^*))$ und

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta K(x,y)g(y) = 0\,. \tag{2.129}$$

Teil 2: wir zeigen $u \in C(\overline{\mathbb{R}^d_+})$. Für $x_* \in \partial\mathbb{R}^d_+$ und $x \in \mathbb{R}^d_+$ gilt

$$u(x) - u(x_*) = \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)g(y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y) - g(x_*) \tag{2.130}$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} K(x,y)(g(y) - g(x_*))\, d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,. \tag{2.131}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(y) - g(x_*)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_{2\delta}(x_*) \cap \partial\mathbb{R}^d_+$.

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \cap B_{2\delta}(x_*)} K(x,y)(g(y) - g(x_*)) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| \tag{2.132}$$

$$\le \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^d_+} |K(x,y)| d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \varepsilon \tag{2.133}$$

und

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \setminus B_{2\delta}(x_*)} K(x,y)(g(y) - g(x_*)) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| \tag{2.134}$$

$$\le 2 \max |g| \int_{\partial\mathbb{R}^d_+ \setminus B_{2\delta}(x_*)} |K(x,y)| d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,. \tag{2.135}$$

Für $x \in B_\delta(x_*)$ und $y \in \partial\mathbb{R}^d_+ \setminus B_{2\delta}(x_+)$ gilt $|x - y| \ge |y - x_*| - |x - x_*| \ge |y - x_*| - \delta$, und deshalb

$$\frac{1}{|y-x|^d} \ge \frac{1}{(|y - x_*| - \delta)^d}\,, \tag{2.136}$$

wobei die letzte Funktion auf $\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{2\delta}(x_*)$ integrierbar ist. Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt

$$\lim_{x \to x_*} \int_{\partial \mathbb{R}^d_+ \setminus B_\delta(x_*)} \frac{2x_d}{d\omega_d} \frac{1}{|x-y|^d} d\mathcal{H}^{d-1}(y) \tag{2.137}$$

$$= \int_{\partial \mathbb{R}^d_+ \setminus B_\delta(x_*)} \lim_{x \to x_*} \frac{2x_d}{d\omega_d} \frac{1}{|x-y|^d} d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0\,. \tag{2.138}$$

Deshalb gibt es ein $\delta' < \delta$, so dass

$$|u(x) - u(x^*)| \leq 2\varepsilon \tag{2.139}$$

für alle $x \in B_{\delta'}(x_*) \cap \mathbb{R}^d_+$. Da g in x_* stetig ist, gibt es ein $\delta'' < \delta'$ so dass (2.139) für alle $x \in B_{\delta'}(x_*) \cap \partial \mathbb{R}^d_+$ gilt. Das beendet den Beweis. □

23.04.2019

Satz 2.28. *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C_b(\overline{\mathbb{R}^d_+})$. Dann gilt*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d_+} u(x) = \sup_{y \in \partial \mathbb{R}^d_+} u(y)$$

Beweis. Sei u wie im Satz, $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^d_+} u(x)$, $m = \sup_{y \in \partial \mathbb{R}^d_+} u(y)$. Offensichtlich gilt $0 \leq m \leq M < \infty$ und wir wollen $M = m$ zeigen. Für $t > 1$ ist die Funktion

$$w(x) = (M - m + \varepsilon) \frac{\Phi((0, -t)^T) - \Phi(x - (0, -t)^T)}{|\Phi((0, -t)^T)|}$$

harmonisch, nichtnegativ in $\mathbb{R}^d_+$ mit

$$\lim_{|x| \to \infty} w(x) \geq M - m + \varepsilon.$$

Sei $R > 0$ so dass

$$w(x) \geq M - m \tag{2.140}$$

für $|x| = R$. Sei $v = w + m - u$ und $U_R = \mathbb{R}^d_+ \cap B_R(0)$. Dann ist v harmonisch in U_R, stetig auf $\overline{U_R}$ und ≥ 0 auf ∂U_R. Mit dem Maximumprinzip folgt

$$v \geq 0 \qquad \text{in } \overline{U_R}$$

und damit (ausserhalb folgt das aus (2.140) und der Konstruktion)

$$u(x) \leq m + w(x).$$

Wir betrachten nun die Abhängigkeit von t und schreiben $w_t(x)$. Da

$$|\nabla w_t(x)| \leq \frac{M - m + \varepsilon}{d\omega} \frac{1}{\Phi(-te_d)|x - (0, -t)^T|^{d-1}} \leq (M - m + \varepsilon) t^{-1} \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

und

$$w(0) = 0$$

folgt

$$w_t(x, t) \to 0 \qquad \text{mit } t \to \infty$$

in $\mathbb{R}^d_+$. Damit folgt $u(x) \leq m$ für alle x. □

Bemerkung. Wie früher folgt, dass u in Satz 2.26 die einzige harmonische und beschränkte Funktion ist, die mit g auf dem Rand übereinstimmt.

Der Ball

Lemma 2.29. *Die Greensche Funktion für $B_r(0)$ ist*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(y-x) - \Phi\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ \Phi(y) - \Phi(re_1) & \text{falls } x = 0\,. \end{cases} \tag{2.141}$$

Beweis. Für $y \in \partial B_r(0)$, $x \neq 0$,

$$\left|\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right|^2 = \frac{|x|^2}{r^2}|y|^2 - 2x\cdot y + \frac{r^2}{|x|^2}|x|^2 = |x|^2 - 2x\cdot y + r^2 = |x-y|^2\,, \tag{2.142}$$

deshalb gilt $G(x,y) = 0$ falls $|y| = r$. Man rechnet $\Delta_y G(x,y) = \Delta_y \Phi(y-x) - \frac{|x|^2}{r^2}\Delta_y \Phi\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) = 0$. □

Für $|y| = r$ gilt

$$\partial_\nu G(x,y) = \frac{y}{r}\cdot\nabla\Phi(y-x) - \frac{y}{r}\frac{|x|}{r}(D\Phi)\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) = -\frac{1}{d\omega_d}\frac{r^2-x^2}{r|x-y|^d}\,. \tag{2.143}$$

Definition 2.30. *Der Poissonkern für den Ball $B_r(0)$ ist*

$$K_{B_r(0)}(x,y) = \frac{1}{d\omega_d}\frac{r^2-|x|^2}{r|x-y|^d}\,. \tag{2.144}$$

Für den Ball $B_r(x_*)$ ist er gegeben durch

$$K_{B_r(x_*)}(x,y) = \frac{1}{d\omega_d}\frac{r^2-(x-x_*)^2}{r|x-y|^d}\,. \tag{2.145}$$

Satz 2.31. *Sei $g \in C(\partial B_r(x_0))$, $u : \overline{B}_r(x_0) \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B_r(x_0)} K(x,y)g(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{falls } x \in B_r(x_0) \\ g(x) & \text{falls } x \in \partial B_r(x_0) \end{cases} \tag{2.146}$$

definiert. Dann gilt $u \in C^2(B_r(x_0)) \cap C(\overline{B}_r(x_0))$ und $\Delta u = 0$ in $B_r(x_0)$.

Beweis. Wie in Lemma 2.26 zeigt man, dass $\Delta_x K = \sum_i \partial_{x_i}^2 K = 0$. Wie in Satz 2.27 folgt, dass u in $B_r(x_0)$ harmonisch ist.

Es bleibt zu zeigen, dass u auf dem Rand stetig ist. Da $u = 1$ harmonisch ist, folgt aus Satz 2.23, dass $\int_{\partial B_r(x_0)} K(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1$ für alle $x \in B_r(x_0)$.

Sei $x_* \in \partial B_r(x_0)$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(y) - g(x_*)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{für alle } y \in \partial B_r(x_0) \cap B_{2\delta}(x_*)\,. \tag{2.147}$$

Sei $x \in B_r(x_0) \cap B_\delta(x_*)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_*)| &= \left| \int_{\partial B_r(x_0)} K(x,y)(g(y) - g(x^*)) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| && (2.148)\\
&\leq \int_{\partial B_r(x_0)} K(x,y)|g(y) - g(x^*)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) && (2.149)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\max|g| \int_{\partial B_r(x_0)\setminus B_{2\delta}(x_*)} K(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,. && (2.150)
\end{aligned}$$

Aus $|y - x_*| \geq 2\delta$ und $|x - x_*| < \delta$ folgt $|x - y| \geq \delta$, $K(x,y) \leq (r^2 - |x - x_0|^2)/(d\omega_d \delta^d)$ und

$$|u(x) - u(x_*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{d\omega_d} \max|g| \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{\delta^d}\,. \tag{2.151}$$

Deshalb gilt:

$$\limsup_{x \to x_*} |u(x) - u(x_*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.152}$$

für alle $\varepsilon > 0$, da ε beliebig war, ist die Aussage bewiesen. □

Wir haben insbesondere folgendes bewiesen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $u \in C(\Omega)$. Dann gibt es genau eine Funktion $v \in C(\Omega)$, so dass gilt:

$$v = u \text{ in } \Omega \setminus B_r(x) \tag{2.153}$$

$$\Delta v = 0 \text{ in } B_r(x)\,. \tag{2.154}$$

Die Funktion v wird harmonische Fortsetzung von u genannt und ist explizit durch

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus B_r(x_0) \\ \int_{\partial B_r(z)} K_{B_r(x_0)}(x,y) u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{falls } x \in B_r(x_0) \end{cases} \tag{2.155}$$

gegeben.

Definition 2.32. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir nennen $u \in C^\infty(\Omega)$ analytisch, falls für alle $x_0 \in \Omega$ ein $R > 0$ existiert, so dass*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

für $x \in B_R(x_0)$.

Beispiele: Polynome sind analytisch. Wir betrachten allgemeine Potenzreihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (x-x_0)^\alpha$$

und definieren

$$R^{-1} = \limsup_{m\to\infty} \sup_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{1/m} \in [0,\infty].$$

Sei jetzt $r < R$, $|(x-x_0)_j| \le r$ für jede Komponente, $r < R - \varepsilon$ und

$$|a_\alpha \le C(R-\varepsilon)^{-|\alpha|}.$$

Dann ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha (x-x_0)^\alpha| \le \sum_{m=0}^{\infty} Cm^d \left(\frac{r}{R-\varepsilon}\right)^m < \infty$$

und die Potenzreihe konvergiert in $x_0 + [-r,r]^d$. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz in $x_0 + [-r,r]^d$ dass $R > r$, wie in einer Dimension.

Satz 2.33. *Harmonische Funktionen sind analytisch.*

26.04.2019

Beweis. Es gnügt, die Situation $u \in C^2(B_r(x_*)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ zu betrachten. Ohne Einschränkung sei $x_* = 0$ und $r = 1$. Dann gilt mit dem Poissonkern für $|x| < 1$

$$u(x) = \int_{\partial B_1(0)} K(x,y) u(y) d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{d\omega_d} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^d} u(y) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Mit der geometrischen Reihe gilt (da $|y| = 1$) mit $q = (2\langle x,y\rangle - |x|^2)$

$$\frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + 1} = \sum_{m=0}^{\infty} (2\langle x,y\rangle - |x|^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} q^m$$

falls $|x| < \frac{1}{3}$ und damit $|q| < 1$. Das Produkt von Potenzreihen mit Konvergenzradius 1 hat wieder Konvergenzradius ≤ 1 (mit Cauchysummation). Also ist

$$\frac{1}{|x-y|^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2\langle x,y\rangle - |x|^2)^m$$

mit

$$\limsup_{m\to\infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} \le 1.$$

Also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ so dass

$$|a_m| \le C_\varepsilon (1+\varepsilon)^m$$

Damit ist

$$u(x) = \sum_{m=0}^\infty a_m \int_{\partial B_1(0)} (2\langle x, y\rangle - |x|^2)^m u(y) d\mathcal{H}^{d-1}(y)$$

wobei die Summanden Polynome vom Grad $2m$ sind, die gleichmässig konvergieren, falls $|x| \le \frac{1}{3}$. Wir betrachten nun die Taylorpolynome $T_N(x)$. Der Glied der Reihe mit Potenz m hat Terme vom Grad zwischen m und $2m$. Das Taylorpolynom vom Grad N ist die Summe aller Terme mit $2m \le N$, und einem Teil der Summanden nach Ausmultiplizieren für $m \le N$. Da

$$(2\langle x, y\rangle - |x|^2)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (2\langle x, y\rangle)^j |x|^{2(m-j}$$

und daher

$$|(2\langle x, y\rangle - |x|^2)^m| \le \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |2\langle x, y\rangle|^j |x|^{2(m-j} = |2|x| + |x|^2|^m \le (\frac{2}{3} + \frac{1}{9})^m = (\frac{7}{9})^m.$$

Damit folgt

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{2n}} - T_{y,N}(x) \right| \le C_\varepsilon \sum_{m=M+1}^\infty ((1+\varepsilon)\frac{7}{9})^m = C_\varepsilon \frac{1}{1-\frac{7}{9}\varepsilon} \Big((1+\varepsilon)\frac{7}{9} \Big)^{N+1} \to 0$$

für $N \to \infty$. Damit ist

$$T_N u(x) = \fint_{\partial B_1(0)} T_{N,y} u(y) d\mathcal{H}^{d-1}$$

und

$$|u(x) - T_N u(x)| \le \frac{9}{2} \Big(\frac{7}{9}\Big)^{N+1} \fint_{\partial B_1(0)} |u(y)| d\mathcal{H}^{d-1}$$

Damit ist u analytisch. Ist d ungerade, dann nehmen wir eine Dummyvariable dazu.

$\square$

2.5 Existenz von Lösungen

Definition 2.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C(\Omega)$. Die Funktion u heißt subharmonisch, falls*

$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad \textit{für alle Bälle mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega \tag{2.156}$$

und superharmonisch, falls

$$u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad \textit{für alle Bälle mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega. \tag{2.157}$$

Lemma 2.35. *(i) Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist genau dann subharmonisch, wenn*

$$-\Delta u \leq 0 \qquad \textit{in } \Omega\,. \tag{2.158}$$

(ii) Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ ist genau dann subharmonisch, wenn $-u$ superharmonisch ist.

(iii) Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ ist genau dann harmonisch, wenn u sowohl subharmonisch als auch superharmonisch ist.

Beweis. (i): in Satz 2.3(ii) (Mittelwertsatz) wurde gezeigt, dass $-\Delta u \leq 0$ (2.156) impliziert. Die Gegenrichtung wird wie in Satz 2.4 bewiesen: Falls ein $x \in \Omega$ mit $-\Delta u(x) > 0$ existieren würde, dann gäbe es ein $r > 0$, so dass $-\Delta u > 0$ auf $B_r(x)$ und $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Dann würde aus 2.3(iii) folgen

$$u(x) > \fint_{B_r(x)} u \, dy\,, \tag{2.159}$$

gegen die Annahme.

(ii): es reicht, $-u$ in der Definition einzusetzen.

(iii): eine harmonische Funktion erfüllt

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad \text{für alle Bälle mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega \tag{2.160}$$

und ist damit sowohl subharmonisch als auch superharmonisch. Die Gegenrichtung wurde in Satz 2.6 bewiesen (für alle $x_* \in \Omega$ gibt es ein $r_* > 0$, so dass $\overline{B}(x_*, r_*) \subset \Omega$, dann $u \in L_1(\overline{B}(x_*, r_*))$, und daraus folgt $\Delta u = 0$ in x_* ☐

Lemma 2.36. *(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $u, v \in C(\overline{\Omega})$, u subharmonisch, v superharmonisch. Falls $u \leq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt entweder $u < v$ auf Ω oder $u = v$ auf Ω.*

(ii) Sei $u \in C(\Omega)$ subharmonisch, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, und sei $v : \Omega \to \mathbb{R}$ die harmonische Fortsetzung von u auf $B_r(x)$, nämlich,

$$v(y) = \begin{cases} u(y) & \textit{falls } y \in \Omega \setminus B_r(x) \\ \int_{\partial B_r(x)} K_{B_r(x)}(y,z)u(z)d\mathcal{H}^{d-1}(z) & \textit{falls } y \in B_r(x)\,. \end{cases} \tag{2.161}$$

Dann gilt $v \in C(\Omega)$, v ist subharmonisch und $u \le v$.

(iii) Seien $u_1, \ldots, u_K \in C(\Omega)$ subharmonisch. Dann ist $u = \max\{u_1, \ldots, u_K\}$ ebenfalls subharmonisch.

Beweis. (i): Die Funktion $u - v$ ist subharmonisch, und $u - v \le 0$ auf $\partial\Omega$. Die Aussage folgt aus dem starken Maximumprinzip, Satz 2.11.

(ii): Aus $v \in C(\overline{B}_r(x))$ und $u \in C(\Omega \setminus B_r(x))$ mit $u = v$ auf $\partial B_r(x)$ folgt $v \in C(\Omega)$.

Die Funktion v ist in $B_r(x)$ harmonisch und auf $\partial B_r(x)$ gilt $u = v$. Aus (i) folgt, dass $u \le v$ in $B_r(x)$. Deshalb gilt $u \le v$ auf Ω.

Sei $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$. Falls $y \notin B_r(x)$ dann gilt

$$v(y) = u(y) \le \fint_{\partial B_R(y)} u(z)\, d\mathcal{H}^{d-1}(z) \le \fint_{\partial B_R(y)} v(z)\, d\mathcal{H}^{d-1}(z)\,. \tag{2.162}$$

Falls $y \in B_r(x)$, betrachten wir die Funktion $w : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$w(z) = \begin{cases} v(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_R(y) \\ \int_{\partial B(y,R)} K_{B_R(y)}(z,t)v(t)\, d\mathcal{H}^{d-1}(t) & \text{falls } z \in B_R(y)\,. \end{cases} \tag{2.163}$$

Aus der Definition folgt

$$w(y) = \fint_{\partial B_R(y)} w(t)d\mathcal{H}^{d-1}(t) = \fint_{\partial B_R(y)} v(t)d\mathcal{H}^{d-1}(t)\,. \tag{2.164}$$

Falls

$$v(y) \le w(y) \tag{2.165}$$

folgt

$$v(x) \le \fint_{\partial B_R(y)} v(y)d\mathcal{H}^{d-1}$$

und für alle R mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ damit auch

$$v(x) \le \fint_{B_R(x)} v(y)dy$$

für alle derartigen Bälle. Damit ist der Beweis beendet.

Es bleibt, (2.165) zu beweisen. Die Funktion u ist subharmonisch und w ist harmonisch in $B_R(y)$, aus $u \le v = w$ auf $\partial B_R(y)$ und dem Maximumprinzip folgt $u \le w$ auf $B_R(y)$.

Die Funktion $v-w$ ist harmonisch in $B_r(x)\cap B_R(y)$, und $v-w = u-w \le 0$ auf $(\partial B_r(x)) \cap B_R(y) \subset B(y,R)$ und $v-w=0$ auf $\partial B_R(y)$. Deshalb gilt $v-w \le 0$ auf $\partial(B_r(x)\cap B_R(y))$ und damit auch in $y \in B_r(x)\cap B_R(y)$.

(iii): Sei $u = \max_j u_j$, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, $p \in \{1,\dots,K\}$, so dass $u(x) = u_p(x)$. Aus $u_p \le u$ folgt

$$u(x) = u_p(x) \le \fint_{\partial B_r(x)} u_p \, d\mathcal{H}^{d-1} \le \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \,. \tag{2.166}$$

□

Definition 2.37. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$. Dann definieren wir:*

$$S_g = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \textit{ subharmonisch und } v \le g \textit{ auf } \partial\Omega\} \,. \tag{2.167}$$

Satz 2.38. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \tag{2.168}$$

definiert. Die Funktion u ist wohldefiniert und harmonisch.

Beweis. Die Menge S_g ist nicht leer, weil die konstante Funktion $x \mapsto \min g(\partial\Omega)$ in S_g liegt.

Für alle $x \in \overline{\Omega}$ ist die Menge $\sup\{v(x) : v \in S_g\}$ beschränkt, weil $v(x) \le \max g(\partial\Omega)$ für alle $v \in S_g$. Deshalb ist u wohldefiniert.

Sei $y \in \Omega$, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S_f$ eine Folge, so dass $v_k(y) \to u(y)$. Wir können oBdA annehmen, dass $v_k \le v_{k+1}$ (sonst betrachten wir die Folge $\max\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$). Sei $\overline{B}_r(y) \subset \Omega$, w_k die harmonische Fortsetzung von v_k auf $B_r(y)$, d.h.,

$$w_k(z) = \begin{cases} v_k(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_r(y) \\ \int_{\partial B_r(y)} K_{B_r(y)}(z,t) v_k(t) d\mathcal{H}^{n-1}(t) & \text{falls } z \in B_r(y) \,. \end{cases} \tag{2.169}$$

Aus Lemma 2.36(ii) folgt, dass w_k subharmonisch ist und $v_k \le w_k$, insbesondere $w_k \in S_g$. Deshalb gilt $v_k \le w_k \le u$, insbesondere konvergiert $w_k(y)$ gegen $u(y)$. Aus der Monotonie der Folge v_k folgt leicht die Monotonie der Folge w_k.

Aus der Monotonie der Folge w_k folgt, dass w_k gegen eine harmonische Funktion U gleichmäßig in $B_{r/2}(y)$ konvergiert. Beweis davon: Wir wissen, dass $w_k(y)$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $k \le h$. Da $w_h - w_k \ge 0$, und $\Delta(w_h - w_k) = 0$ auf $B_r(y)$, folgt aus der Harnack-Ungleichung (Satz 2.12), dass

$$\max(w_h - w_k)(\overline{B_{r/2}(y)}) \le C \min(w_h - w_k)(\overline{B_{r/2}(y)}) \le C(w_h(y) - w_k(y)) \,. \tag{2.170}$$

Deshalb ist w_h eine Cauchy-Folge in $C(\overline{B_{r/2}(y)})$ und konvergiert gleichmäßig gegen U. Da U die Mittelwerteigenschaft hat, ist sie harmonisch (Satz 2.6 oder Lemma 2.35(iii)). Ferner, $U(y) = u(y)$ und $U \le u$ auf $B_{r/2}(y)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $U = u$ auf $B_{r/2}(y)$. Falls nicht, dann gäbe es ein $p \in B_{r/2}(y)$, so dass $U(p) < u(p)$. Dann gäbe es ein $V \in S_g$ mit

$$U(p) < V(p)\,. \tag{2.171}$$

Sei $\tilde{v}_k = \max\{V, w_k\}$, und - wie oben -

$$\tilde{w}_k(z) = \begin{cases} \tilde{v}_k(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_r(y) \\ \int_{\partial B_r(y)} K_{B_r(y)}(z,t)\tilde{v}_k(t)d\mathcal{H}^{d-1}(t) & \text{falls } z \in B_r(y)\,. \end{cases} \tag{2.172}$$

Die Folge $\tilde{w}_k$ ist monoton, und $\tilde{w}_k(y) \to u(y)$. Deshalb konvergiert $\tilde{w}_k$ gleichmäßig auf $B(y, r/2)$ gegen eine harmonische Funktion $\tilde{U}$. Aus $w_k \leq \tilde{w}_k$ folgt $U \leq \tilde{U}$ auf $B(y, r/2)$, mit $\tilde{U}(y) = U(y) = u(y)$ folgt (starkes Maximumprinzip oder Harnack) $\tilde{U} = U$, insbesondere $V(p) \leq \tilde{U}(p) = U(p)$, ein Widerspruch zu (2.171). □

30.04.2019

Wir wenden uns den Randwerten zu.

Definition 2.39. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x_* \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C(\overline{\Omega})$ heißt Barriere in x_* wenn:*

(i) $w(x_*) = 0$ und $w > 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{x_*\}$;

(ii) w ist superharmonisch in Ω, d.h., (2.157) gilt.

Ein Punkt $x_* \in \partial\Omega$ heißt regulär, wenn eine Barriere in x_* existiert.

Lemma 2.40. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \tag{2.173}$$

definiert. Ist $x_* \in \partial\Omega$ regulär, so gilt

$$\lim_{x \to x_*} u(x) = u(x_*) = g(x_*)\,. \tag{2.174}$$

Beweis. Sei w eine Barriere für x_*. ei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass gilt:

$$|g(x) - g(x_*)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in B_\delta(x_*) \cap \partial\Omega\,. \tag{2.175}$$

Sei

$$C = \frac{2 \max |g|(\partial\Omega)}{\min w(\overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_*))}\,. \tag{2.176}$$

Dann gilt, für alle $x \in \partial\Omega$,

$$|g(x) - g(x_*)| \leq \varepsilon + Cw(x)\,, \tag{2.177}$$

und deshalb

$$g(x_*) - Cw(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega\,. \tag{2.178}$$

Die erste Funktion ist subharmonisch und deshalb in S_g enthalten, es folgt dass

$$g(x_*) - Cw(x) - \varepsilon \le u(x) \qquad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}\,. \tag{2.179}$$

Die Funktion $x \mapsto g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon$ ist superharmonisch. Für alle $v \in S_g$ gilt

$$v(x) \le g(x) \le g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega\,. \tag{2.180}$$

Mit Lemma 2.36(i) folgt

$$v(x) \le g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega \tag{2.181}$$

und aus der Definition von u folgt

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \le g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega\,. \tag{2.182}$$

Deshalb gilt:

$$\limsup_{x \to x_*} |u(x) - g(x_*)| \le \varepsilon + \lim_{x \to x_*} Cw(x) = \varepsilon \tag{2.183}$$

für alle $\varepsilon > 0$. □

Satz 2.41. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.184}$$

ist genau dann für beliebige $g \in C(\partial\Omega)$ lösbar, wenn alle Punkte $x_* \in \partial\Omega$ regulär sind.

Beweis. Falls alle $x_* \in \partial\Omega$ regulär sind, wurde Existenz in Satz 2.38 und Lemma 2.40 bewiesen.

Falls das Dirichletproblem lösbar ist, und $x_* \in \partial\Omega$, dann ist die Lösung von $\Delta u = 0$, $u(x) = |x - x_*|$ auf $\partial\Omega$ eine Barriere in x_*. □

Definition 2.42. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt die äußere Sphärenbedingung in $x_* \in \partial\Omega$ wenn $y \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ existieren, so dass*

$$\overline{B_r(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}\,. \tag{2.185}$$

Lemma 2.43. *Falls die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in $x_* \in \partial\Omega$ die äußere Sphärenbedingung erfüllt, dann ist x_* ein regulärer Punkt.*

Beweis. Sei

$$u(x) = \Phi(x_* - y) - \Phi(x - y)\,. \tag{2.186}$$

Dann gilt $u \ge 0$ auf $\overline{\Omega}$, und u ist auf Ω harmonisch. □

Beispiel. Jede konvexe Menge erfüllt überall eine Sphärenbedingung, sowie jede Menge deren Rand C^2-regulär ist.

Lemma 2.44. *Ein Punkt $x \in \partial\Omega$ ist genau dann regulär, wenn er als Randpunkt von $B_\rho(x) \cap \overline{\Omega}$ regulär ist.*

Beweis. Sei $x \in \partial\Omega$ regulär, $w \in C(\overline{\Omega})$ eine Barriere. Dann ist die Einschränkung von w auf $\overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho(x)}$ auch eine Barriere.

Sei jetzt w als Randpunkt von $\Omega \cap B_\rho(x)$ regulär, und sei $w \in C(B_\rho(x) \cap \overline{\Omega})$ superharmonisch, nichtnegativ, $w = 0$ genau bei x. Falls $\partial B_\rho(x) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, dann kann man $w = 1$ auf $\overline{\Omega} \setminus B_\rho(x)$ setzen. Sonst gilt $m = \min w(\partial B_\rho(x) \cap \overline{\Omega}) > 0$, und man definiert

$$\tilde{w}(y) = \begin{cases} m & \text{falls } y \in \overline{\Omega} \setminus B_\rho(x)\,, \\ \min\{m, w(y)\} & \text{falls } y \in \overline{\Omega} \cap B_\rho(x)\,. \end{cases} \tag{2.187}$$

Aus dieser Definition folgt leicht, dass $\tilde{w} \in C(\overline{\Omega})$, $\tilde{w}(x) = 0$, $\tilde{w}(y) > 0$ für alle $y \in \overline{\Omega} \setminus \{x\}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{w}$ superharmonisch ist. Sei $B_r(y) \subset \Omega$. Falls $y \notin B_\rho(x)$ dann gilt:

$$m = \tilde{w}(y) = \fint_{\partial B_r(y)} m \, d\mathcal{H}^{n-1} \geq \fint_{\partial B_r(y)} \tilde{w} \, d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{2.188}$$

weil $\tilde{w} \leq m$ überall.

Falls $y \in B_\rho(x)$, sei z die harmonische Fortsetzung von $\tilde{w}$ auf $B_r(y)$. Es reicht zu zeigen, dass $z(y) \leq \tilde{w}(y)$. Auf $B_r(y) \cap B_\rho(x)$ ist $\tilde{w}$ superharmonisch, und $z = \tilde{w}$ auf dem Rand.

□

Lemma 2.45. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. $x_* \in \partial\Omega$ ist regulär, falls $r > 0$ und $n \in \mathbb{R}^2$ mit $|n| = 1$ existieren so dass*

$$x_+ + tn \notin \Omega \qquad \text{für } 0 \leq t < r.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x_+ = 0$ und $n = -(1,0)^T$. Wir definieren

$$w(x) = \operatorname{Re} \sqrt{x_1 + ix_2}$$

□

Bemerkung. Die Sphärenbedingung ist nicht notwendig. Ein Punkt $x_* \in \partial\Omega$ erfüllt eine äußere Kegelbedingung, wenn ein offener Ball $B_r(y)$ existiert, so dass $\operatorname{conv}(\{x_*\} \cup B_r(y)) \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}$. (für $A \subset \mathbb{R}^d$ ist $\operatorname{conv} A$ die kleinste konvexe Menge, die A enthält). Die äußere Kegelbedingung reicht, und ist insbesondere in jedem Gebiet erfüllt, deren Rand Lipschitz-stetig ist. Die ist aber ebenfalls nicht notwendig.

Lemma 2.46. *Sei $\alpha > 0$, $C = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x| < 1, x_n < \alpha|x'|\}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Falls $x_* \in \partial\Omega$ so ist, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $B(r, x_*) \cap \Omega \subset x_* + QC$, wobei $Q \in SO(n)$ eine Rotation ist, dann gibt es eine Barriere in x_*.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $x_* = 0$ und $Q = \mathrm{Id}$. Wir werden eine Funktion u auf C konstruieren. Es ist leicht zu sehen, dass alle Punkte $x_* \in \partial C \setminus \{0\}$ die äußere Sphärenbedingung erfüllen.

Sei $g(x) = |x|$, $g \in C(\partial C)$, und $u = \sup S_g$ wie in Satz 2.38. Dann folgt $0 \le u \le 1$ und $\Delta u = 0$ in C. Mit Lemma 2.40 folgt $u = g$ on $\partial C \setminus \{0\}$ und $u \in C(\overline{C} \setminus \{0\})$.

Aus Lemma 2.36(i) folgt, dass $u < 1$ in C.

Sei $\omega = C \cap B_{1/2}$, $v : \omega \to \mathbb{R}$ durch $v(x) = u(2x)$ definiert. Sei $a = \max u(\overline{C} \cap \partial B_{1/2})$. Dann ist $1/2 \le a < 1$. Da $v = 1$ auf $C \cap \partial B_{1/2}$ und $u = \frac{1}{2}v$ auf $(\partial\omega) \cap B_{1/2}$, folgt $u \le av$ auf $\partial\omega$.

Wir zeigen jetzt, dass $u \le av$ in ω. Für $\varepsilon > 0$ sei $w_\varepsilon = av + \varepsilon\Phi$. Da u und av beschränkt sind, gibt es $\delta > 0$, so dass $u \le w_\varepsilon$ auf $\omega \cap \partial B_\delta$. Mit $u, w_\varepsilon \in C(\overline{\omega \setminus B_\delta})$ folgt $u \le w_\varepsilon$ in $\omega \setminus B_\delta$. Da ε beliebig war, folgt $u \le av$ in ω.

Wir haben gezeigt, dass für $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$

$$\sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) \le a \sup v(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) = a \sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-(k-1)}}). \tag{2.189}$$

Daraus folgt $\sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) \le a^k$. Mit $u \ge 0$ folgt, dass $u(0) = 0$ und u im Punkt 0 stetig ist. Aus dem starken Maximumprinzip folgt, dass $u > 0$ in C. Deshalb ist u eine Barriere. ☐

03.05.2019

Lemma 2.47. *Es gibt eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion $g \in C(\partial\Omega)$ so dass das Problem $\Delta u = 0$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$, keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ hat.*

Beweis. Sei $\omega = B_1(0) \setminus ([0, 1] \times \{0\}^2) \subset \mathbb{R}^3$,

$$u(x) = 4\pi \int_0^1 \Phi(x - te_1) t dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}} t dt\,. \tag{2.190}$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ in Ω. Da

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{(t - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_1 \operatorname{arsinh}\left(\frac{t - x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}\right)\right] = \frac{t}{\sqrt{(x_1 - t)^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

folgt

$$u(x) = |x - e_3|^2 - |x|^2 - x_1 \operatorname{arsinh} \frac{1 - x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + |x_1| \operatorname{arsinh} \frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}.$$

Aus

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsinh}(x)$$

folgt

$$\begin{aligned}
u(x) =& |x - e_3|^2 - |x|^2 - x_1 \ln(\frac{1 - x_1 + |x - e_1|}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}) + |x_1| \ln\Big(\frac{|x_1| + |x|}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}\Big) \\
=& |x - e_3|^2 - |x|^2 - x_1 \ln(1 - x_1 + |x - e_1|) + |x_1| \ln(|x_1| + |x|) - (x_1)_+ \ln(x_2^2 + x_3^2)
\end{aligned}$$

Wir schreiben

$$u(x) = \begin{cases} v(x) - x_1 \ln(x_2^2 + x_3^2) & \text{falls } x_1 \geq 0 \\ v(x) & \text{falls } x_1 < 0 \end{cases} \tag{2.191}$$

wobei v beschränkt und stetig ist.

Daraus folgt insbesondere, dass u nicht stetig ist. Es gilt sogar: In jeder Menge $B_r(0) \cap \{x_1 > 0\} \cap x_2^2 + x_3^2 > 0$ hat

$$-x_1 \ln(x_2^2 + x_3^2)$$

ganz $(0, \infty)$ als Wertebereich.

Sei $k > 2 \sup v(B_1(0))$. Sei $\Omega = B_1(0) \cap \{u < k\}$. Sei $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ durch $g = u$ auf $\partial\Omega \setminus \{0\}$, und $g(0) = k$ definiert. Aus $u = k$ auf $\partial\Omega \cap B_1 \setminus \{0\}$ folgt $g \in C(\partial\Omega)$.

Wir wollen zeigen, dass keine Lösung $w \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ von $\Delta w = 0$ und $w = g$ existiert.

Sei w eine solche Lösung. Für $\varepsilon > 0$ sei $w_\varepsilon = w + \varepsilon\Phi$. Da u auf Ω beschränkt ist, $\Phi > 0$ überall, und $\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \infty$, gibt es $\delta > 0$ so dass $w_\varepsilon \geq u$ auf $\partial(\Omega \setminus B_\delta)$. Da $w_\varepsilon - u$ auf $\Omega \setminus B_\delta$ harmonisch und auf $\overline{\Omega \setminus B_\delta}$ stetig ist, folgt $w_\varepsilon \geq u$ auf $\Omega \setminus B_\delta$. Da ε beliebig war, folgt $w \geq u$ auf Ω. Analog (mit $w - \varepsilon\Phi$) zeigt man $w \leq u$. Deshalb $w = u$. Das kann aber nicht sein, weil w in $\overline{\Omega}$ stetig ist, u nicht. $\square$

2.6 Harmonische Polynome und Kugelflächenfunktionen

2.6.1 Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten

Wir schreiben $\mathbb{S}^{d-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$.

Definition 2.48. *Wir sagen, $f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$ ist k mal stetig differenzierbar, wenn*

$$\tilde{f}(x) = f(x/|x|) \in C^k(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$$

Der Laplace-Beltramioperator von $\mathbb{S}^{d-1}$ ist die lineare Abbildung

$$\Delta_{\mathbb{S}} : C^2(\mathbb{S}^{d-1}) \to C(\mathbb{S}^{d-1})$$

$$\Delta_{\mathbb{S}} f(x) = \Delta \tilde{f}(x).$$

Wir bezeichnen die radiale Ableitung mit ∂_r, d.h.

$$\partial_r f(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j}{|x|} \partial_j f(x)$$

für $x \neq 0$ und f differenzierbar.

Ist $f \in C^k(\mathbb{R}^{d-1})$ dann ist definiert für jedes $r > 0$ $f_r(x) = f(rx/|x|)$ eine Funktion in $C^k(\mathbb{S}^{d-1})$. Wir definieren für $f \in C^2(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$

$$\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x) = (\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f_r)(x/r)$$

mit $r = |x|$.

Lemma 2.49 (Laplace in Polarkoordinaten)**.** *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$. Dann ist*

$$\Delta f = \partial_r^2 f + \frac{d-1}{r} \partial_r f + r^{-2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f$$

Beweis. Das folgt mit einer Rechnung: Sei $|x_0| = r_0 > 0$

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) =& (\Delta(f - f_{r_0}))(x_0) + \Delta f_{r_0}(x_0) \\ =& \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^2 (f - f_{r_0})(x_0) + r_0^{-2} (\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f)(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}(f - f_{r_0})(x_0) =& (\partial_{x_j} f - \partial_{x_j} f(r_0 x/|x|))|_{x_0} \\ =& \partial_{x_j} f(x_0) - \partial_{x_j} f(x_0) + \frac{x_j}{r_0} \partial_{x_j} f(x_0) \\ =& \frac{x_j}{r_0} \partial_r f(x_0) \end{aligned}$$

sowie mit $r = |x|$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\left(\frac{x_j}{r} \partial_r f\right) =& \partial_r^2 f + \left(\frac{d}{r} - \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j}{r^2} \partial_{x_j} r\right) \partial_r f \\ =& \partial_r^2 f + \frac{d-1}{r} \partial_r f(x). \end{aligned}$$

□

Für $d = 2$ erhalten wir mit $x = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$

$$\Delta f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + r^{-2} \partial_\phi^2 f$$

Für $d = 3$ verwenden wir Kugelkoordinaten $o < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$,

$$x = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{d-1}{r}\partial_r u + r^{-2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta u + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}u\Big)$$

und erhalten für den Laplace-Beltramioperator

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} u = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta u + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}u \tag{2.192}$$

Ähnliche Formeln kann man mit mehr Mühe für beliebige Dimensionen erhalten.

2.6.2 Harmonische Polynome

Definition 2.50. *Wir nennen $f : \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ homogen vom Grad $m \in \mathbb{R}$, falls*

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x).$$

Wir nennen das Polynom p homogen vom Grad $m \in \mathbb{N}$, falls es homogen vom Grad m ist.

Lemma 2.51 (Euler)**.** *Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$. f ist genau dann homogen vom Grad m falls gilt*

$$\sum_{j=1}^d x_j \partial_{x_j} f = mf \tag{2.193}$$

Beweis. Sei f homogen vom Grad m. Dann ist

$$\sum_{j=1}^d x_j\partial_{x_j} f(x) = \frac{d}{dt} f(tx)|_{t=1} = \frac{d}{dt}(t^m f(x))|_{t=1} = mf(x)$$

Umgekehrt gelte (3.15). Dann folgt mit $g(x) = |x|^{-m} f(x)$

$$\frac{d}{dt} g(tx) = 0$$

und damit ist g homogen vom Grad 0 und f homogen vom Grad m. □

Ein homogenes Polynom vom Grad m lässt sich eindeutig als Summe von Monomen x^α mit $|\alpha| = m$ schreiben. Der Homogenitätsgrad ist immer in $\mathbb{N}$. Wir bezeichnen den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad m mit P_m.

Lemma 2.52. *Die Dimension des Vektorraums P_m^d ist $\binom{m+d-1}{d-1}$.*

Beweis. Wir müssen die Multiindizes einer festen Länge zählen. Für $d = 1$ erhalten wir immer 1. Das ist der Induktionsanfang. Die Formel gelte in Dimension $d - 1$. Dann zählen wir

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m-j+d-1}{d-2} = \binom{m+d-1}{d-1}$$

mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks. □

Definition 2.53. *Wir bezeichnen den Raum der harmonischen Polynome in P_m^d mit H_m^d.*

Lemma 2.54. *Sei $p \in P_M^d$. Wir schreiben $p(x) = |x|^m f(x/|x|)$ mit $f(x) = p(x)$ für $x \in \mathbb{S}^{d-1}$. Dann gilt*

$$\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f + m(m+d-2)f = 0.$$

Ist $f \in H_{m_1}^d$ und $g \in H_{m_2}^d$ mit $m_1 \neq m_2$ then

$$\int_{\S^{d-1}} fg d\mathcal{H}^{d-1} = 0 \tag{2.194}$$

Beweis.

$$0 = \Delta p = \partial_r^2 p + \frac{d-1}{r}\partial_r p + r^{-2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} p = r^{-2}(m(m-1)+(d-1)m)p + \Delta_{\mathbb{S}}^{d-1} p.$$

Der zweite Teil folgt mit dem Satz von Euler und dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned}
m_1 \int_{\S^{d-1}} fg d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_{\S^{d-1}} (\sum_{j=1}^{d} x_j \partial_j f) g d\mathcal{H}^{d-1} \\
&= \int_{\partial B_1(0)} \langle x, g\nabla f\rangle d\mathcal{H}^{d-1} \\
&= \int_{B_1(0)} \nabla \cdot (g\nabla f) dx \\
&= \int_{B_1(0)} \nabla f \cdot \nabla g dx \\
&= m_2 \int_{\S^{d-1}} fg d\mathcal{H}^{d-1}.
\end{aligned}$$

hence $\int_{\S^{d-1}} fg d\mathcal{H}^{d-1} = 0$. □

Interpretation: $-\Delta_{\mathbb{S}}$ hat die Eigenwerte

$$m(m+d-2) = (m+\frac{d-2}{2})^2 - (\frac{d-2}{2})^2$$

Wir definieren auf P_m^d ein Skalarprodukt durch

$$\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ \alpha! & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$T : P_m^d \to P_{m+2}^d, \quad T(p) = |x|^2 p(x)$$

und

$$\Delta : P_{m+2}^d \to P_m^d$$

Lemma 2.55.

$$\langle Tp, q \rangle = \langle p, \Delta q \rangle$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für Monome zu verifizieren. Seien α ein Multiindex. Da

$$Tx^\alpha = \sum_{j=1}^d x_j^2 x^\alpha$$

und

$$\langle Tx^\alpha, x_j^2 x^\alpha \rangle = \langle x_j^2 x^\alpha, x_j^2 x^\alpha \rangle = (\alpha_j+2)(\alpha_j+1)\langle x^\alpha, x^\alpha \rangle = \langle x^\alpha, \Delta x^{\alpha+2e_j} \rangle.$$

□

Satz 2.56. *Die Teilräume H_{m+2}^d und TP_m^d sind orthogonal in P_{m+2}^d. Sie spannen P_{m+2}^d auf.*

Beweis. Orthogonalität folgt aus Lemma 3.1. Sei jetzt $w \in P_{m+2}^d$ orthogonal zu TP_m^d. Dann ist wieder mit Lemma 3.1 $\Delta w = 0$. □

07.05.2019

Korollar 2.57. *Die Dimension H_m^d ist $\binom{m+d-1}{d-1} - \binom{m+d-3}{d-1}$.*

- $d = 2$: $\binom{m+1}{1} - \binom{m-1}{1} = m+1-(m-1) = 2$,

  $$(\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^m, \mathrm{Im}(x_1+ix_2)^m)$$

  ist eine Basis.

- $d=3$: $\binom{m+2}{2}-\binom{m}{2}=\frac{1}{2}((m+2)(m+1)-m(m-1))=2m+1$. Eine Basis für $m=0$ ist 1, für $m=1$ ist (x_1,x_2,x_3) und für $m=3$

  $$x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1^2-x_2^2, x_1^2-x_3^2$$

  bzw

  $$\operatorname{Re}(x_1+ix_2)^3, \operatorname{Im}(x_1+ix_2)^3, \operatorname{Re}(x_1+ix_2)^2x_3, \operatorname{Im}(x_1+ix_2)^2x_3, \operatorname{Re}(x_1+ix_2)(3x_3^2-(x_1^2+x_2^2)),$$

  $$\operatorname{Im}(x_1+ix_2)(3x_3^2-(x_1^2+x_2^2), 5x_3^3-3(x_1^2+x_2^2)x_3$$

Satz 2.58. *Die harmonischen Polynome sind dicht in $L^p(\mathbb{S})$ für $1\le p<\infty$*

Beweis. Aus der Analysis III wissen wir, dass stetige Funktionen in $L^p(\mathbb{S}^{d-1})$ dicht sind. Sei $f\in C(\mathbb{S}^{d-1})$. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass existieren Polynome, die in $\mathbb{S}^{d-1}$ gleichmässig gegen f konvergieren, und damit auch in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 3.1 können wir jedes Polynom in P_m^d auf $\mathbb{S}$ als Summe homogenen harmonischer Polynome schreiben ($|x|=1$). Daraus folgt die Aussage. □

2.6.3 Orthonormalbasen in H_m^d

Die Vektorräume H_M^d versehen wir mit dem Skalarprodukt von $L^2(\mathbb{S})$. In jedem Raum können wir eine Orthonormalbasis wählen und erhalten eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{S}^{d-1},\mathcal{H}^{d-1})$.

Die Einschränkung der harmonischen homogenen Polynome auf die Sphäre werden Kugelflächenfunktionen genannt.

Wir beschränken uns auf den Fall $d=2,3$.

2.6.4 Der Fall $d=2$

Eine Orthonormalbasis in H_m^d ist durch (mit $w=x_1+ix_2$)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{Re} w^m, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{Im} w^m.$$

Wenn wir $\mathbb{S}^1$ mit $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ parametrisieren, dann hat die Basis die Form

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(m\alpha), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(m\alpha)$$

für $m\ge 1$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ für $m=0$ gegeben.

2.6.5 Der Fall $d = 3$ und $m \geq 1$.

Wir machen den Ansatz

$$(\operatorname{Re} w^m, \operatorname{Im} w^m, \operatorname{Re}(w^{m-1})p_m^{m-1}(t), \operatorname{Re}(w^{m-2})p_m^{m-2}(t), \dots p_m(t)) \qquad (2.195)$$

mit Funktionen p_m^n für eine Basis. Wir berechen mit Hilfe von 2.192

$$p_m^n(t) = Q_m^n(\theta)$$

$$\partial_\theta^2 Q_m^n + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta Q_m^n + \Big(m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\Big)Q_m^n = 0$$

und daher mit $t = \cos(\theta)$,

$$\partial_\theta Q_m^n = -\sin(\theta)\partial_t p_m^n, \quad \partial_\theta^2 Q_m^n = (1-t^2)\partial_t^2 p_m^n - t\partial_t p_m^n$$

and

$$(1-t^2)(p_m^n)'' - 2t(p_m^n)' + \Big(m(m+1) - \frac{n^2}{1-t^2}\Big)p_m^n = 0 \qquad (2.196)$$

Die Gleichung mit $n = 0$,

$$\frac{d}{dt}\{(1-t^2)p_m'(t)\} + m(m+1)p_m(t) = 0 \qquad (2.197)$$

heißt Legendredifferentialgleichung.

Lemma 2.59. *Die Legendrepolynome*

$$p_m(t) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dt^m}[(t^2-1)^m]$$

lösen die Legendredifferentialgleichung. Sie genügen $p_m(1) = 1$.

Beweis. Die Fall $m = 0$ ist trivial. Wir schreiben die Legendredifferentialgleichung als

$$(x^2-1)p_m' = m(m+1)\int_1^t p_m(s)ds$$

und verifizieren mit $f_m = (t^2-1)^m$

$$(t^2-1)f_m^{(m+1)} = m(m+1)f_m^{(m-1)}$$

Dazu beobachten wir

$$(t^2-1)f_m' = 2tmf_m$$

was wir m mal differenzieren.

$$(t^2-1)f_m^{(m+1)} + 2mtf^{(m)} + \binom{m}{2}f_m^{(m-1)} = 2tmf_m^{(m)} + 2m^2 f_m^{(m-1)}.$$

∎

Wir machen den Ansatz mit der sogenannten erzeugenden Funktion

$$F(t,u) = \frac{1}{\sqrt{1-2tu+u^2}}$$

und verifizieren

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big((1-t^2)\partial_t F(t,u)\Big) + u\partial_u^2(uF(t,u)) \\
&\quad = \partial_t\Big(\frac{(1-t^2)u}{(1-2tu+u^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) + u\partial_u\Big(\frac{1-tu}{(1-2tu+u^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) \\
&\quad = \frac{3(1-t^2)u^2 - 2tu(1-2tu+u^2)}{(1-2tu+u^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(1-tu)(tu-u^2) - tu(1-2tu+u^2)}{(1-2tu+u^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad = 3\frac{(1-t^2)u^2 - tu(1-2tu+u^2) + (1-tu)(tu-u^2)}{(1-2tu+u^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Dann ist

$$F(t,u) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{p}_m(t)u^m$$

und $\tilde{p}_m$ löst die Legendredifferentialgleichung. Da

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n, \qquad \frac{1}{1+r} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n$$

gilt $\tilde{p}_m(1) = 1$.

Lemma 2.60.

$$p_m(t) = \tilde{p}_m(t)$$

Beweis. Mit Hilfe der Wronskideterminante kann man sehen, dass es keine zweite linear unabhängige Lösung in einer Umgebung von ± 1 gibt: Seien f und g Lösungen der Legendredifferentialgelichung und $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$. Dann ist

$$W'(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t) = \frac{2t}{1-t^2}W(t)$$

und

$$W(t) = c\exp(-\int_0^t \frac{2\tau}{(\tau+1)(\tau-1)}d\tau)$$

wobei

$$\int_0^t \frac{2\tau}{(\tau+1)(\tau-1)}d\tau = \int_0^t \frac{1}{\tau+1} + \frac{1}{\tau-1}d\tau = \ln(1+t) + \ln(1-t)$$

und

$$W(t) = c\frac{1}{1-t^2}.$$

Ist $f = P_m$ (und g linear unabhängig, also $c \neq 0$) so erhalten wir

$$g' = \frac{p_m'}{p_m} g + c\frac{1}{p_m(1-t^2)}.$$

Da $p_m'(1) \neq 0$ kann g nur das triviale Polynom sein. Also ist $\tilde{p}_m$ ein Vielfaches von p_m. Die Werte in $t = 1$ stimmen überein. □

Lemma 2.61. *Die zugeordneten Legendrefunktionen*

$$p_m^n = (-1)^n (1-t^2)^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} p_m$$

sind Lösungen von (2.196)*.*

Wir erhalten Polynome für die Kugelflächenfunktionen.

Beweis. Aufwendige Rechnung. □

Satz 2.62. *Sei $n \geq 0$. Die Funktionen*

$$u_{m,n}(t) = \sqrt{\frac{2m+1}{2}\frac{(m-n)!}{(m+n)!}} P_m^n(t)$$

für $0 \leq n \leq m$ bilden eine vollständige Orthonormalbasis von $L^2((0,1))$.

Beweis. Da Polynome dicht in $L^2((-1,1))$ sind und der Grad von $u_{m,n}$ für n gerade $m-n$ ist bilden diese Polynome eine Basis für alle Polynome. Ist n ungerade, so müssen wir die Argumentation leicht ändern und bezüglich $(1-t^2)dm$ integrieren.

Sie sind orthogonal, aufgrund von Lemma 3.1. Die Aussage folgt aus

$$\int_{-1}^{1} (p_m^n(t))^2 dt = \frac{2}{2m+1}\frac{(m+n)!}{(m-n)!} \tag{2.198}$$

Wir zeigen zunächst

$$\int_{-1}^{1} p_n p_m dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n dt = \int_{-1}^{1} ((t^2-1)^m)^{(m+n)}(1-t^2)^n dt$$

was Null ist, falls $n > m$ und $2^{2n}(2n)!\int_1^1(1-t^2)^n dt$ für $n = m$.

$$
\begin{aligned}
I_n =& \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = (n-1)\int_{-1}^{1} 2t(1-t^2)^{n-2}(t-\frac{1}{3}t^3)dt \\
=& \frac{2(n-1)}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt - \frac{4(n-1)}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-1}dt + \frac{4(n-1)}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-2}dt \\
=& \frac{2(n-1)}{3}I_n - \frac{4(n-1)}{3}I_{n-1} - \frac{4(n-1)}{3}I_{n-2}
\end{aligned}
$$

und damit

$$0 = (2n-5)I_n - 4(n-1)I_{n-1} - 4(n-1)I_{n-2}$$

woraus sich das Integral rekursiv bestimmen läßt.

Fast genauso sieht man für $m_1 \neq m_2$

$$\int_{-1}^{1} p_{m_1}^n p_{m_2}^n dt = 0.$$

Die Auswertung von

$$\int_{-1}^{1}(p_m^n)^2 dt$$

ist mühsam und wird nicht durchgeführt.

□

10.05.2019

Lemma 2.63. *Je zwei Funktionen in* (2.195) *sind orthogonal in* $L^2(\mathbb{S})$.

Beweis. Wir parametrisieren $\mathbb{S}^2$ bis auf eine Nullmenge durch

$$(-1,1)\times(0,2\pi) \ni (t,\phi) \to \psi(t,\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2}\cos\phi \\ \sqrt{1-t^2}\sin\phi \\ t \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$D\psi = \begin{pmatrix} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\cos\phi & -\sqrt{1-t^2}\sin\phi \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\sin\phi & \sqrt{1-t^2}\cos\phi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$D\psi^T D\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & 0 \\ 0 & \\ 1-t^2 & \end{pmatrix}.$$

Mit

$$f_{nm}^r = p_m^n(x_3)\operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n$$

und

$$f_{nm}^i = p_m^n(x_3)\,\mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2} f_{n_1m_1}^r f_{n_2m_2}^r d\mathcal{H}^2 &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p_{m_1}^{n_1}(t)p_{m_2}^{n_2}(t)\cos(n_1\phi)\cos(n_2\phi)d\phi dt \\ &= \int_{-1}^1 p_{m_1}^{n_1}(t)p_{m_2}^{n_2}(t)dt \int_0^{2\pi} \cos(n_1\phi)\cos(n_2\phi)d\phi dt\end{aligned}$$

Da

$$\int_0^{2\pi} \cos n_1\phi \cos n_2\phi d\phi = \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \neq n_2 \\ \pi & \text{falls} n_1 = n_2 \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n_1\phi \sin n_2\phi d\phi = \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \neq n_2 \\ \pi & \text{falls} n_1 = n_2 \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n_1\phi \sin n_2\phi d\phi = 0$$

erhalten wir nur dann etwas von Null verschiedenes wenn $n_1 = n_2$. In diesem Fall folgt die Aussage aus Lemma 2.62.

□

2.7 Holomorphe Funktionen und komplexe Differentialgleichungen

2.7.1 Wege und Zusammenhang

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Ein parametrisierter Weg in A ist eine stetige Abbildung eines Intervals I nach A. Die Bildpunkte $(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in I$ nennen wir die Bahn des Weges. Sind I, J Intervalle $\Phi : J \to I$ ein monoton wachsender Homöomorphismus, $\gamma : I \to A$ ein Weg, dann ist $\gamma \circ \phi : J \to A$ ein Weg mit $(\gamma) = (\gamma \circ \phi)$. Die Wege unterscheiden sich nur durch die Parametrisierung.

Ein Weg ist Äquivalenzklasse von parametrisierten Wegen, die sich nur durch die Parametrisierung unterscheiden.

Jeder Weg wird in einer Richtung durchlaufen. Wir bezeichnen die Richtung auch mit Orientierung.

Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to A$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2]$ Wege mit $\gamma(b_1) = \gamma(a_2)$, so können wir die Wege zu dem parametrisierten Weg

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1] \end{cases}$$

zusammensetzen.

Die Menge A heißt wegzusammenhängend, wenn es zu $x, y \in A$ einen parametrisierten Weg $\gamma : [a, b] \to A$ gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Ist $I = [a, b]$ und γ ein parametrisierter Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, so nennen wir den Weg geschlossen. Wir identifizieren geschlossene Wege mit Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen $\mathbb{S}^1 \to A$.

Wir sagen, A ist einfach zusammenhängend, wenn es zu jedem geschlossenen Weg $\gamma \in C(\mathbb{S}^1, A)$ eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma} \in C(\overline{B_1(0)})$ gibt mit $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$ für $|x| = 1$.

Lemma 2.64. *Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei A sternförmig bezgl. $x_0 \in A$ und $\gamma : \mathbb{S}^1 \to A$ ein geschlossenener Weg. Wir definieren

$$\tilde{\gamma}(y) = x_0 + |y|(\gamma(y/|y|) - x_0) \in A.$$

□

Wir nennen einen Weg k mal stetig differenzierbar, wenn es eine k mal stetig differenzierbare Parametrierung γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ gibt. Wir betrachten in diesem Fall Äquivalenzklassen, wobei ϕ dann ein monotoner wachsender C^k Diffeomorphismus ist.

Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und einfach zusammenhängend, $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ ein geschlossener Weg mit $\gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$, so existiert ein $\tilde{\gamma} \in C^1(\overline{B_1(0)})$ mit $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$ für $|x| = 1$: Da U einfach zusammenhängend ist, existiert $\tilde{\gamma}_0 \in C(\overline{B_1(0)})$. Sei $\varepsilon > 0$. Mit dem Approximationssatz von Weierstraß existiert ein Polynom $\tilde{\gamma}_1$ mit $|\tilde{\gamma}_0(x) - \tilde{\gamma}_1(x)| < \varepsilon/2$ für $|x| \leq 1$. Sei $\eta \in C^\infty$ monoton wachsend, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 1$ (Analysis III). Wir definieren für λ groß

$$\tilde{\gamma}(x) = \eta\big(1 - \lambda(1 - |x|)\big)\gamma(x/|x|) + \Big(1 - \eta(1 - \lambda(1 - |x|))\Big)\tilde{\gamma}_1(x)$$

wobei wir $x = (\cos t, \sin t)^T$ mit t identifizieren. Dann ist $\tilde{\gamma} \in C^1(\overline{B_1(0)})$, das Bild liegt in U falls δ klein ist und $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x)$ für $|x| = 1$. Eine analoge Aussage gilt für stückweise C^1 Wege. Bei der Umkehrung der Orientierung ändert sich das Vorzeichen.

Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C(U; \mathbb{R}^d)$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma \in C^1([a, b]; U)$. Dann ist das Wegintegral durch

$$\int_\gamma F d\vec{x} = \int_a^b \sum_{j=1}^d F_j(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

definiert. Dieses Integral hängt nur vom Weg und der Orientierung, aber nicht von der Parametrisierung ab. Es ist linear im Integranden und additiv unter der Zusammensetzung von Wegen.

Definition 2.65. *Ein Vektorfeld $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ heißt rotationsfrei, falls*

$$\partial_{x_j} F_k(x) = \partial_{x_k} F_j(x).$$

Satz 2.66. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, zusammenhängend und einfach zusammenhängend und $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ rotationsfrei. Dann sind Integrale über geschlossene stückweise C^1 Wege immer Null. Es existiert eine Stammfunktion $\Phi \in C^2(\Omega)$, d.h.*

$$\partial_{x_j}\Phi(x) = F_j(x).$$

Beweis. Sei $\gamma \in C^1([a,b])$ ein geschlossener Weg. Da Ω einfach zusammenhängend ist existiert $\tilde{\gamma}(x) \in C^1(\overline{B_1(0)})$ wie oben. Mit der Konstruktion ist $r\partial_r\tilde{\gamma} \in C^1(\overline{B_1(0)})$

Sei $\gamma_r(t) = \tilde{\gamma}((r\cos(t), r\sin(t))^T)$ und

$$f(r) = \int_{\gamma_r} F d\vec{x}$$

Wir differenzieren nach r, verwenden den Satz von Schwarz um die Ableitungen zu vertauschen (Wir hatten nicht angenommen, dass $(r,t) \in \gamma_r(t)$ zweimal stetig differenzierbar ist, aber $(r,t) \to r\partial_r\gamma_r$ ist stetig differenzierbar, was ausreicht), und integrieren partiell, und verwenden am Ende die Wirbelfreiheit.

$$\begin{aligned}
f'(r) =& \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^d F_j(\gamma_r(t))\partial_t\gamma_{r,j}(t)dt\\
=& \int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^d\sum_{k=1}^d(\partial_{x_k}F_j)(\gamma_{r,j}(t))\partial_r\gamma_{r,k}\partial_t\tilde{\gamma}_{r,j} + \sum_{j=1}^d F_j\partial^2_{rt}\gamma_{r,j}dt\\
=& \int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^d\sum_{k=1}^d \partial_{x_k}F_j\partial_r\gamma_{r,k}\partial_t\gamma_{r,j} - \sum_{j=1}^d(\partial_t(F_j\circ\tilde{\gamma}_r)\partial_r\gamma_{r,j}dt\\
=& \int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^d\sum_{k=1}^d \partial_{x_k}F_j\partial_r\gamma_{r,k}\partial_t\gamma_{r,j} - \sum_{j=1}^d(\partial_{x_j}F_k)\partial_t\gamma_{r,j}\partial_r\gamma_{r,k}dt\\
=& 0
\end{aligned}$$

Das gleiche Argument funktioniert für stückweise stetig differenzierbare Wege.

Die erste Aussage folgt mit $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} F d\vec{x} = 0$:

$$\left|\int_{\gamma_r} F d\vec{x}\right| = \sup_{0\le t\le 2\pi}|F(\gamma_r(t))|\int_0^{2\pi}|\partial_t\gamma_r(t)|dt$$

und

$$\partial_t\gamma_r(t) = \partial_t\tilde{\gamma}(r(\cos t, \sin t)^T) = rD\tilde{\gamma}(\gamma_r(t))\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \to 0 \quad \text{für } r \to 0$$

gleichmässig in t.

Wir fixieren x_0. Für alle $x \in \Omega$ existiert $\gamma \in C^1([0,1];\Omega)$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$. Wir definieren

$$\Phi(x) = \int_\gamma F d\vec{x}$$

Ist $\gamma_1 \in C^1([0,1];\Omega)$ ein zweiter Weg von x_0 nach x, so ist

$$\gamma_2(t)) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [0,1] \\ \gamma_1(2-t) & t \in (1,2] \end{cases}$$

ist dann ein geschlossener stückweise C^1 Weg. Damit ist

$$0 = \int_{\gamma_2} F d\vec{x} = \int_\gamma F d\vec{x} - \int_{\gamma_2} F d\vec{x}.$$

Sei $1 \le j \le d$. Wir wählen einen Weg, der zuletzt in Richtung der j Achse mit Geschwindigkeit 1 verläuft. Dann ist mit dem Hauptsatz

$$\partial_{x_j} \Phi(x) = F_j(x).$$

□

Korollar 2.67. $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *ist nicht einfach zusammenhängend.*

Beweis. Das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} -x_2/|x|^2 \\ x_1/|x|^2 \end{pmatrix}.$$

ist wirbelfrei (Rechnung). Sei $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Das ist ein geschlossener Weg. Dann ist

$$\int_\gamma F d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = 2\pi \neq 0$$

Wäre $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ einfach zusammenhängend, so müßte dieses Integral verschwinden.

□

14.05.2019

2.7.2 Holomorphe Funktionen

Wir beginnen mit

Satz 2.68. *Stetig differenzierbare holomorphe Funktionen sind analytisch.*

Beweis. Ist f zweimal stetig differenzierbar und holomorph, so sind Real- und Imaginarteil harmonisch, und damit analytisch. Ist f nur einmal stetig differenzierbar, so glätten wir mit einer Diracschar. Die geglätteten Funktionen sind holomorph und zweimal stetig differenzierbar, und daher sind Real- und Imaginärteilt harmonisch und analytisch. Auf kompakten Mengen ist die konvergenz gegen f gleichmässsig. Gleichmässige Limiten harmonischer Funktionen sind glatt und harmonisch. □

Satz 2.69. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(U)$ sei harmonisch. Dann ist $f = \partial_{x_1} u - i\partial_{x_2} u$ holomorph.*

Beweis. Wir überprüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_{x_1}^2 u = -\partial_{x_2}^2 u$$

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} u = -\partial_{x_1}(-\partial_{x_2} u)$$

□

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ holomorph. Dann ist $F(x_1, x_2) = (\operatorname{Re} f(x_1 + ix_2), -\operatorname{Im} f(x_1, ix_2))^T$ wirbelfrei:

$$\partial_{x_2} F_1 = \partial_{x_1} F_2$$

aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Ist U zusätzlich einfach zusammenhängend, so existiert Φ_1 mit

$$\partial_{x_1}\Phi_1 = \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2), \partial_{x_2}\Phi_1 = -\operatorname{Im} f(x_1 + ix_2).$$

Genauso existiert Φ_2 mit $\partial_{x_1}\Phi_2 = \operatorname{Im} f(x_1+ix_2)$ und $\partial_{x_2}\Phi_2 = \operatorname{Re} f(x_1+ix_2)$. Es folgt

$$\partial_{x_1}\Phi_1 = \partial_{x_2}\Phi_2, \partial_{x_2}\Phi_1 = -\partial_{x_1}\Phi_2$$

und $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und es ist holomorph. Dann ist

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f & -\operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} f & \operatorname{Re} f \end{pmatrix}$$

und $\Phi' = f$. Wir erhalten

Satz 2.70. *Jede stetig differenzierbare holomorphe Funktion auf einer einfach zusammenhängenden Mengen besitzt eine Stammfunktion.*

Lemma 2.71. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $u \in C^2(U)$ harmonisch. Dann existiert eine harmonische Funktion v so dass $u + iv$ holomorph ist. v ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. v heißt konfugiert harmonische Funktion.*

Beweis. Wir suchen v mit

$$\partial_{x_1} v = -\partial_{x_2} u, \partial_{x_2} v = \partial_{x_1} u,$$

der Gradient der gesuchten Funktion v ist ein wirbelfreies Vektorfeld. v ist bis auf eine reelle Konstante eindeutig bestimmt. Sei $w = u + iv$. Wir wollen zeigen, dass w die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Das gilt aber aufgrund der Definition. □

Lemma 2.72. *Ist u harmonisch und f holomorph, so ist $u \circ f$ harmonisch.*

Beweis. Sei v die konjugiert harmonische Funktion. Dann ist $(u + iv) \circ f$ holomorph und der Realteil harmonisch. □

Satz 2.73. *Gleichmässige Limiten holomorpher Funktionen sind holomorph.*

Beweis. Es sei f_n eine gleichmässig konvergente Folge holomorpher Funktionen. Nach Satz 2.13 sind die Limiten von Realteil und Imaginärteil wieder harmonisch, die Ableitungen konvergieren und damit erfüllt der Limes die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. □

Definition 2.74. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, einfach zusammenhängend beschränkt mit C^1 Rand. Dann definiert ∂U einen positiv orientierten geschlossenen C^1 Weg, für den U stets links liegt, den wir mit ∂U bezeichnen.*

Bemerkung 2.75. *Wir dürfen annehmen, dass der Rand lokal durch $\gamma(t)$ mit $\gamma'(t) \neq 0$ parametrisiert wird (Analysis II). Dann definiert $\gamma'(t)$ einen Tangentialvektor von ∂U in $\gamma(t)$. Wir sagen, γ ist positiv orientiert, wenn $i\gamma'(t)$ nach innen zeigt, d.h. wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\gamma(t) + is\gamma'(t) \in U$ für $0 < s < \varepsilon$. Details in komplexer Analysis und Einführung in Geometrie und Topologie.*

Definition 2.76. *Wir definieren das komplexe Wegintegral mit*

$$\int_\gamma f dz = \int_a^b f\gamma'(t)dt$$

für holomorphe Funktionen f. Ist $U \subset \mathbb{C}$ beschränkt, zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so identifizieren wir ∂U mit dem oben beschriebenen Weg.

Offensichtlich gilt

$$\operatorname{Re} \int_\gamma f dz = \int_a^b (\operatorname{Re} f \gamma_1' - \operatorname{Im} f \gamma_2' f)dt = \int_\gamma F d\vec{x}$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f \\ -\operatorname{Im} f \end{pmatrix}$$

Ist γ injektiv und $\gamma' \neq 0$ so gilt

$$\int_a^b (F_1\gamma_1' + F_2\gamma_2')dt = \int_a^b \langle G, n\rangle |\gamma'| dt = \int_\gamma \langle G, n\rangle d\mathcal{H}^1$$

wobei

$$n = |\gamma'|^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_2' \\ -\gamma_1' \end{pmatrix}$$

and

$$G = \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}.$$

Ist f holomorph und $F = \big(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\big)$, so ist G wirbelfrei aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Satz 2.77 (Cauchysche Integralformel)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und einfach zusammenhängend, , $f \in C^1(\overline{U}; \mathbb{C})$ holomorph in U, $z_0 \in U$. Dann ist*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Beweis. Wir betrachten $U_r = U \backslash \overline{B_r(z_0)}$, r klein. Mit dem Satz von Gauss und den obigen Bemerkungen erhalten wir

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Der erste Term geht gegen Null mit $r \to 0$, und der zweite ergibt $2\pi i f(z_0)$. □

2.7.3 Holomorphe Differentialgleichungen

Eine Abbildung $\Omega \to \mathbb{C}^N$ heißt holomorph, wenn jede Komponente holomorph ist. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, so nennen wir $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C}^N)$ holomorph, wenn die Ableitung Df eine komplexe lineare Abbildung definiert.

Sei $U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, $(t_0, z_0) \in U$ und $F \in C^1(U; \mathbb{C}^N)$. Wir betrachten das Anfangwertproblem

$$\frac{d}{dt} z = F(t, z); z(t_0) = z_0.$$

Wir lösen die Gleichung iterative: Wir bilden $\tilde{z} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}^N$ holomorph mit $\tilde{z}(t_0) = z_0$ auf z ab, wobei z die Stammfunktion von $f(t, \tilde{z})$ auf $B_r(t_0)$ ist mit $f(t_0) = z_0$. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wollen wir in

$$X = \{z : B_r(t_0) \to \mathbb{C}^N \text{ holomorph }; \sup |z(t)| \leq R\}$$

mit der Supremumsnorm lösen. Der Raum X ist ein komplexer Vektorraum mit der Supremumsnorm. Da gleichmässige Limiten holomorpher Funktionen wieder holomorph sind ist X ein Banachraum. Mit den gleichen Argumenten wie bei reellen Differentialgleichungen erhalten wir eine lokale Lösung.

Satz 2.78. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$ holomorph und $t_0 \in \Omega$ und $u_0 \in \mathbb{C}^d$. Dann existiert $r > 0$ und genau ein $z \in C^1(B_r(z_0); \mathbb{C}^d)$ so dass*

$$\frac{d}{dt} z = F(t, z(t)), \qquad z(t_0) = z_0.$$

(Analysis 2, Kapitel 14)

17.05.2019

Ist $\gamma \in C^1((a,b); U)$ so erhalten wir für jede Lösung der obigen Differentialgleichung mit $x(s) = z(\gamma(s))$ die gewöhnliche reelle Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} x = \gamma'(s)(\frac{d}{dt} z)(\gamma(s)) = \gamma'(s) F(\gamma(s), x(s)).$$

Diese hat immer eine lokale Lösung, die mit der Lösung der komplexen Differentialgleichung kompatibel sein muss.

Satz 2.79. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $A \in C^1(U, \mathbb{C}^{d\times d})$ eine holomorphe Abbildung in die komplexen $d \times d$ Matrizen, $t_0 \in U$ und $z_0 \in \mathbb{C}^d$. Dann existiert genau eine holomorphe Abbildung $z \in C^1(U; \mathbb{C}^d)$, die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{z} = A(t) z, z(t_0) = z_0$$

ist.

Beweis. Wir betrachten wieder die Abbildung der Picarditeration, die die holomorphe Funktion z auf $J(z) = \tilde{z}$, die Stammfunktion von $A(t)z(t)$ mit $\tilde{z}(t_0) = z_0$ abbildet. Diese existiert da U einfach zusammenhängend ist. Für Jeden C^1 Weg erhalten wir eine reelle lineare Differentialgleichung (mit der Identifkation $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}$, die immer eine Lösung auf der ganzen Definitionsmenge hat. Die Iteration

$$z_{n+1} = J(z_n), z_0(t) = z_0$$

konvergiert auf jedem Weg (nach Analysis II) und zwar gleichmässig auf kompakten Teilmengen (siehe die Abschätzungen in Analysis II) gegen eine Lösung.

Diese ist auf allen Wegen eindeutig, also überhaupt eindeutig. □

Der Lösungraum ohne Anfangswert ist ein komplexer Vektorraum der Dimension d. Eine Basis heißt Fundamentalsystem.

Beispiele:

(i) $d = 1$, U einfach zusammenhängend

$$\frac{d}{dt} z = a(t) z, z(t_0) = z_0$$

Sei A eine Stammfunktion von a. Dann ist

$$z(t) = \exp(A(t) - A(0)) z_0$$

die eindeutige holomorphe Lösung.

(ii) Sei jetzt A eine feste $d \times d$ Matrix. Wir betrachten

$$\frac{d}{dt} z = Az, \qquad z(t_0) = z_0$$

Dann ist

$$\exp((t - t_0)A)z_0$$

die Lösung:

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n = A\exp(tA)$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\exp((t - t_0)A)z_0 = A\exp((t - t_0)A)z_0.$$

(iii) Sei A wieder eine feste Matrix, $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Wir betrachten

$$\frac{d}{dt} z = \frac{1}{t} A(t) z$$

Die Menge ist nicht einfach zusammenhängend. Sei $U' = \mathbb{C}\backslash\{-\tau : \tau \geq 0\}$. Dort existiert ein Logarithmus. Wir schreiben $s = \ln t$. Dann ist $z(t)$ genau dann eine Lösung, wenn

$$\frac{d}{ds} z(t(s)) = (\frac{d}{dt} z)(s(t))\frac{dt}{ds} = t(\frac{1}{t} Az(s(t)) = Az(s(t))$$

und die Lösung ist

$$\exp(\ln(t/t_0)A)z_0$$

Wir definieren die Matrizwerttige holomorphe Abbildung

$$t^A := \exp(\ln tA)$$

Sei nun

$$\dot{z} = (\frac{1}{t - t_0} A_{-1} + A(t))z \tag{2.199}$$

Satz 2.80 (Bolibruch, 1990)**.** *Sei U eine einfach zusammenhängende Teilmenge von $\Omega\backslash\{t_0\}$. Dann existieren eine nilpotente Matrix N und eine matrixwertige holomorphe Abbildung $S : U \to \{d \times d$ Matrizen so dass für alle $t_1 \in U$ und $z_0 \in \mathbb{C}^d$.*

$$z(t) = S(t)(t - t_0)^{A_{-1}}(t - t_0)^N z_0$$

dem Anfangswertproblem $z(t_0) = z_0$ und (2.199) genügt.

Ohne Beweis.

t_0 heißt *regulärer singulärer* oder *Fuchsscher* Punkt. Unendlich heißt regulärer Punkt, falls die Gleichung in $s = t^{-1}$ 0 als regulären Punkt hat, und Fuchsscher Punkt, wenn nach der Transformation 0 ein Fuchsscher Punkt ist.

Beispiele:

(i) Die hypergeometrische Differentialgleichung für $a, b, c \in \mathbb{C}$:

$$t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}z + [c - (a+b+1)t]\frac{d}{dt}z + abz = 0$$

in $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Wir können sie als 2×2 System schreiben: Sei

$$\zeta = \begin{pmatrix} z \\ tz' \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\zeta' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ -\frac{ab}{1-t} & \frac{1}{t} - \frac{c}{t(1-t)} + \frac{a+b+1}{1-t} \end{pmatrix} \zeta.$$

und 0 ist ein Fuchsscher Punkt. Das gleiche gilt für $t = 1$. Sei jetzt

$$\zeta(s) = s^\alpha z(s^{-1})$$

für ein geeignetes α. Dann ist

$$s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}\zeta + [c' - (a' + b' + 1)s]\frac{d}{ds}\zeta + ab\zeta = 0$$

für geeignete a', b', c' und ∞ ist ein Fuchsschen Punkt.

(ii) Legendredifferentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt}z - m(m+1)z = 0$$

$t = 0, 1, \infty$ sind singuläre Punkte. Die Legendrediffferentialgleichung läßt sich als hypergeometrische Differentialgleichung schreiben.

(iii) Besseldifferentialgleichung

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}z + t\frac{d}{dt}z + (t^2 - \nu^2)z = 0$$

Singuläre Punkte: 0, ∞. ∞ ist weder regulär noch Fuchsscher Punkt.

(iv) Die Airy Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}z - tz = 0$$

Hier ist ∞ werde regulär noch Fuchsscher Punkt.

3 Die Fouriertransformation

3.1 Die Fouriertransformation in $L^1(\mathbb{R}^d)$

Die Fouriertrnasformation zerlegt Funktionen in ihre Frequenzbestandteile. Sie macht aus Differentialoperatoren Multiplikation und erlaubt es, viele Differentialgleichungen zu lösen.

Definition 3.1. *Für eine integrierbare Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ definieren wir die Fouriertransformierte*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \xi \in \mathbb{R}^d$$

und

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot\xi} dx, \xi \in \mathbb{R}^d$$

Eigenschaften:

(1)
$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

(2) Die Fouriertransformation ist linear.

(3) Ist f integrierbar, so ist $\mathcal{F} \in C_0(\mathbb{R}^d)$, dem Raum der stetigen Funktionen, die für $\xi \to \infty$ gegen Null gehen.

(4) Mit $\tau_h f(x) := f(x+h)$ gilt $\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi) = e^{ih\xi}\mathcal{F}f(\xi)$ und $\mathcal{F}(e^{ix\eta}f)(\xi) = \tau_{-\eta}\mathcal{F}f$

(5) Mit $m_a f(x) = f(ax)$ gilt $\mathcal{F}(m_a f)(x) = a^{-d}\mathcal{F}f(\xi/a)$.

(6) Für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ gilt
$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = i\xi_j \mathcal{F}f(\xi).$$

(7) Für $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ gilt
$$\mathcal{F}(x_j f)(\xi) = i\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

(8) $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2}\hat{f}\hat{g}$.

(9) Unter geeigneten Voraussetzungen gilt
$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = (2\pi)^{-d/2}\hat{f} * \hat{g}$$

(10) $\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}|x|^2})(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$

(11) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int f\hat{g}dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x)g(\xi)e^{-ix\xi}dxd\xi = \int \hat{f}gd\xi. \tag{3.1}$$

(12) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ so ist

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

Beweis: Mit obigen Aussagen gilt

$$\mathcal{F}\Big(a^d e^{-\frac{a^2}{2}|x|^2}\Big)(\xi) = e^{-\frac{1}{2a^2}|\xi|^2}$$

und (da $(2\pi)^{d/2}a^d e^{-\frac{a^2}{2}|x|^2}$ eine Diracschar mit $a \to \infty$ ist)

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \lim_{a\to\infty} f * \big(a^d e^{-\frac{|a|^2}{2}|.|^2}\big)(x)$$

für jeden Lebesguepunkt x von f unter der Annahme, dass der Wert an diesem Punkt mit dem Limes der Mittelwerte übereinstimmt (wir hatten Lebesguepunkte für die Äquivalenzklasse definiert und gesehen, dass es einen Vertreter mit dieser Eigenschaft gibt) und

$$\int f(x)(2\pi)^{d/2}a^d e^{-\frac{a^2}{2}|x|^2}dx = \int \hat{f}(x)(2\pi)^{d/2}e^{-\frac{2}{a^2}|x|^2}dx$$

Wir betrachten den Limes $a \to \infty$. Die linke Seite konvergiert gegen $f(x)$ und die rechte gegen

$$\int \hat{f}(\xi)d\xi = \check{\hat{f}}(0).$$

Wir wenden diese Rechnung auf $\tau_h f$ an und erhalten

$$f(h) = \int \hat{f}(\xi)e^{ih\xi}d\xi = \check{\hat{f}}(h).$$

(13) Für $f \in L^1$ mit $\hat{f} \in L^1$ gilt

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Beweis: Man sieht leicht:

$$\hat{\bar{f}} = \overline{\check{f}}$$

also unter Verwendung der Inversion für die erste und (3.1) für die letzte Gleichung

$$\int f\bar{f}dx = \int f\overline{\mathcal{F}^{-1}\hat{f}}dx = \int f\hat{\bar{\hat{f}}}dx = \int \hat{f}\bar{\hat{f}}dx$$

Mit einer leichten Modifikation sehen wir für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\int f\bar{g}dx = \int \hat{f}\bar{\hat{g}}d\xi.$$

21.05.2019
Beispiele.

(1) Sei $a > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0 \\ e^{at} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-at-ix\xi} dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{a - i\xi}$$

Die Fouriertransformierte definiert eine holomorphe Funktion in der unteren Halbebene. Das gleiche Argument funktioniert für $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$.

(2) $f(t) = (1+t^2)^{-1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i}\right)$. Sei $\xi > 0$. Mit dem Cauchyschen Integralsatz gilt für $R > 1$ und den durch $U = B_R(0) \cap \{x+iy : y < 0\}$ definierten Weg

$$\frac{i}{2} e^{-\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} e^{-iz\xi} \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right) dz.$$

Da

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} e^{-ix\xi} dx \to (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-ix\xi} dx$$

und mit

$$\gamma(t) = R \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} e^{-iz\xi} dz \to 0$$

folgt mit dem gleichen Argument für $\xi > 0$ und Integration über den oberen Halbkreis

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(\xi) = -\sqrt{\pi/2}\, e^{-|\xi|}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-|x|}) &= (2\pi)^{-1/2} \Big(\int_{-\infty}^{0} e^{x-ix\xi} dx + \int_0^\infty e^{-x-ix\xi} dx \Big) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \Big(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{i\xi+1} \Big) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{2}{\xi^2+1} \end{aligned}$$

(4) Sei A eine positiv definite reelle $d\times d$ Matrix und B positiv definit mit $B^2=A$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^TAx})(\xi) =&(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}|Bx|^2}e^{-ix\cdot\xi}dx\\ =&(2\pi)^{-d/2}(\det B)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}|y|^2-iy\cdot(B^{-1}\xi)}dy\\ =&(2\pi)^{-d/2}(\det A)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}|B^{-1}\xi|^2}\\ =&(2\pi)^{-d/2}(\det A)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\xi^TA^{-1}\xi}\end{aligned}$$

(5) Sei jetzt A eine positiv definite $d\times d$ Matrix und C eine symmetrische Matrix. Dann ist

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}(x^TAx+ix^TCx)}$$

wieder integrierbar. Mit der Rechnung wie oben erhalten wir

$$\hat f(\xi)=(\det A)^{-1/2}\mathcal{F}\Big(e^{-\frac{1}{2}|x|^2-ix^TB^{-T}CB^{-1}x}\Big)(\xi)$$

Wir schreiben $C'=B^{-T}CB^{-1}$. Diese Matrix ist symmetrisch, also durch eine orthogonale Matrix diagonlisierbar. Nach einer orthogonalen Transformation dürfen wir also annehmen, dass C' diagonal ist. Mit Fubini reduziert sich die Berechnen auf den Fall $d=1$. Wir berechnen (die letzte Identität mit dem Hauptsatz und der Definition des uneigentlichen Integrals)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\sqrt{1+i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(1+i\tau)x^2}dx\right]\\ &\qquad=\frac{i}{2\sqrt{1+i\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-(1+i\tau)|x|^2\right)e^{-\frac{1}{2}(1+i\tau)x^2}dx\\ &\qquad=-\frac{1}{2\sqrt{1+i\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x(xe^{-\frac{1}{2}(1+i\tau)x^2})dx\\ &\qquad=0\end{aligned}$$

Die Auswertung in $\tau=0$ ist $\sqrt{2\pi}$, also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(1+i\tau)x^2}dx=\sqrt{2\pi(1+i\tau)}.$$

Wie bei der Fouriertransformation von $e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ erhalten wir daraus

$$\mathcal{F}(\exp(-\frac{1}{2}(1+i\tau)x^2))(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1+i\tau)}}e^{\frac{1}{2(1+i\tau)}\xi^2}.$$

Insgesamt ist

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{\det(A+iC)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T(A+iC)^{-1}\xi}$$

wobei die Wurzel der Determinanten als das Produkt der Wurzeln der Eigenwerte verstanden werden muß, was nicht immer mit der Wurzel des Produktes der Eigenwerte ist.

3.2 Schwartzfunktionen

Erinnerung:

- $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ sind die beliebig oft differenzierbaren Funktionen,
- $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ die mit kompaktem Träger und
- C^∞_b die Funktionen, die mit allen Ableitungen beschränkt sind.

Definition 3.2. *Ein Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist eine* Schwartzfunktion*, falls für alle Multiindizes α, β ein $c_{\alpha,\beta}$ existiert mit*

$$|x^\alpha \partial^\beta f| \leq c_{\alpha\beta}.$$

Die Schwartzfunktionen bilden einen Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Sei $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wir sagen, $f_n \to f$ als Schwartzfunktionen, wenn für alle α, β

$$x^\alpha \partial^\beta f_n \to x^\alpha \partial^\beta f \qquad \textit{gleichmässig in } \mathbb{R}^d.$$

Seien C^∞_P die beliebig oft differenzierbaren Funktionen, für die für jeden Multiindex α c_α and N_α existieren, so dass

$$|\partial^\alpha f| \leq c_\alpha (1+|x|^2)^{N_\alpha}.$$

Jedes Polynom ist in C^∞_P.

Lemma 3.3. *Schwartzfunktionen sind integrierbar. Ist f ein Schwartzfunktion, α und β Multiindizes, so ist auch $x^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\partial^\alpha x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ist zusätzlich $g \in C^\infty_P(\mathbb{R}^d)$,so ist $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Aus $f_n \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ folgt $f_n g \to fg$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ist $(1+|x|^2)^N g \in L^1$ für alle N so ist auch $f * g \in \mathcal{S}$ und $f_n * g \to fg$ für $f_n \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Ist f eine Schwartzfunktion, so ist

$$\sup_x |(1+|x|^2)^d f(x)| =: C < \infty.$$

f ist stetig und daher messbar und

$$\int |f| dx \leq C \int (1+|x|^2)^{-d} dx < \infty.$$

Ist $f \in \mathcal{S}$ so auch $\partial_{x_j} f$ und damit $\partial^\beta f$, damit auch $x_k \partial^\beta f$ und $x^\alpha \partial^\beta f$.

Sei jetzt $g \in C_P^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $|g| \le C_0(1+|x|^2)^{N_0}$ und

$$|fg| \le C_0 \sup(1+|x|^2)^{N_0}|f| \le C_0 C_N.$$

Aus $g \in C_P^\infty$ folgt $x^\beta \partial^\alpha g \in C_P^\infty$ und daher auch

$$\partial_{x_j}(fg) = (\partial_{x_j} f)g + f(\partial_{x_j} g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

und damit auch $\sup |\partial^\alpha (fg)| < \infty$ und

$$\sup_x |x^\beta \partial^\alpha (fg)| < \infty$$

und damit $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Die Konvergenzaussage folgt direkt.

Ist $g \in L^1$ so ist $f * g \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und mit $\partial^\alpha (f*g) = (\partial^\alpha f) * g$ ist auch $f * g \in C_b^\infty$. Da

$$x_j(f*g) = (x_j f) * g + f * (x_j g)$$

folgt $f * g \in \mathcal{S}$. Die Konvergenzaussage folgt wieder direkt. □

24.05.2019

Lemma 3.4. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $a > 0$ und $g_a(x) = \exp(-\frac{a^2}{2}|x|^2)$. Dann gilt*

$$(2\pi)^{-d/2} a^d f * g_a \to f \qquad \text{für } a \to \infty$$

$$f g_a \to f \qquad \text{für } a \to 0$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Für jede gleichmässig stetige Funktion f gilt

$$(2\pi)^{-d/2} a^d f * g_a \to f \qquad \text{für } a \to \infty$$

gleichmässig in x. Jede Schwartzfunktion hat beschränkte Ableitungen und ist daher gleichmässig stetig. Da

$$\partial^\alpha (f * g_s) = (\partial^\alpha f) * g_a$$

konvergieren alle Ableitungen gleichmässig. Es gilt

$$x_j (f * g_a)(x) = (x_j f) * g_a + f * (x_j g_a)$$

und daher - etwas schematisch -

$$x^\alpha (f * g_a) = (x^\alpha f) * g_a + \sum_j (p_j f) * (q_j g)$$

mit Monomen p_j und q_j. Wichtig ist, dass kein q_j trivial ist. Der erste Term auf der rechten Seite führt zum korrekten Limes. Der Term mit f beim zweiten Summanden ist eine Schwartzfunktion und daher beschränkt. Die Konvergenz folgt nun aus

$$\int |x^\alpha a^d \exp(-\frac{a^2}{2}|x|^2) dx| = a^{-|\alpha|} \int |x^\alpha \exp(-\frac{1}{2}|x|^2) dx \to 0 \qquad \text{für } a \to \infty.$$

Analog betrachten wir die zweite Aussage. Man sieht leicht, dass

$$f g_a \to f \text{ für } a \to 0 \text{ gleichmässig in } x$$

Für Ableitungen verwenden wir wieder die Produktregel. Da

$$|\partial_x^\alpha g_a| \le c_\alpha a^{|\alpha|}$$

gleichmössig in x sind nur die Terme relevant, bei denen alle Ableitungen auf f fallen. Wir argumentieren wie im ersten Fall. □

Lemma 3.5. *Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ so ist auch $\hat f$ eine Schwartzfunktion. Aus $f_n \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ folgt $\hat f_n \to \hat f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Es gilt für alle Multiindizes*

$$\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta f) = i^{|\alpha|+|\beta|} \partial_\xi^\alpha x^\beta \hat f.$$

Beweis. Aus $f \in \mathcal{S}$ folgt $\partial^\alpha x^\beta f \in \mathcal{S}$ und damit $\partial^\alpha x^\beta f \in L^1$. Wie oben sehen wir

$$\mathcal{F}(x_j f) = i \partial_{x_j} \hat f, \quad \mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = i \xi_j \hat f$$

und rekursiv

$$\mathcal{F} \partial_x^\alpha x^\beta f = i^{|\alpha|+|\beta|} \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat f \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

Also ist $\hat f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Sei jetzt $f_n \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, α, β Multiindizes. Zu zeigen ist

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat f_n \to \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat f_n$$

gleichmässig. Das folgt aber aus

$$\hat f_n \to \hat f$$

gleichmässig, was wiederum aus $f_n \to f$ in L^1 folgt. Dieses wiederum ist eine Konsequenz von

$$(1 + |x|^2)^d f_n \to (1 + |x|^2)^d f$$

gleichmässig, was aufgrund der Definition wahr ist.

□

Beispiele für Schwartzfunktionen.

(i) $e^{-\frac{1}{2} x^T (A + iC) x}$.

(ii) $e^{-|x|^4}$

(iii) $e^{-(1+|x|^2)^s}$, $s > 0$.

(iv) $e^{-(\ln(2+|x|^2))^p}$ für $p > 1$.

(v) $(1 + |x|^2)^{-1}$ ist keine Schwartzfunktion.

3.3 Temperierte Distributionen

Definition 3.6. *Eine temperierte Distribution ist eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, d.h. eine lineare Abbildung, für die N und c existieren, so dass*

$$|T(\phi)| \le C \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \sup_x |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|.$$

Wir bezeichnen den Vektorraum der temperierten Distribution mit $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Seien $T, T_n \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Wir sagen

$$T_n \to T \qquad \text{in } \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$$

falls

$$T_n(\phi) \to T(\phi)$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkungen:

(i) Temperierte Distribution definieren stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nach $\mathcal{C}$.

(ii) Jede L^1 Funktion f definiert eine temperierte Distribution T_f durch

$$T_f(\phi) = \int f\phi dx.$$

Die Abbildung $L^1 \ni f \to T_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig und injektiv. Genauso definiert jede L^∞ Funktion eine temperierte Distribution.

(iii) Das Diracmaß δ_0 ist durch $\delta_0(\phi) = \phi(0)$ definiert.

Wir schreiben $\tilde{h}(x) = h(-x)$.

Definition 3.7. *Sei T eine temperierte Distribution, $g \in C_P^\infty$ und $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Für alle $N > 0$ sei $(1+|x|^2)^N h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wir definieren die Ableitung*

$$\partial_{x_j} T(\phi) = -T(\partial_{x_j}\phi) \qquad \partial_{x_j} T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \tag{3.2}$$

das Produkt

$$gT(\phi) = T(g\phi), \qquad gT \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \tag{3.3}$$

und die Faltung

$$h * T(\phi) = T(\tilde{h} * \phi), \qquad h * T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \tag{3.4}$$

$$\mathcal{F}(T)(\phi) = T(\hat{\phi}) \qquad \hat{T} \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \tag{3.5}$$

$$\mathcal{F}^{-1}T(\phi) = T(\check{\phi}) \qquad \check{T} \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \tag{3.6}$$

und die Wirkung der affinen Koordinatentransformation $y = \Xi(x) = Ax+h$, h invertierbar

$$T \circ \Xi(\phi) = (\det A)^{-1} T(\phi \circ \Xi^{-1}) \tag{3.7}$$

Bemerkungen.

(i) Die Operationen sind nach Lemmas 3.3 und Lemma 3.5 wohldefiniert und stetig in T.

(ii) Es gilt die Leibnizregel:

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}(gT)(\phi) &= -gT(\partial_{x_j}\phi)\\ &= -T(g\partial_{x_j}\phi)\\ &= -T(\partial_{x_j}(g\phi)) + T((\partial_{x_j}g)\phi)\\ &= ((\partial_{x_j}g)T + g\partial_{x_j}T)(\phi)\end{aligned}$$

(iii) Für die Faltung gilt

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}(h*T)(\phi) &= -(h*T)(\partial_{x_j}\phi)\\ &= -T(\tilde{h}*\partial_{x_j}\phi)\\ &= -T(\partial_{x_j}(h*\phi))\\ &= (\partial_{x_j}T)(\tilde{h}*\phi)\\ &= (h*\partial_{x_j}T)(\phi)\end{aligned}$$

(iv) Ist $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ so sei

$$\widetilde{h*T}(x) = T(\tau_{-x}\tilde{h}).$$

Da die Translation von Funktionen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ stetig ist, ist diese Funktion stetig. Da

$$\frac{\tau_h f - f}{h} = \int_0^1 f'(.+sh)dsh$$

konvergiert der Differenzenquotient in $\mathcal{S}$ und $\widetilde{h*T}$ ist differenzierbar mit partieller Ableitung

$$\widetilde{\partial_{x_j}h*T}.$$

Die partiellen Ableitungen sind wieder stetig und die Funktion ist in C^∞.

$$h*T = T_{\widetilde{h*T}} \tag{3.8}$$

Es gilt z.B.

$$\delta_0 * \phi(x) = T_\phi$$

und

$$(\partial_{x_j}\delta_0)*\phi = T_{\partial_x\phi}.$$

Lemma 3.8. *Es gilt*

$$\partial_{x_j} T_f = T_{\partial_{x_j} f}$$
$$g T_f = T_{fg}$$
$$g * T_f = T_{f*g}$$
$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}$$
$$\mathcal{F}^{-1} T_f = T_{\check{f}}.$$

Diese Abbildungen sind stetig. Es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{T}) = T$$

Beweis. Wir müssen wieder die Definitionen überprüfen

$$(\partial_{x_j} T_f)(\phi) = -T_f(\partial_{x_j}\phi) = -\int f \partial_{x_j} \phi dx = \int \partial_{x_j} f \phi dx = T_{\partial_{x_j}}(\phi)$$

$$g T_f(\phi) = T_f(g\phi) = \int f g \phi dx = T_{fg}(\phi)$$

$$h * T_f(\phi) = T_f(\tilde{h} * \phi) = \int f(\tilde{h} * \phi) dx = \int h * f \phi dx = T_{h*f}(\phi)$$

$$\mathcal{F} T_f(\phi) = T_f(\hat{\phi}) = \int f \hat{\phi} dx = \int \hat{f} \phi d\xi = T_{\hat{f}}(\phi)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{T})(\phi) = \hat{T}(\check{\phi}) = T(\hat{\check{\phi}})) = T(\phi)$$

□

28.05.2019

Lemma 3.9. *Sei $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$e^{-\frac{1}{2}a^2|x|^2} T \to T$$

mit $a \to 0$ und

$$a^d (2\pi)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2}a^2|x|^2} * T \to T$$

mit $a \to \infty$. Außerdem ist für alle a und b

$$e^{-\frac{1}{2}|a|^2|x|^2} \Big(b^d (2\pi)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2}|b|^2|x|^2} * T \Big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

wobei wir die Schwrtzfunktionen mit einer Teilmenge der temperierten Distributionen identifizieren.

Beweis. Die ersten Aussagen folgen aus

$$e^{-\frac{1}{2}a^2|x|^2}\phi \to \phi$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, was genauso wie

$$a^d(2\pi)^{-d/2}e^{-\frac{1}{2}a^2|x|^2} * \phi \to \phi$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ für $a \to \infty$, siehe Lemma 3.4. Nun ist

$$a^d(2\pi)^{-d/2}e^{-\frac{1}{2}a^2|x|^2} * \phi \text{ in } C_P^\infty(\mathbb{R}^d)$$

und

$$e^{-\frac{1}{2}a^2|x|^2}g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

falls $g \in C_P^\infty$. Daraus ergibt sich die letzte Aussage. □

Lemma 3.10. *Sei $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ eine temperierte Distribution für die für jedes M c_M existiert so dass*

$$|T(\phi)| \le c_M \sup_{\alpha \le N} \sup_x (1+|x|^2)^{-M}|\partial^\alpha \phi|. \tag{3.9}$$

Dann ist für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\phi * T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Die Abbildung ist stetig in ϕ.

Beweis. Wir zeigen:

$$\widetilde{\phi * T}(h) = T(\tau_{-h}\tilde{\phi})$$

ist beschränkt. Da wir Ableitungen auf ϕ werfen können, und die Multipliation mit Monomen sich auf beide Faktoren verteilt folgt hieraus die Aussage. Das folgt aber aus der Abschätzung mit $M = 0$. □

Mit Hilfe von Lemma 3.9 können wir die Faltung von gewissen temperierten Distributionen definieren.

Definition 3.11. *Seien $S, T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ und es gelte (3.9). Wir definieren*

$$S * T(\phi) = S(\phi * \tilde{T}).$$

Übugnsaufgabe: Was ist $\delta_{x_0} * \delta_{x_1}$?

Lemma 3.12. *Sei $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Es gelte $\partial_{x_j}T = 0$ für $1 \le j \le d$. Sei $\phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\int \phi_0 dx = 1$. Dann ist*

$$T(\phi) = T(\phi_0)\int \phi dx$$

Beweis: In Abschnitt 3.4.2.

3.4 Beispiele und Anwendungen

3.4.1 Ein triviales lehrreiches Beispiel

Wir betrachten für $d = 1$

$$\frac{d}{dt}u = f \tag{3.10}$$

für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mit der Fouriertransformation erhalten wir

$$i\xi\hat{u} = \hat{f}$$

Wir wollen durch ξ teilen. Dann ist aber $\frac{1}{i\xi}$ in keiner Umgebung von 0 integrierbar! Wir stellen uns die Frage: Existiert $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ mit

$$T\phi = \int \frac{1}{x}\phi(x)dx \tag{3.11}$$

falls $\operatorname{supp}\phi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$? Ein Beispiel ist

$$T(\phi) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}(\phi(x) - \phi(-x))dx$$

Die Faltung mit T heißt Hilberttransformation. Offensichtlich ist

$$T(x\phi) = \int \phi dx$$

und daher

$$xT = T_1.$$

Die allgemeine Lösung von (3.10) ist

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds + c.$$

Mit

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

erhalten wir

$$u = H * f + c.$$

Für jede Funktion

$$g = H + c$$

ist

$$u = g * f = H * f + c\int f$$

eine Lösung. Wir sehen leicht für $\xi \neq 0$

$$\hat{H}(\xi) = \lim_{a\to 0} \mathcal{F}(He^{-at})(\xi) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a + i\xi} = \frac{1}{i\xi}$$

in dem Sinn von (3.11), d.h. ist T die Distribution wie oben, so hat $S = \hat{H} - iT$ die Eigenschaft, dass

$$S\phi = 0$$

für $\operatorname{supp}\phi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Da

$$\frac{d}{dt} g * f = f$$

ist

$$\xi \hat{S} = 0.$$

Wir werden sehen, dass dann $\xi\hat{H}$ ein Vielfaches des Diracmasses in 0 ist: Die Fouriertransformation von verschiedenen Wahlen von g unterscheiden sich um ein Vielfaches des Diracmasses.

Aufgrund der Symmetrie ist

$$T = -\frac{i}{2}\mathcal{F}(H - \tilde{H}) = -\frac{i}{2}\mathcal{F}(2H - 1) = -i\hat{H} + \frac{i}{2}\sqrt{2\pi}\delta_0$$

und daher

$$\hat{H} = iT - \sqrt{\pi/2}\delta_0.$$

3.4.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ das Anfangswertproblem

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$$

mit den Anfangswerten $u_0 \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Eine Fouriertransformation in x ergibt

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0,$$

was für jedes ξ die Lösung

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(0, \xi)$$

ergibt, wobei

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi),$$

also

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$$

Da $e^{-t|\xi|^2}$ eine Schwartzfunktion ist, ist das Produkt rechts definiert für u_0 $in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Man überzeugt sich leicht, dass auch für temperierte Distributionen das Produkt der Fouriertransformierten die Fouriertransformierte der Faltung ist. $(2\pi)^{-d/2}$ mal die inverse Fouriertransformation von $e^{-t|\xi|^2}$ ist

$$g(t, x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

und wir erhalten

$$u(t,x) = g(t,.) * u_0$$

wobei die rechte Seite definiert ist und für jedes t in C_P^∞ liegt. Man kann sich davon überzeugen, dass $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d))$ liegt und

$$u(t) \to u_0 \qquad \text{mit } t \to 0$$

in $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Lösungen mit diesen Eigenschaften sind eindeutig, was wir aber nicht hier beweisen werden.

Da $(2\pi)^{-d/2} \int g dx = 1$ ist folgt für $u_0 \in L^p$

$$\|u(t,.)\|_{L^p} \le \|u_0\|_{L^p}$$

nach der Youngschen Ungleichung.

Ist $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, so ist

$$u(t,x) = g\widetilde{(t,.) *} T(x)$$

eine glatte Funktion von x, und auch von t - da g nach t differenzierbar ist, und der Differenzenquotient in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ konvergiert. Insbsondere genügt u der Gleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

Beweis von Lemma 3.12 . Sei $\partial_j T = 0$ für $1 \le j \le d$ und

$$u(t,x) = g\widetilde{(t,.) *} T.$$

Dann ist $\partial_{x_j} u = 0$, da die Ableitung auf T fällt. Also hängt u nur von t, es genügt der Wärmeleitungsgleichung, also ist u eine Konstante un damit folgt die Aussage von Lemma 3.12. □

3.4.3 Die Schrödingergleichung

Wir betrachten

$$i\partial_t u + \Delta u = 0$$

Die Fouriertransformation führt auf

$$i\partial_t \hat{u} - |\xi|^2 \hat{u} = 0$$

und damit auf

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{u}(0,\xi)$$

Da

$$e^{-it|\xi|^2} = \lim_{\sigma \to 0} e^{-(\sigma - it)|\xi|^2}$$

ist die inverse Fouriertransformation

$$\sqrt{4(\sigma+i)t}^{-d} e^{-\frac{|\xi|^2}{4(\sigma+i)t}}$$

was gegen

$$(\sqrt{4it})^{-d} e^{i\frac{|\xi|^2}{4t}}$$

konvergiert. Wir drücken die Lösung wieder durch die Anfangswerte aus. Es folgt

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le \frac{1}{4\pi|t|}\|u_0\|_{L^1}$$

Die Frage der Eindeutigkeit und der Regularität sind schwieriger. Diese Lösung ist jedenfalls die physikalisch relevante Lösung.

3.4.4 Homogene radiale Distributionen

Sei $s > -d$. Wir betrachten

$$g(x) = |x|^s \in L^1_{loc}.$$

Diese Funktionen definieren temperierte Distributionen. Wir unterscheiden nicht zwischen $|x|^s$ und $T_{|x|^s}$.

Satz 3.13. *Sei $0 < s < d$. Dann ist*

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2^{s/2}\Gamma(s/2)}|x|^{s-d}\Big)(\xi) = \frac{1}{2^{(d-s)/2}\Gamma(\frac{d-s}{2})}|x|^{-s}$$

Definition 3.14. *Wir sagen, $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ist homogen vom Grad $s \in \mathbb{C}$ falls*

$$T(m_\lambda \phi) = \lambda^{-s-d} T(\phi)$$

für $\lambda > 0$ und $\phi \in \mathcal{S}$. Wir nennen T radial, falls für jede orthogonale Matrix O $T \circ O = T$.

Zum Verständnis der Definition: Mit $y = \lambda x$ gilt falls $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$

$$\int |x|^s f(\lambda x) dx = \lambda^{-s-d} \int |y|^s f(y) dy.$$

Lemma 3.15. *Sei T homogen vom Grad $s \in \mathbb{C}$ und radial. Dann existiert $c \in \mathbb{C}$ so dass für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$*

$$T(\phi) = c \int |x|^s \phi(x) dx. \tag{3.12}$$

Ist $\operatorname{Re} s > -d$ so gilt diese Formel ohne die Annahme an den Träger.

31.05.2019
Wir beweisen den Satz.

Beweis. Die durch $|x|^{s-d}$ definierte Distribution is offensichtlich radial und vom Homogenitätsgrad $s-d$. Da

$$\mathcal{F}(m_\lambda \phi) = \lambda^{-d} m_{\lambda^{-1}} \hat{\phi}$$

für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und damit auch für $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformierte homogen vom Grad $-(s-d)-d=-s$, und radial. Nach Lemma 3.15 ist die Fourier transformierte ein Vielfaches von $|x|^{-s}$. Wir müssen die Konstanten bestimmen, was wir durch die Anwendung auf $e^{-|x|^2/2}$ tun. Mit der Coareaformel bwz Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned}\int |x|^s e^{-|x|^2/2} dx &= dm^d(B_1(0)) \int_0^\infty r^{s+d-1} e^{-r^2/2} dr \\ &= dm^d(B_1(0)) 2^{\frac{d+s}{2}-1} \int_0^\infty t^{\frac{d+s}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= dm^d(B_1(0)) 2^{\frac{d+s}{2}-1} \Gamma(\frac{d+s}{2}).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Konstante. □

Beweis von Lemma 3.15. Sei T eine radiale temperierte Distribution vom Homogenitätsgrad s. Wir betrachten

$$\tilde{T}(\phi) = T(|x|^{-s}\phi)$$

für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Dann hat $\tilde{T}$ den Homogenitätsgrad 0 und wir können $\tilde{T}$ leicht auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen.

Für $a > 0$ definieren wir

$$\tilde{T}_a = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{d/2} \exp(-\frac{a^2}{2}|x|^2) * \tilde{T}.$$

Dann ist $\tilde{T}$ durch eine radiale und glatte Funktion gegeben, die wir t_a nennen., d.h. $\tilde{T} = T_{t_a}$. Falls

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \phi(rx) d\mathcal{H}^{d-1} = 0$$

für alle $r > 0$ so ist offensichtlich

$$\tilde{T}_a(\phi) = \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} t_a(ry)\phi(ry) d\mathcal{H}^{d-1}(y) dr = 0$$

und damit auch im Limes

$$\tilde{T}(\phi) = \tilde{T}(\tilde{\phi})$$

wobei

$$\tilde{\phi}(x) = (\mathcal{H}^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}))^{-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \phi(|x|y) d\mathcal{H}^{d-1}(y).$$

Für $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sei

$$\phi_h(x) = \exp(-dt)h(\exp(t))$$

mit $t = \ln|x|$. Dann ist

$$m_\lambda \phi_h(x) = \exp(-dt)\lambda^{-d} h(\exp(t+\lambda)) = \lambda^{-d}\phi_h(\lambda x)$$

und

$$S(h) = T(\phi_h)$$

definierte eine translationsinvariante temperierte Distribution auf $\mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $\frac{d}{dt}S = 0$ und es existiert $C \in \mathbb{C}$ mit

$$S(h) = C \int_{\mathbb{R}} h(s) ds.$$

Sei

$$h(t) = (\mathcal{H}^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}))^{-1} e^{dt} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \phi(e^t x) d\mathcal{H}^{d-1}$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} T(\phi) =& S(h) = C \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds \\ =& C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{dt} \phi(e^t y) d\mathcal{H}^{d-1} dt \\ =& C \int_0^\infty r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \phi(ry) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ =& C \int_{\mathbb{R}^d} \phi dx. \end{aligned}$$

was (3.12) impliziert.

Sei jetzt $\operatorname{Re} s > -d$ und $\phi \in \mathcal{S}^{d-1}$. Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\phi = B_1(0)$, $\phi = 1$ auf $B_{1/2}(0)$. Wir definieren

$$\phi_r = (1 - \eta(x/r)\phi$$

Dann existiert

$$\lim_{r\to 0} \int |x|^s \phi_r(x) dx = \int |x|^s \phi(x) dx$$

nach Lebesgue.

$\square$

Wir erhalten die Fundamentallösung für den Laplace operator mit $m = 2$ für $d > 3$.

3.4.5 Der Poissonkern

Satz 3.16.
$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|})(x) = (2\pi)^{d/2}\frac{2}{d\omega_d}\frac{1}{(1+|x|^2)^{d/2}}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage indirekt und betrachten das Poissonproblem im Halbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$:

$$-\Delta u = 0 \text{ in } H, u = g \qquad \text{auf } \partial H$$

für $g \in C_b(\partial H)$. Die eindeutige beschränkte Lösung ist durch

$$u(x) = \frac{2}{d\omega_d}\int_{\partial H}\frac{x_d}{|x-y|^d}g(y)dy.$$

Durch eine Fouriertransformation in den ersten $d-1$ Variablen können wir das Problem in

$$-\partial_{x_d}^2\hat{u} + |\xi|^2\hat{u} = 0$$

überführen und erhalten eine beschränkte Lösung durch

$$\hat{u}(x_d,\xi) = e^{-x_d|\xi|}\hat{g}(\xi)$$

und

$$u(x) = (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}^{-1}(e^{-x_d|\xi|^2}) *_{\mathbb{R}^{d-1}} g(x')$$

Ein Vergleich ergibt die gewünschte Formel mit $x_d = 1$.

□

3.4.6 Die Poissonsche Summenformel

Satz 3.17.
$$\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\delta_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\delta_{2\pi k}$$

Lemma 3.18. *Sei $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, $N \in \mathbb{N}$ und*

$$x^\alpha T = 0$$

für $|\alpha| > N$. Dann existieren Koeffizienten c_β so dass

$$T(\phi) = \sum_{|\beta|\le N} c_\beta\partial^\beta\phi(0) = \sum_{|\beta|\le N} c_\beta(-1)^{|\beta|}(\partial^\beta\delta)(\phi)$$

für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *Beweis.* Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \phi(0) x^\alpha + \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{|\alpha|}{\alpha!}\int_0^1 \partial^\alpha f(tx)(1-t)^{|\alpha|-1} dt x^\alpha.$$

Wir fixieren $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta = 1$ auf $B_1(0)$. Dann ist

$$T(\phi) = T(\eta\phi) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \phi(0) T(\eta x^\alpha)$$

da

$$\int_0^1 \partial^\alpha f(tx)(1-t)^{|\alpha|-1} dt \in C^\infty,$$

Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und

$$\phi_N(x) = \eta(x) \sum_{|\alpha|\le N} \partial^\alpha \phi(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Dann ist $T(\phi - \phi_N) = 0$ (da nach der Taylorformel jeder Summand des Restgliedes einen Faktor x^α mit $|\alpha| > N$ besitzt) und daher

$$T(\phi) = T(\phi_N) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!}(0) T(x^\alpha \eta).$$

Daraus ergibt sich die Aussage. □

Beweis der Poissonformel. Offensichtlich ist $e^{2\pi i k\cdot x} T = T$ für $k \in \mathbb{Z}^d$. Daraus folgt

$$\tau_{2\pi k} \hat{T} = \hat{T}$$

für $k \in \mathbb{Z}^d$ und T ist 2π periodisch in jeder Koordinatenrichtung. Genauso ist $\tau_k T = T$ und daher

$$e^{ik\cdot\xi} \tilde{T} = \tilde{T}.$$

und für $1 \le j \le d$

$$\sin(x_j/2) T = 0$$

da

$$\sin(x_j/2)/(e^{ix_j - 1}) \in C^\infty$$

und 4π periodisch.

Sei $\eta \in C_c^\infty((-2\pi, 2\pi)^d)$. Dann ist

$$x_j \eta \tilde{T} = (x_j / \sin(x_j/2)) \eta \sin(x_j/2) T == 0$$

und daher (Lemma 3.18) existiert $c \in C$ mit

$$\eta \tilde{T}(\phi) = c\phi(0) = c\delta_0(\phi).$$

Nun ist $\tilde{T}$ 2π periodisch in jeder Koordinaten und damit

$$\tilde{T} = c \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta_{2\pi k}.$$

Da mit

$$f = (\pi)^{-d/2} \exp(-\pi^{-1}|x|^2/4)$$

$$\hat{f} = \exp(-\pi|\xi|^2)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\pi|k|^2} = T(\hat{f}) = (\hat{T})(f) = c \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^d} e^{-\frac{1}{4\pi}|k|^2} = c \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\pi^2 k^2}$$

folgt $c = 1$.

□

Korollar 3.19. *Sei f eine Schwartzfunktion. Dann gilt die Poissonsche Summenformel*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(2\pi k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k).$$

Beweis. Das folgt mit $T = \sum_k \delta_k$ aus

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}).$$

□

3.4.7 Anwendung: Die θ Funktion

Definition 3.20.

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t}$$

Satz 3.21. *Es gilt*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta(1/t)$$

Beweis. Wir wählen f wie im Beweis von Satz 3.17. □

4 Die Wärmeleitungsgleichung

04.06.2019

4.1 Fundamentallösung, homogene Gleichung im Ganzraum

In diesem Kapitel studieren wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{auf } \{t=0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{4.1}$$

und ihre inhomogene Variante

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{auf } \{t=0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{4.2}$$

genauer. Hierbei sind $u_0 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $f \colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen, an die wir zu gegebener Zeit angemessene Bedingungen stellen werden.

Wir können so zum Beispiel mittels der Fouriertechniken des dritten Kapitels die Gleichung (4.3) für $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lösen. Nehmen wir nämlich die Fouriertransformation der Gleichung (4.3) im Ort, dann erhalten wir die Gleichung

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ \widehat{u}(0,\cdot) = \widehat{u_0} & \text{auf } \{t=0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{4.3}$$

Bei festgehaltenem ξ ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung wir angeben können durch $\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)$. Da $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, folgt somit nach Fourierinversion (im Ort):

$$u(t,x) = \mathcal{F}_x^{-1}\big(e^{-t|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\big). \tag{4.4}$$

Wir wollen nun einen etwas anderen Blick auf die Identität (4.4) geben und die Analogie mit den gewöhnlichen Differentialgleichung stärker herausarbeiten.

Angenommen, wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die geöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) & \text{in } (0,\infty), \\ u(0) = u_0(\in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{4.5}$$

Dann wissen wir aus Analysis 2, dass die Lösung zu diesem Problem gegeben ist durch

$$u(t) = e^{tA}u_0, \qquad t \geq 0. \tag{4.6}$$

Wir schreiben nun (etwas nachlässig) (4.3) als

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in } \{t=0\} \times \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{4.7}$$

wobei $A \equiv \Delta$. Gemäß unserer Analogie mit (4.4) sollten wir die Lösung als

$$u(t,x) = e^{t\Delta} u_0(x) \tag{4.8}$$

schreiben können – doch zunächst haben wir keine Kenntnis darüber, was $e^{t\Delta}$ überhaupt bedeuten sollte. Hier schafft (4.4) Abhilfe und suggeriert, $e^{t\Delta}$ zumindest für $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zu interpretieren als

$$e^{t\Delta} u_0 := \mathcal{F}_x^{-1}\Big(e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi)\Big). \tag{4.9}$$

Wir wollen diese Analogie nun nutzen, um aus dem homogenen Problem (4.3) eine Lösung des inhomogenen Problems (4.2) zu konstruieren. Hierzu erinnern wir kurz an das Prinzip der *Variation der Konstanten*, wie wir es in der Analysis 2 kennen gelernt haben. Diese Strategie wird auch *Duhamels Prinzip* genannt.

Zur Wiederholung des Duhamelschen Prinzips sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir betrachten die Probleme

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t) \tag{$\mathrm{ODE}_{\mathrm{hom}}$}$$

sowie

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t) + b \tag{$\mathrm{ODE}_{\mathrm{inhom}}$}$$

zu vorerst *irgendwelchen* Anfangsdaten. Hierzu machen wir den Ansatz

$$u(t) = e^{tA} c(t),$$

wobei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ eine (differenzierbare) Funktion ist (in diesem *variiert* die Konstante). Um c zu bestimmen, berechnen wir

$$u'(t) = Ae^{tA} c(t) + e^{tA} c'(t) = Au(t) + e^{tA} c'(t).$$

Soll also $u'(t) = Au(t) + b(t)$ gelten, muss wiederum $e^{tA} c'(t) = b(t)$ gelten. Hieraus können wir $c(t)$ berechnen als

$$c(t) = \int_0^s e^{-sA} b(s) ds.$$

Da andererseits $u(t) = e^{tA} c(t)$ angenommen wurde, schließen wir, dass

$$u(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

eine Lösung des inhomogenen Problems ist. Natürlich können wir zu jeder Lösung des inhomogenen Problems ob Linearität stets eine Lösung des homogenen Problems dazu addieren und erhalten wiederum eine Lösung des inhomogenen Problems. Damit können wir die Menge aller Lösungen zu ($\mathrm{ODE}_{\mathrm{inhom}}$) schreiben als

$$\Big\{ u(t) = \underbrace{\int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds}_{\text{inhomogener Anteil}} + \underbrace{e^{tA} d}_{\text{hom. Anteil}} \ : \ d \in \mathbb{R}^N \Big\}.$$

Unser Ziel ist es nun, dies im Hinblick auf das Anfangswertproblem (4.2) zu übersetzen. Hierbei nimmt $f(s, \cdot)$ die Stellung von $b(s)$ ein, und um $e^{(t-s)A}$ als $e^{(t-s)\Delta}$ zu interpretieren, nützen wir (4.4). Das gibt uns

$$u(t,x) = \int_0^t \mathcal{F}_x^{-1} \Big(e^{-(t-s)|\xi|^2} \widehat{f}(s, \xi) \Big) ds \tag{4.10}$$

als einen Kandidaten der inhomogenen Gleichung (4.2). Wir wissen bereits, wie wir durch (4.4) als Integral schreiben können – hierzu erinnern wir kurz an den *Gaußkern* $\Phi\colon (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, der gegeben ist durch

$$\Phi(t,x) := \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^d}} e^{-\frac{|x|^2}{t}}, \qquad (t,x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d.$$

Damit können wir nach den Ergebnissen aus dem dritten Kapitel schreiben

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dy ds, \qquad (t,x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \tag{4.11}$$

und der Vollständigkeit halber setzen wir noch $u(0,x) \equiv 0$. Bis zu diesem Zeitpunkt war alles noch eine vage Heuristik, die wir nun rigoros machen wollen. Hierzu benötigen wir die nachfolgende Terminologie:

Definition 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen sowie $I \subset (0, \infty)$ ein Intervall. Wir setzen*

$$C_1^2(I \times \Omega) := \Big\{ u \in C^1(I \times \Omega) \colon\ \forall i,j\colon\ \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \in C(I \times \Omega) \Big\},$$

$$C_1^2(\overline{I \times \Omega}) := \Big\{ u \in C_1^2(I \times \Omega) \colon \begin{array}{c} \forall i,j\colon\ u, \partial_{x_j} u, \partial_{x_i}\partial_{x_j} u, \partial_t u \text{ können stetig} \\ \text{auf } \overline{I \times \Omega} \text{ fortgesetzt werden} \end{array} \Big\},$$

$$C_{1,b}^2(I \times \Omega) := \Big\{ u \in C_1^2(I \times \Omega) \colon \begin{array}{c} \forall i,j\colon\ u, \partial_{x_j} u, \partial_{x_i}\partial_{x_j} u, \partial_t u \\ \text{sind beschränkt auf } I \times \Omega \end{array} \Big\}.$$

Wir statten den Raum $C_{1,b}^2(I \times \Omega)$ mit der Norm

$$\|u\|_{C_{1,b}^2(I \times \Omega)} := \max\{ \|u\|_{C_b(I \times \Omega)}, \|\partial_t\|_{C_b(I \times \Omega)}, \|\nabla_x u\|_{C_b(I \times \Omega)}, \|\nabla_x^2 u\|_{C_b(I \times \Omega)} \}$$

aus.

Für zukünftige Anwendung machen wir die folgende Bemerkung:

Bemerkung 4.2. $(C^2_{1,b}(I \times \Omega), \|\cdot\|_{C^2_{1,b}})$ *ist ein Banachraum.*

Nun kommen wir zum ersten Hauptresultat des Kapitels:

Satz 4.3. *Sei* $f \in C^2_{1,b}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ *und definiere* $u\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *durch* (4.11). *Dann gilt das Folgende:*

(i) Es gilt $u \in \bigcap_{T>0}(C^2_{1,b}((0,T)\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,T)\times\mathbb{R}^d))$.

(ii) $(\partial_t - \Delta)u = f$ *in* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$.

Beweis. Ad (i). Die genaue Begründung wird nachgetragen (in der Vorlesung geschehen, muss noch getippt werden). Damit rechnen wir

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= \partial_t\Big(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y) f(x-y,t-s)\partial y \partial s\Big)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y) f(0,x-y)\partial y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\partial_t f(t-s,x-y)\partial y\partial s\end{aligned}$$

sowie

$$\Delta_x u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\Delta_x f(t-s,x-y)\partial y \partial s.$$

Ad (ii). Um (ii) zu zeigen, wollen wir ähnlich wie bei der Poissongleichung vorgehen und damit

- partiell integrieren, um auszunutzen, dass Φ in $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ die Wärmeleitungsgleichung löst.

Allerdings hat $\Phi(\cdot,x)$ in $t=0$ eine Singularität, und damit müssen wir etwas verfeinert argumentieren. Wir schreiben hierzu gemäß (i)

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)u(t,x) = &\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y) f(0,x-y)\partial y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\partial_t f(t-s,x-y)\partial y\partial s\\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\Delta_x f(t-s,x-y)\partial y\partial s.\end{aligned}$$

Um nun partiell zu integrieren, bräuchten wir die Zeitableitungen bzw. den Laplaceoperator innerhalb der Integrale bezüglich der Variablen s bzw. y anstatt t und x. Hier verwenden wir, dass die Zeitableitung eine Ableitung der Ordnung 1 und der Laplaceoperator ein Ableitungsoperator der Ordnung 2 ist – womit

$$\begin{aligned}\partial_t f(t-s,x-y) &= -\partial_s f(t-s,x-y),\\ \Delta_x f(t-s,x-y) &= \Delta_y f(t-s,x-y)\end{aligned}$$

gilt. Hiermit können wir

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)f(0,x-y)\partial y - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\partial_s f(t-s,x-y)\partial y\partial s$$
$$- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\Delta_y f(t-s,x-y)\partial y\partial s =: \mathbf{I} - \mathbf{II} - \mathbf{III} \tag{4.12}$$

schreiben. Den Term **I** lassen wir zunächst unverändert. Um im zweiten Term partiell zu integrieren, 'schneiden wir die Null' heraus und betrachten für $\varepsilon \in (0,t)$

$$\mathbf{II} = \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\partial_s f(t-s,x-y)\partial y\partial s + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\partial_s f(t-s,x-y)\partial y\partial s$$
$$=: \mathbf{II}_1 + \mathbf{II}_2.$$

Für später bemerken wir, dass mit $f \in C^2_{1,b}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$|\mathbf{II}_1| \leq \varepsilon \|f\|_{C^2_{1,b}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\partial s = \varepsilon\|f\|_{C^2_{1,b}} \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{4.13}$$

Wir beachten, dass das Zeitintervall (ε, t) die kritische Sigularität des Gaußkerns *nicht mehr* enthält. Demnach dürfen wir partiell integrieren und finden

$$\mathbf{II}_2 = -\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s\Phi(s,y)f(t-s,x-y)\partial y\partial s$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t,y)f(0,x-y)\partial y$$
$$- \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)\partial y.$$

Wir sehen nun, dass wiederum der Term **I** *auftritt.* Also folgt an dieser Stelle, dass

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}(\mathbf{I}-\mathbf{II}) = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s\Phi(s,y)f(t-s,x-y)\partial y + \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)\partial y$$

gilt. Nun kommen wir zum Term **III**. Hier gehen wir ähnlich vor, und splitten

$$\mathbf{III} = \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\Delta_y f(t-s,x-y)dyds + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(s,y)\Delta_y f(t-s,x-y)dyds$$
$$= \mathbf{III}_1 + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_y\Phi(s,y)f(t-s,x-y)dyds,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die bei der partiellen Integration (in y) auftretenden Randintegrale im Unendlichen verschwinden. Wir schätzen nun $\mathbf{III}_1$ ab durch

$$\mathbf{III}_1 \leq \varepsilon\|f\|_{C^2_{1,b}} \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \searrow 0.$$

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)u(t,x) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}(\mathbf{I} - \mathbf{II} - \mathbf{III})\\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\partial_s - \Delta_y)\Phi(s,y)}_{=0} f(t-s,x-y)dyds\\ &+ \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)dy,\end{aligned}$$

zumal Φ die Wärmeleitungsgleichung löst. Wir müssen also nur noch zeigen, dass für alle $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)dy = f(t,x)$$

gilt. Hierzu benutzen wir, dass aufgrund von $f\in C^2_{1,b}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ zu jedem $\delta>0$ ein $\rho>0$ existiert so, dass für alle $0<\varepsilon<\delta$ und $y\in B_\rho(0)$ gilt:

$$|f(t-\varepsilon,x-y)-f(t,x)|<\delta.$$

Wir erinnern, dass für jedes $s>0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(s,y)dy = 1 \ \text{ und damit } \ \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t,x)dy$$

für jedes $\varepsilon>0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)f(t-\varepsilon,x-y)dy - f(t,x)\right| &\le \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)|f(t-\varepsilon,x-y)-f(t,x)|dy\\ &= \int_{B_\rho(0)}\Phi(\varepsilon,y)|f(t-\varepsilon,x-y)-f(t,x)|dy\\ &+ \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\rho(0)}\Phi(\varepsilon,y)|f(t-\varepsilon,x-y)-f(t,x)|dy\\ &=: \mathbf{IV}_1 + \mathbf{IV}_2.\end{aligned}$$

Für das erste Integral verwenden wir die obige Stetigkeitsabschätzung und finden

$$\mathbf{IV}_1 \le \delta\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(\varepsilon,y)dy = \delta.$$

Andererseits ist

$$\mathbf{IV}_2 \le 2\|f\|_{C^2_{1,b}}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\rho(0)}\Phi(\varepsilon,y)dy = 2\|f\|_{C^2_{1,b}}\frac{1}{\sqrt{(4\pi\varepsilon)^d}}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\rho(0)} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}dy.$$

Wir führen nun die neue Variable $z = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}$ ein, so dass $\frac{\varepsilon^d}{d} z = dy$ und

$$|y| > \rho \Leftrightarrow \sqrt{\varepsilon}|z| > \rho \Leftrightarrow |z| > \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}$$

gilt. Damit folgt nach dominierter Konvergenz

$$\mathbf{IV}_2 \leq \frac{2}{\sqrt{(4\pi)^d}} \|f\|_{C^2_{1,b}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_{\rho/\sqrt{\varepsilon}}(0)}(y) e^{-\frac{|y|^2}{4}} dy \longrightarrow 0.$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Wir können nun auch das eingangs gestellte vollständige inhomogene Anfangswertproblem (4.2) lösen. Hierzu betrachte

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = 0 & \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{4.14}$$

mit Lösung v gemäss dem vorangegangenen Satz, und

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{4.15}$$

mit Lösung w gemäss (4.4). Dann löst $u = v+w$ (4.2) aufgrund der Linearität der Gleichung.

Nun noch einige Anmerkungen:

- *Die Halbgruppeneigenschaft.* (...)

- *Wohlgestelltheit.* Wir erinnern, dass Wohlgestelltheit bei partiellen Differentialgleichungen bedeutet, dass eine Lösung existiert, eindeutig ist und stetig von den Daten abhängt. Die Existenz von Lösungen haben wir oben adressiert; im Rest des Kapitels werden wir mit der Eindeutigkeit und den Eigenschaften von Lösungen beschäftigt sein. In der kommenden Vorlesung werden wir die Eindeutigkeit behandeln, und wir motivieren bereits jetzt die Schwierigkeiten.

  Hierzu reicht es, in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ das Problem (4.3) mit $u_0 \equiv 0$ zu betrachten. Dies hat die triviale Funktion als Lösung. Wollen wir also zeigen, dass die Eindeutigkeit verletzt ist, reicht es, eine nichttriviale, weitere Lösung zu dieser Gleichung anzugeben.

Wir machen den Ansatz

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k},$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist mit $g^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Ein Kandidat hierfür ist

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Nehmen wir an, dass wir v gliedweise differenzieren dürfen, so folgt, dass v durchaus $(\partial_t - \partial_{xx})v = 0$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ löst mit $v(0,x) = 0$ – aber natürlich eine *nichttriviale Lösung* ist. Damit ist die Eindeutigkeit verletzt.

In der nächsten Vorlesung werden wir dieses Beispiel mitsamt des Nachweises der Konvergenz der Funktionenreihe fortführen. Danach ist eine zentrale Fragen, welche Bedingungen wir an Lösungen stellen müssnen, um doch Eindeutigkeit zu erhalten.

07.06.2019

Satz 4.4. *Es gibt eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, so dass $\partial_t u - \Delta u = 0$, $u(0,x) = 0$ für alle x, aber $u \neq 0$.*

Beweis. Es reicht, den Fall $d = 1$ zu betrachten. Für $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ definieren wir

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} g(t)\,. \tag{4.16}$$

Wir setzen

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0\,, \end{cases} \tag{4.17}$$

so dass $u(t,x) = 0$ für $t \leq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe konvergiert.

Um die Ableitungen abzuschätzen, betrachten wir die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$v(t,s) = \operatorname{Re} \exp\left(-\frac{1}{(t+is)^2}\right)\,. \tag{4.18}$$

Es ist klar, dass $g(t) = v(t,0)$ für alle $t > 0$. Da $z \mapsto V(z) = \exp(-1/z^2)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, ist die Funktion v in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonisch.

Die Cauchysche Integralformal besagt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

falls f in einer Umgebung von $B_R(z)$ holomorph ist. In diesem Fall können wir die Formel differenzieren und erhalten

$$\partial_z^k f(z) = k! \frac{1}{2\pi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

und daher

$$|\partial_z^k f(z)| \leq \frac{k!}{R^k} \sup_{B_R(z)} |f(\zeta)|.$$

Sei $T > 0$. Mit $B_{T/3}(T,0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt, dass

$$|g^{(k)}(T)| = |\partial_z^k V(T)| \leq \frac{k!}{(T/3)^k} \|v\|_{C_b(B_{T/3}(T,0))}\,, \tag{4.19}$$

Ferner,

$$|v(t,s)| \leq \left| \exp\left(-\frac{1}{(t+is)^2} \right) \right| \tag{4.20}$$

$$= \exp\left(-\operatorname{Re} \frac{1}{(t+is)^2} \right) = \exp\left(\frac{s^2 - t^2}{(t^2+s^2)^2} \right) . \tag{4.21}$$

Für $(t,s) \in B_{T/3}((T,0))$ gilt $|s| \leq T/3$ und $2T/3 \leq t \leq 4T/3$ und deshalb

$$\frac{s^2-t^2}{(t^2+s^2)^2} \leq \frac{(T/3)^2 - (2T/3)^2}{((T/3)^2 + (4T/3)^2)^2} = \frac{-3/9}{T^2(17/9)^2} = -\frac{27/289}{T^2} \leq -\frac{1}{(5T)^2} . \tag{4.22}$$

Deshalb gilt, für alle $T > 0$,

$$|g^{(k)}(T)| \leq \frac{3^k k!}{T^k} e^{-\frac{1}{(5T)^2}} \tag{4.23}$$

Für $T \leq 0$ gilt $g^{(k)}(T) = 0$. Die Funktion $h(T) = T^{-k} e^{-\frac{1}{(5T)^2}}$ genügt $h(T) \to 0$ für $T \to 0$ und $T \to \infty$. Aus

$$h'(T) = \left(\frac{2}{25T^3} - kT^{-1} \right) h(T)$$

folgt das h das Maximum in $T = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{k}}$ annimmt und damit

$$|g^{(k)}(T)| \leq 15^k k^{\frac{k}{2}} k!.$$

Als Konsequenz erhalten wir für $R > 0$

$$R^{2k} \frac{1}{(2k)!} |g^{(k)}(t)| \leq R^{2k} 15^k k^{-\frac{k}{2}} k! \to 0$$

mit $k \to \infty$. Damit konvergiert die Potenzreihe mit allen Ableitungen gleichmässig auf kompakten Teilmengen. Daraus folgt $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$, und gliedweises Differenzieren von (4.16) ergibt $\partial_t u - \Delta u = 0$. □

4.2 Maximumprinzip

Definition 4.5. *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T > 0$ definiert man*

$$\Omega_T = (0,T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{d+1} \tag{4.24}$$

und

$$\Gamma_T = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega) = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T \subset \partial\Omega_T\,. \tag{4.25}$$

Bemerkung. Γ_T ist abgeschlossen, weil $\Gamma_T = (\overline{\{0 \times \Omega\}}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$.

Satz 4.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, so dass*

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0 \qquad \text{in } \Omega_T. \tag{4.26}$$

Dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u\,. \tag{4.27}$$

Bemerkung. Falls $(\partial_t - \Delta)u = 0$, dann folgt auch

$$\min_{\overline{\Omega_T}} u = \min_{\Gamma_T} u\,. \tag{4.28}$$

Beweis. Wir fangen mit dem Fall $\partial_t u - \Delta u < 0$ an.

Die Menge $\overline{\Omega_T}$ ist kompakt. Sei $M = u(x_*, t_*) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$. Falls $(x_*, t_*) \in \Omega_T$, dann gilt $x_* \in \Omega$ und $t_* > 0$. Dann folgt $D_x u(x_*, t_*) = 0$, $\Delta u(x_*, t_*) \leq 0$, $\partial_t u(x_*, t_*) \geq 0$. Insbesondere folgt $(\partial_t u - \Delta u)(x_*, t_*) \geq 0$ im Widerspruch zur Annahme. Deshalb gilt $(x_*, t_*) \in \Gamma_T$.

Sei jetzt $\partial_t u - \Delta u \leq 0$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir $v_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon t$. Mit $\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon < 0$ und $v_\varepsilon \leq u \leq v_\varepsilon + \varepsilon T$ folgt

$$\max_{\overline{\Omega_T}} \varepsilon t + \max_{\overline{\Omega_T}} v_\varepsilon = \varepsilon T + \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon \leq \varepsilon T + \max_{\Gamma_T} u\,. \tag{4.29}$$

Da ε beliebig war, folgt hieraus die Aussage. □

Lemma 4.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C^0(\Gamma_T)$, $f \in C^0(\Omega_T)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ von*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T\,. \end{cases} \tag{4.30}$$

Beweis. Falls u, v zwei Lösungen sind, dann gilt $(\partial_t - \Delta)(u - v) = 0$ in Ω_T, deshalb $\max_{\Omega_T}(u - v) \leq \max_{\Gamma_T}(u - v) = 0$ und $\max_{\Omega_T}(v - u) \leq \max_{\Gamma_T}(v - u) = 0$. Es folgt, dass $u - v = 0$ überall. □

Satz 4.8. *Sei $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,T] \times \mathbb{R}^d \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^d\,. \end{cases} \tag{4.31}$$

wobei $g \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Falls $a, A > 0$ existieren, so dass

$$u(t,x) \leq A e^{a|x|^2} \tag{4.32}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T]$, dann gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq t \leq T} u(t,x) \leq \sup_x g(x). \tag{4.33}$$

Die analoge Aussage gilt auch für $T = \infty$ (mit $[0,\infty)$ statt $[0,T]$ und $(0,\infty)$ statt $(0,T]$).

Beweis. Teil 1: wir betrachten den Fall $4aT < 1$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so dass

$$a < \frac{1}{4(T+\varepsilon)}\,. \tag{4.34}$$

Für $\delta > 0$ definieren wir $v : [0,\infty] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{|x|^2/(4(T+\varepsilon-t))}\,. \tag{4.35}$$

Eine leichte Rechnung (ähnlich zur Rechnung in Lemma **??**) zeigt, dass

$$(\partial_t - \Delta)v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \times (0,T]\,. \tag{4.36}$$

Für alle $r > 0$, aus dem Maximumprinzip (Satz 4.6) angewendet auf $\Omega = B_r(0)$ folgt, dass

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v = \max_{\Gamma_T} v\,. \tag{4.37}$$

Für alle $x \in B_r(0)$ gilt $v(0,x) \le u(0,x) = g(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x)$.

Für alle $(t,x) \in [0,T] \times \partial B_r(0)$ gilt $|x| = r$, und deshalb

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon-t))} \tag{4.38}$$

$$\le Ae^{ar^2} - \frac{\delta}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon))}\,. \tag{4.39}$$

Aus (4.34) folgt

$$\lim_{r\to\infty} Ae^{ar^2} - \frac{\delta}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon))} = -\infty\,. \tag{4.40}$$

Deshalb existiert ein $r > 0$, so dass für $R \ge r$

$$Ae^{aR^2} - \frac{\delta}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{R^2/(4(T+\varepsilon))} \le \sup_{\mathbb{R}^d} g\,. \tag{4.41}$$

Mit (4.38) folgt, dass

$$v(t,x) \le \sup g(\mathbb{R}^d) \text{ für alle } (t,x) \in [0,T] \times \partial B_r(0). \tag{4.42}$$

Dann folgt aus (4.37), dass

$$v(y,t) \le \sup_{\mathbb{R}^d} g \tag{4.43}$$

und für $|x| \le R$

$$u(t,x) \le v(t,x) + \frac{\delta}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{T+\varepsilon-t}} \le \sup_{\mathbb{R}^d} g + \frac{\delta}{\varepsilon^{d/2}} e^{\frac{R^2}{4\varepsilon}} \tag{4.44}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $|y| \le R$, $t \in [0,T]$, $\delta > 0$. Mit $\delta \to 0$ ist der Beweis von Teil 1 beendet.

Teil 2: Sei $\varphi : [0,T] \to [0,\infty]$ durch

$$\varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u(t,x) \tag{4.45}$$

definiert. Für alle t, t' mit $0 \le t \le t' \le T$ und $t' - t \le 1/(4a)$ folgt aus Teil 1, dass

$$\varphi(t) \ge \varphi(t')\,. \tag{4.46}$$

Deshalb ist φ monoton fallend, und $\varphi(t) \le \varphi(0) = \sup g(\mathbb{R}^d)$ für alle t. □

Lemma 4.9. *Sei $g \in C(\mathbb{R}^d)$, $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C_1^2((0,T] \times \mathbb{R}^d) \cap C_b([0,T] \times \mathbb{R}^d \times [0,T])$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d\,, \end{cases} \tag{4.47}$$

die

$$|u(t,x)| \le A e^{a|x|^2} \tag{4.48}$$

für irgendwelche $a, A > 0$ erfüllt.

Beweis. Folgt aus Satz 4.8. □

4.3 Regularität, Mittelwertformel

Analog zu Überlegungen bei den harmonischen Funktionen definieren wir den Begriff der schwachen Lösung.

Definition 4.10. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ offen. $u \in L^1_{loc}(\omega)$ heißt schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung falls*

$$\int u(\partial_t + \Delta)\phi \, d\mathcal{L}^n dt = 0$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\omega)$.

Jede Lösung $u \in C_1^2(\omega)$ ist auch eine schwache Lösung, was man mittels partieller Integration sieht.

Satz 4.11. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ offen, $u \in L^1_{loc}(\omega)$ eine schwache Lösung. Dann gibt es in der Äquivalenzklasse von u eine beliebig oft differenzierbare Funktion (die wir mit u identifizieren), die der Wärmeleitungsgleichung genügt.*

18.06.2019

Bemerkung. Die gleiche Aussage, mit fast dem gleichen Beweis, gilt für $\omega = \Omega_T$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $u \in C^\infty((-r^2/4, 0] \times B_{r/2}(0))$ (in dem Sinn der Existenz einer derartigen Funktion in der Äquivalenzklasse aus) für $(-r^2, 0] \times B_r(0) \subset \omega$ folgt. Dann folgt auch

$$0 = -\int_\omega u(\partial_t \phi + \Delta\phi) dm^{d+1} = \int_\omega (\partial_t u - \Delta u)\phi dm^{d+1}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ und damit $u_t - \Delta u = 0$.

Im ersten Schritt betrachten wir eine Funktion $u \in C^3(\omega)$, die dann mit dem gleichen Argument $u_t - \Delta u = 0$ genügt.

Sei $(-4r^2, T] \times B_{2r}(x_0) \subset \omega$. Wir zeigen

$$|\partial_t^k \partial_x^\alpha u(T, x_0)| \le c_{\alpha,k} r^{-2k-|\alpha|-d-2} \|u\|_{L^1((T-4r^2] \times B_{2r}(x_0))}. \tag{4.49}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $T = 0$, $x_0 = 0$ und $r = 1$.

Sei $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ eine Funktion mit $\theta = 1$ auf $[-1, 1] \times B_1(0)$ mit Träger in $[-4, 4] \times B_2(0)$.

Wir definieren $v : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ durch $v = \theta u$ auf $B(0, 2r)$, $v = 0$ auf $\mathbb{R}^{d+1} \setminus B(0, 2r)$. Damit folgt $v \in C^3(\mathbb{R}^{d+1})$,

$$\partial_t v = \partial_t(u\theta) = \theta\partial_t u + u\partial_t\theta \tag{4.50}$$

und

$$\Delta v = \Delta(u\theta) = \theta\Delta u + u\Delta\theta + 2Du \cdot D\theta\,. \tag{4.51}$$

Sei $f = u(\partial_t\theta + \Delta\theta) - 2\sum_{j=1}^d \partial_j(u\partial_j\theta)$. Dann gilt

$$(\partial_t - \Delta)v = \theta(\partial_t - \Delta)u + f = f\,. \tag{4.52}$$

Insbesondere $\operatorname{supp} f \subset ([-4, 0] \times B_4(0)) \backslash [-1, 0) \times B_1(0)$.

Es gilt $v(\cdot, T) = 0$ für $T < -4$. Ferner ist v beschränkt. Da $f \in C_1^2$, folgt aus Satz 4.3 und Lemma 4.9, dass

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t - s, x - y) f(s, y) dm^{d+1}(s, y)\,. \tag{4.53}$$

Da $\Phi(t - s, x - y) = 0$ für $t \le s$, kann man das Integrationsgebiet mit $\mathbb{R}^{d+1}$ ersetzen. Wir haben deshalb bewiesen, dass für alle $w \in C^3(\omega)$ mit $\partial_t w - \Delta w = 0$

$$\begin{aligned} w(t, x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} & w(\Phi(t - s, x - y)(\theta_t + \Delta\theta) \\ & - w \sum_{j=1}^d \partial_{y_j}\theta \partial_{x_j} \Phi(t - s, x - y)) dm^{d+1}(s, y) \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in (-1, 0] \times B_1(0)$ gilt. Da wie Ableitungen unter das Integral ziehen können erhalten wir die gewünschte Abschätzung unter der Annahme, dass $u \in C^3$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Wir wenden diese Formel auf die Funktion $w_\rho = u * \eta_\rho$ an, wobei η_ρ eine Diracschar mit kompaktem Träger ist.

Da L^1_{loc} ist, konvergiert w_ρ in $L^1(\omega)$ gegen u. Da Φ integrierbar ist, folgt mit dominierter Konvergenz

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} & \Phi(t-s, x-y) \\ & \cdot (u\partial_t\theta + u\Delta\theta) - 2uD\theta D\phi(t-s, x-y) dm^{d+1}(s,y) \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in B_r(0)$. Für $(t, x) \in B_{r/2}(0)$ und $(s, y) \in B_{2r}(0) \setminus B_r(0)$ ist $\Phi(t-s, x-y)$ beliebig oft differenzierbar, deshalb $u \in C^\infty(B_{r/2}(0))$. □

Definition 4.12. *Für $(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$ und $r > 0$ setzt man*

$$E(t,x,r) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{t,x\} : \Phi(t-s, x-y) > \frac{1}{r^d} \right\}.$$

Die Menge $E(t, x, r)$ wird Wärmeleitungsball genannt.

Bemerkung. $E(t, x, r) \subset \mathbb{R}^d \times (-\infty, t)$, $(t, x) \in \partial E(t, x, r)$, E ist beschränkt, $\partial E \setminus \{(t, x)\}$ regulär.

Satz 4.13. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ offen, $u \in C^2_1(\omega)$, $\partial_t - \Delta u = 0$, $\overline{E}(t, x, r) \subset \omega$. Dann gilt:*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(t,x,r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dm^{d+1}(s,y).$$

Beweis. Es reicht, den Fall $x = 0$, $t = 0$ zu betrachten. Wir schreiben $E(r) = E(0, 0, r)$ und definieren

$$\varphi(r) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(r)} u(t,x) \frac{|x|^2}{t^2} dm^{d+1}(t,x) = \frac{1}{4} \int_{E(1)} u(r^2 t, rx) \frac{x^2}{t^2} dm^{d+1}(t,x)$$

(mit dem Variablenwechsel $x = rx'$, $t = r^2 t'$). Es ist leicht zu sehen, dass

$$\lim_{r \to 0} \varphi(r) = u(0,0) \int_{E(1)} \frac{|x|^2}{4t^2} dm^{d+1}(t,x).$$

Wir berechnen jetzt das letzte Integral. Mit $y = z\sqrt{|t|}$ und $A = \{(t, z) : t <$

$0, e^{-|z^2|/4} > (4\pi|t|)^{d/2}\} = \{(t,z) : -(e^{-|z|^2/4})^{2/d}/4\pi < t < 0\}$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{E(1)} \frac{|x|^2}{4t^2} dm^{d+1}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_A \frac{|z|^2}{4t} |s|^{d/2} dm^{d+1}(t,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z^2}{4} \int_0^{\exp(-(|z|^2/4)(2/d))/4\pi} t^{d/2-1} dt dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|z|^2}{4} \exp(-|z|^2/4) \frac{2}{d(4\pi)^{d/2}} dz \,.
\end{aligned}$$

Ferner,

$$\int |z|^2 \exp(-\frac{|z|^2}{4}) dz = d \int z_1^2 e^{-\frac{|z|^2}{4}} = n(4\pi)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-4x^2} dx = 2d(4\pi)^{\frac{d}{2}}$$

und mit partieller Integration

$$\int 1 e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = \int \frac{x^2}{2} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx.$$

Es bleibt zu zeigen, dass φ konstant ist. Aus $u \in C^1$ folgt $\varphi \in C^1$ und

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{4} \int_{E(1)} (\sum_{j=1}^d x_j \partial_j u + 2rt\partial_t u)(r^2 t, rx) \frac{|x|^2}{t^2} dm^{d+1}(x,t) \\
&= \frac{1}{4r^{d+1}} \int_{E(r)} (\sum_{j=1}^d x_j \partial_j u + 2t\partial_t u)(t,x) \frac{|x|^2}{t^2} dm^{d+1}(t,x) \,.
\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $t < 0$ definieren wir

$$\psi(t,x) = \ln(r^d \Phi(-t,x)) = d \ln r + \frac{|x|^2}{4t} - \frac{d}{2} \ln(-4\pi t) \,.$$

Aus der Definition von E folgt, dass $\psi = 0$ auf $\partial E(r) \setminus \{0\}$. Wir rechnen, mit mehreren partiellen Integrationen,

$$\begin{aligned}
0 &= d \int_{E(r)} \psi(\partial_t u - \Delta u) dm^{d+1} \\
&= \int_{E(r)} \operatorname{div}(x) \psi \partial_t u - n\psi \operatorname{div} Du \, dm^{d+1} \\
&= \int_{E(r)} -\sum_{j=1}^d x_j \partial_j \psi \partial_t u - \psi \sum_{j=1}^d x_j \partial_j \partial_t u + n \sum_{j=1}^d \partial_j \psi \partial_j u \, dm^{d+1} \\
&= \int_{E(r)} -\sum_{j=1}^d x_j \partial_j \psi \partial_t u + x \partial_t \psi Du + d \sum_{j=1}^d x_j \partial_j \psi \partial_j u \, dm^{d+1}.
\end{aligned}$$

Mit Fubini haben wir einmal bzgl. t partiell integriert ($x = 0$ ist eine Nullmenge) , und für festes t Gauß in x angewandt. Mit $\nabla\psi = x/(2t)$ und $\partial_t\psi = -|x|^2/(4t^2) - d/(2t)$ folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{E(r)} -\frac{|x|^2}{2s}\partial_t u - \frac{|x|^2}{4t^2}\sum_{j=1}^d x_j\partial_j u - \frac{d}{2t}\sum_{j=1}^d x_j\partial_j u + d\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^d x_j\partial_j u\, dm^{d+1} \\
&= - r^{d+1}\varphi'(r)\,.
\end{aligned}
$$

□

Satz 4.14 (Die Harnacksche Ungleichung)**.** *Es existiert $\kappa > 0$ so dass gilt: Sei $u \in C_1^2((T-R^2, T] \times B_R(x_0))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, $u \geq 0$. Dann gilt*

$$u(T, x_0) \geq \kappa \sup\{u(s,y) : T - R^2/2 < s < T - R^2/4, |x-y| < R/2\}$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$, $T = 0$ und $R = 1$. Wir betrachten den Wärmeleitungsball $E(0,0,1)$ und wählen $a < b < 0$ und c so dass

$$[a,b] \times B_c(0) \subset E(0,0,1).$$

Es genügt zu zeigen: Es existiert $\bar\kappa > 0$ so dass

$$u(0,0) \geq \bar\kappa \sup\{u(s,y) : a\delta < s < b\delta, \frac{c\delta}{2} \leq |y| < c\delta\}$$

gilt für nichtnegative Lösungen in $[-\frac{1}{2}, 0] \times B_{1/2}(0)$. Die volle Aussage erfolgt dann mittels Iteration: Wir können jeden Punkt (t,x) mit $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{4}$ und $|x| \leq \frac{1}{2}$ durch circa δ^{-2} Punkte (t_j, x_j) verbinden, so dass wir diese erste Aussage jeweils auf aufeinderfolgende Paare anwenden können. Wir erhalten δ als hohe Potenz von $\bar\delta$.

Mit der Mittelwerteigenschaft gilt

$$u(0,0) = \frac{1}{4r^d}\int_{E(0,0,r)} \frac{|x|^2}{t^2} u(t,x)dxdt.$$

Wir wählen $r = \delta$ so dass $E(0,0,r) \subset (-1/2, 0) \times B_{1/2}(0)$. Dann existiert nach der Mittelwerteigenschaft eine Konstante C so dass

$$u(0,0) \geq \frac{1}{C\delta^{d+2}}\int_{(a\delta,b\delta)\times(B_{c\delta}(0)\setminus B_{c\delta/2}(0))} u(s,z)d\mathcal{L}^{n+1}.$$

Im Beweis von Satz 4.11 hatten wir gesehen dass für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung für alle $(t,x) \in (-R^4, 0] \times B_R(0)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
w(t,x) = \int_{B_{2r'}(0)\setminus B_{r'}(0)} & w(s,y)(\Phi(t-s, x-y)(\theta_t(s,y) + \Delta\theta(s,y)) \\
& - w(s,y)\sum_{j=1}^n \partial_{y_j}\theta(s,y)\partial_{x_j}\Phi(t-s,x-y))dy\,ds
\end{aligned}
$$

Wir verwenden diese Formel für $w = u(t - t_0, x - x_0)$ im Punkt $t = 0$, $x = 0$ und $r' = \delta/2$. Damit folgt mit $\bar\kappa$, das sich aus den obigen Konstanten bestimmt

$$w(t_0, x_0) \le \bar\kappa w(0,0).$$

$\square$

21.06.2019]

4.4 Hermitefunktionen und der Hermiteoperator

Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wir nennen die Abbildung

$$u \to -\Delta u + |x|^2 u =: Lu$$

harmonischen Oszillator oder Hermiteoperator. Dann ist

$$\begin{aligned} -\Delta u + |x|^2 u &= \sum_{j=1}^d (-\partial_{x_j} + x_j)(\partial_{x_j} + x_j) u + du \\ &= \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} + x_j)(-\partial_{x_j} + x_j) u - du \end{aligned} \tag{4.54}$$

und damit

$$\int \Big[(-\Delta + |x|^2)u\Big] u dx = d\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^d \|(\partial_{x_j} + x_j)u\|_{L^2}^2$$

Da

$$\partial_{x_j} e^{-\frac12 |x|^2} + x_j e^{-|x|^2} = 0$$

folgt

$$(-\Delta + |x|^2) e^{-\frac12 |x|^2} = d e^{-\frac12 |x|^2}.$$

Da

$$(\partial_{x_j} + x_j)(-\partial_{x_j} + x_j) u = (-\partial_{x_j} + x_j)(\partial_{x_j} + x_j) u + 2u$$

folgt

$$(-\Delta + |x|^2)(-\partial_{x_j} + x_j) u = (\partial_{x_j} + x_j)(-\Delta + |x|^2) u + 2(-\partial_{x_j} + x_j) u$$

und damit

$$(-\Delta + |x|^2)(-\partial_{x_j} + x_j) e^{-\frac{|x|^2}{2}} = (d+2)(-\partial_{x_j} + x_j) e^{-|x|^2/2}.$$

Rekursiv erhalten wir

$$L(-\partial_{x_j} + x_j)^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}} = (d + 2|\alpha|)(-\partial_{x_j} + x_j)^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}}.$$

Im Fall $d = 1$ ist für $m > n$

$$\begin{aligned}
\int & \Big[(-\partial_x + x)^n e^{-x^2/2}\Big]\Big[(-\partial_x + x)^m e^{-x^2/2}\Big] dx \\
&= \int \Big[(\partial_x + x)(-\partial_x + x)^n e^{-x^2/2}\Big]\Big[(-\partial_x + x)^{m-1} e^{-x^2/2}\Big] dx \\
&= \int \Big[(-\partial_x + x)(\partial_x + x)(-\partial_x + x)^{n-1} e^{-|x|^2/2}\Big]\Big[(-\partial_x + x)^{m-1} e^{-x^2/2}\Big] dx \\
&\qquad + 2\int \Big[(-\partial_x + x)^{n-1} e^{-x^2/2}\Big]\Big[(-\partial_x + x)^{m-1} e^{-x^2/2}\Big] dx \\
&= 2n \int \Big[(-\partial_x + x)^{n-1} e^{-x^2/2}\Big]\Big[(-\partial_x + x)^{m-1} e^{-x^2/2}\Big] dx \\
&= 2^n n! \int e^{-x^2/2} (-\partial_x + x)^{m-n} e^{-|x|^2} dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } n < m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{falls } n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

Definition 4.15. *Die multivariaten Hermitefunktionen sind durch*

$$h_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha! \pi^{d/2}}} (-\partial_{x_j} + x_j)^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

definiert.

Mit Fubini folgt

$$\int h_\alpha h_\beta dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{falls } \alpha = \beta \end{cases}$$

Satz 4.16. *Die Funktionen h_α bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^d)$. Sie sind Eigenfunktionen zum Hermiteoperator zum Eigenwert $d + 2|\alpha|$.*

Beweis. Orthonormalität haben wir bereits gesehen. Zu zeigen ist: Falls $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und

$$\int x^\alpha e^{-|x|^2/2} f dx = 0$$

für alle α so ist $u = 0$. Dazu benötigen wir, dass jedes Polynom als Linearkombination von Hermitepolynomen, d.h. Polynomen $h_\alpha e^{|x|^2/2}$ geschrieben werden kann. Sei $u = e^{-\frac{|x|^2}{2}} f$. Dann ist $e^{\xi \cdot x} u(x)$ für alle ξ integrierbar und

$$g(z) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{i \sum_{j=1}^d z_j x_j} u(x) dx$$

für $z \in \mathbb{C}^d$ definiert. g ist beliebig oft differenzierbar und die Ableitung ist offensichtlich komplex linear. Als ist g in jeder Koordinate holomorph. Da für alle $v \in \mathbb{R}^d$

$$(-i)^n \sum_{j=1}^d (v_j \partial_{z_j})^n g(0) = (2\pi)^{-d/2} \int (\langle v, x \rangle)^n e^{-|x|^2/} f(x) dx = 0$$

ist $g(\zeta v) = 0$ für $\zeta \in \mathbb{C}$ und $g = 0$. □

Korollar 4.17. *Sei $\tau \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^2} \le 2\| - \Delta u + |x|^2 u - \tau u\|_{L^2}$$

Beweis. Wir entwickeln u in der Basis der Hermitefunktionen. □

4.5 Eindeutigkeitsaussagen

Wir wollen zeigen, dass falls u und v Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind mit $u(T,x) = v(T,x)$ für $x \in \mathbb{R}^d$, dass dann auch $u = v$ für $t < T$. Wir werden für diese Aussage eine schwache Wachstumsveraussetzung brauchen, dann aber eine stärkere Aussage erhalten. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass v die Nulllösung ist. Wir machen die schwächere Annahme

$$u \in C^2_1([0,1) \times B_1(0)), |u_t + \Delta u| \le \frac{1}{4t}|u| \tag{4.55}$$

Lemma 4.18. *Sei $T > 0$. Dann ist*

$$\|u(T,.)\|_{L^2(B_{r/2}(0))} + \||\nabla_x u|\|_{L^2([T,2T]\times B_{r/2}(0))} \le c(T^{-1/2} + r^{-1})\|u\|_{L^2((T,3T)\times B_r(0))}$$

Beweis. Wir wählen $\theta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ mit Träger in $B_1(0)$, identisch 1 auf $B_{1/2}(0)$. Wir definieren $\theta_r(x) = \theta(x/r)$ und $v(t,x) = \frac{3T-t}{2T}\theta(x/r)u(t,x)$ für $T \le t \le 2T$ und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int v^2(t,x)dx &= -\frac{1}{2T}\int_{B_r(0)} \theta_r^2 u^2 dx + \int \theta_r^2 u_t u dx \\
&\ge -\frac{3}{4T}\int_{B_r(0)} u^2(t,.)dx - \int \theta_r \Delta u v dx \\
&= -\frac{3}{4T}\int_{B_r(0)} u^2 dx + \int (\nabla\eta)\eta u \nabla u dx + \int \eta \nabla u \nabla v dx \\
&= -\frac{3}{4T}\int_{B_r(0)} u^2 dx + \int (\nabla\eta) u \nabla v dx - \int |\nabla\eta|^2 u^2 dx \\
&\quad - \int (\nabla\eta) u \nabla v dx + \int |\nabla v|^2 dx \\
&\ge -(\frac{3}{4T} + cr^{-2})\int_{B_r(0)} |u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun mit einer Integration über t. □

Satz 4.19. *Sei $r > 0$. Für $u \in C^2_1([0,2] \times B_2(0))$ gelte*

$$|u_t + \Delta u| \le \frac{|u|}{4t}$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \textit{für } |x| \le B_r(0).$$

Dann ist $u(0,x) = 0$ für $x \in B_1(0)$.

Satz 4.20. *Sei $r > 0$. Für $u \in C^2_1([0,1] \times \mathbb{R}^d)$ gelte*

$$|u(t,x)| \le e^{\frac{|x|^2}{at}}$$

für ein $a < 8$

$$|u_t + \Delta u| \le \frac{|u|}{4t}$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{für } x \in B_r(0).$$

Dann ist $u(t,x) = 0$ für $0 \le t \le 1$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Satz 4.21. *Sei $a > 8$, $r > 0$ und Funktion $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ mit Träger in $[0,1) \times \mathbb{R}^d$, $u(0,x) = 0$ für $|x| \le r$,*

$$|u_t + \Delta u| \le \frac{1}{t}|u| + f \tag{4.56}$$

und

$$|u(t,x)| \le Ce^{\frac{|x|^2}{at}}.$$

Dann ist

$$\|t^{-\tau-\frac{1}{8}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} u\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)} \le 8\|t^{-\tau+\frac{7}{8}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} f\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)} \tag{4.57}$$

für $\tau \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 4.19. Wir wählen $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit Träger in $B_2(0)$, identisch 1 in $B_1(0)$ und $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\sup \rho \in [-1,1]$, identisch 1 of $[-1/2, 1/2]$. Wir wenden Satz 4.21 auf

$$v(t,x) = u(t,x)\rho(t)\eta(x)$$

an. Dann ist

$$\sup\{t^{-\tau} e^{-1/(8t)}\} = (8\tau/e)^\tau =: K(\theta)$$

da das Maximum in $t_0 = \frac{1}{8\tau}$ mit

$$-\tau + \frac{1}{8t_0} = 0$$

angenommen wird.

Sei

$$E(\tau) = [\frac{1}{16}\tau, \frac{1}{8}\tau] \times B_{\frac{1}{2}}(0).$$

Fur $(t,\tau) \in E(\tau)$ ist

$$t^{-\tau} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} > (t_0/2)^{-\tau} e^{-\frac{1}{32t_0}} = 2^\tau K(\theta)$$

und damit

$$\|u\|_{L^2(E)} \le 2^{-\tau}\|u\|_{L^2([0,1]\times B_1(0)}.$$

Nach Lemma 4.18 folgt

$$\|u(\frac{1}{16\tau},.)\|_{L^2(B_{1/2}(0))} \le c\tau^{1/2}2^{-\tau}\Big(\|u\|_{L^2([0,1]\times B_1(0)} + \|\nabla u\|_{L^2([0,1]\times B_1(0))}\Big)$$

und

$$\|u(0,.)\|_{L^2(B_{1/2}(0))} = \lim_{\tau\to\infty} \|u(\frac{1}{16}\tau,.)\|_{L^2(B_{1/2})} = 0$$

□

Beweis von Satz 4.20. . Zuerst folgt aus Satz 4.19 dass $u(0,x) = 0$. Wir nehmen $v = \rho(t)u$ und erhalten etwas einfacher als oben

$$\|e^{-\frac{|x|^2}{8t}}u\|_{L^2((0,1/4)\times B_{1/2}(x_0))} \le c2^{-\tau}\|e^{-\frac{|x|^2}{8t}}u\|_{L^2([\frac{1}{2},1]\times\mathbb{R}^d)} \le C2^{-\tau}$$

und daher $u(t,x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$ und $0 \le t \le \frac{1}{4}$. □

25.06.2019

Beweis von Satz 4.21. Schritt 1: Unter den Annahmen des Satzes genügt es, die Ungleichung

$$\|t^{-\tau-\frac{1}{8}}e^{-\frac{|x|^2}{8t}}u\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)} \le 2\|t^{-\tau+\frac{7}{8}}e^{-\frac{|x|^2}{8t}}(u_t+\Delta u)\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)} \quad (4.58)$$

zu zeigen, da wir dann den Term mit $\frac{1}{4t}$ auf der rechten Seite durch die linke Seite abschätzen können.

Wir nehmen zunächst an, dass u kompakten Träger in $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ hat und definieren

$$t = e^{-4s}, x = 2e^{-2s}y$$

($s = -\frac{1}{4}\ln t$, $y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x$) und berechnen

$$\partial_s u = \frac{\partial t}{\partial s}\partial_t u + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\partial_{x_j}u = -4tu_t - 2\sum x_j\partial_{x_j}u$$

und damit

$$4tu_t = -u_s - 2\sum_j y_j\partial_{y_j}u.$$

Etwas einfacher ist

$$4t\Delta_x u = \Delta_y u$$

und wir erhalten

$$4t(u_t + \Delta_x u) = -u_s + \Delta_y u - 2\sum_j y_j\partial_{y_j}u.$$

Weiter

$$e^{-|y|^2/2}(\Delta_y u - 2\sum_{y_j} \partial_{y_j} u) = \Delta(e^{-|y|^2/2}u) + de^{-|y|^2/2}u.$$

Damit erhalten wir ($e^{-|y|^2/2} = e^{-\frac{|x|^2}{8t}}$)

$$4t^{1+\frac{d}{4}} e^{\frac{|x|^2}{8t}} (\partial_t + \Delta_x)(t^{-\frac{d}{4}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} u) = (-\frac{d}{ds} + \Delta_y - |y|^2)u. \tag{4.59}$$

Mit

$$v(s,y) = e^{-ds} e^{-\frac{|y|^2}{2}} u(e^{-4s}, \frac{1}{2}e^{-2s}y)$$

wird die Annahme zu

$$v_s - \Delta v + |y|^2 v = |g|$$

wobei

$$g = 4te^{-ds} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} (u_t + \Delta u).$$

Die Ungleichung 4.58 ist äquivalent zu

$$\|e^{(4\tau+\frac{1}{2})s} v\|_{L^2} \leq 2\|e^{(4\tau+\frac{1}{2})s}(v_s - \Delta v + |y|^2 v)\|_{L^2}.$$

Diese letzte Ungleichung wollen wir beweisen. Wir definieren $w = e^{(\tau+\frac{1}{2})s} v$ und $h = e^{(\tau+\frac{1}{2})s} g$ und erhalten

$$v_s - \Delta v + |y|^2 v - (\tau + \frac{1}{2})v = h.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^2}^2 &= \|(\partial_s - \Delta + |x|^2 - \tau)w\|_{L^2}^2 \\ &= \|\partial_s w\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta + |y|^2 - 4\tau)w\|_{L^2}^2 + 2\int \partial_s w(-\Delta w + |y|^2 w - \tau w) dy ds\end{aligned}$$

und für alle y (da w nach Annahme kompakten Träger hat)

$$\int_{\mathbb{R}} (|y|^2 - 4\tau) w w_t dt = 0$$

und für alle t

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_t(-\Delta w) dx = \int \frac{1}{2} \partial_t |\nabla w|^2 dx$$

und das Zeitintegral verschwindet. Mit Korollar 4.17 erhalten wir

$$\|(-\partial_s - \Delta + |x|^2 - \tau)w\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}\|w\|_{L^2}.$$

Wir erhalten

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leq 2\|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}$$

was die Ungleichung 4.21 impliziert.

Wir müssen die Annahme des kompakten Trägers abschwächen. Dazu wählen wir eine Abschneidefunktion $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho(\tau) = 0$ für $\tau \leq \frac{1}{2}$, $\rho(\tau) = 1$ für $\tau \geq 1$ und

$$\eta_r(t,x) = \rho(t^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{t}}/r)$$

für eine kleine Konstante $r > 0$.

Wir setzen u durch Null auf negative Zeiten fort und wenden die obige Abschätzung auf

$$\eta_R u(t-\varepsilon, x)$$

an, wobei $\varepsilon = r^4$ klein gewählt wird. Dadurch ist diese Funktion wohldefiniert, und wir können die volle Abschätzung mit dem Limes $r \to 0$ bekommen. $\square$