Einführung in die PDGs

07.06.2019

Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder

Abgabe: 21.06.2019 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: **5 + 5 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie für $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ das Integral

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}x^\top Ax}\,\mathrm{d}x,$$

wobei

(a) $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (reelle Matrix!) positiv definit und symmetrisch ist,

(b) $A = A_0 + \mathrm{i}\,A_1$ mit A invertierbar und A_1 positiv semidefinit ist, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Nutzen Sie hier gegebenenfalls Fouriertransformationstechniken.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei (f_j) eine Folge integrierbarer Funktionen $f_j \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Wir nennen bekanntlich (f_j) eine *Diracschar*, falls

(a) für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt: $f_j(x) \geq 0$,

(b) für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_j\|_{\mathrm{L}^1} = 1$,

(c) für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d\setminus \mathrm{B}_\varepsilon(0)} f_j(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Sei nun (f_j) eine Diracschar. Zeigen Sie, dass $f_j \to \delta_0$ in $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, d.h. $\langle T_{f_j}, \varphi\rangle \to \langle T_{\delta_0}, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3: **20 Punkte**

Sei $f \in \mathrm{C}^2_{1,b}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie eine explizite Darstellungsformel (Stichwort: Duhamelsches Prinzip/Variation der Konstanten) für Lösungen der Gleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + cu = f & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u = g & \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ und betrachten Sie

$$(\partial_t - \Delta)u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d.$$

(a) Fouriertransformieren Sie diese Gleichung unter der Annahme, dass $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, in der *gemeinsamen Variable* (t,x). Was ist hierbei der konzeptuelle Unterschied zu der Vorgehensweise aus Kapitel 3?

(b) Leiten Sie direkt hierauf aufbauend eine Darstellungsformel für die Lösungen der obigen Gleichung her (durch Fourierinversion in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$!)

Aufgabe 5: **10 Punkte**

Betrachten Sie die Schrödingergleichung $\mathrm{i}\,\partial_t u + \Delta u = 0$ auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ mit Anfangsdatum $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{u}(\tau, \xi) = \widehat{u}_0(\xi)\delta_{\tau-|\xi|^2}$$

gilt, wobei $\delta_{\tau-|\xi|^2} = f(t,\xi)\mathcal{H}^d|_{\{\tau=|\xi|^2\}}$ ist für eine geeignete Funktion f. Bestimmen Sie weiters dieses f, und zeigen Sie, dass für einen geeigneten Vorfaktor $g(t)$ gilt

$$\lim_{t\searrow 0} g(t)e^{-\frac{(\tau-|\xi|^2)^4}{4t}} = \delta_{\tau-|\xi|^2} \qquad \text{in } \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d).$$