Einführung in die PDGs

31.05.2019

PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER

Abgabe: 07.06.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: **1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte**

Es sei $f(x) := \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ die Indikatorfunktion der positiven reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ und berechnen Sie

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_f$.

(b) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}T_f$.

Hierbei ist 'berechnen' in dem Sinne gemeint, dass Sie angeben, wie die entsprechende temperierte Distribution auf Elemente aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ wirkt.

(c) Gibt es ein $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_f = T_g,$$

wobei die Gleichheit in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ zu verstehen ist?

(d) Berechnen Sie für $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ die Faltung $\delta_{x_0} * \delta_{x_1}$. Wie können Sie dies in Einklang bringen mit der Faltung $T_{\delta_{x_0}} * T_{\delta_{x_1}}$?

Aufgabe 2: **6 + 4 = 10 Punkte**

(a) Betrachten Sie für $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die folgende Gleichung auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - u & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in } t = 0. \end{cases}$$

Finden Sie eine Darstellung der Lösung u durch u_0. Orientieren Sie sich dabei an der Herleitung der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung aus der Vorlesung.

(b) Betrachten Sie für $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die folgende Gleichung auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in } t = 0. \end{cases}$$

Bearbeiten Sie dies analog zu (a).

Aufgabe 3: **3 + 4 + 3 = 10 Punkte**

Sei für $x \in \mathbb{R}^d$

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}(\xi),$$

wobei $\mathbb{S}^{d-1}$ die $(d-1)$-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{H}^{d-1}$ das $(d-1)$-dimensionale Hausdorffmaß bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass u eine radialsymmetrische Funktion ist, d.h., es gibt ein $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = h(|x|)$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Zeigen Sie, dass u die PDG $-\Delta u + u = 0$ löst. Leiten Sie darauf basierend eine gewöhliche Differentialgleichung für h wie in Teilaufgabe (a) gegeben her.

(c) Lösen Sie die in (b) gegebene Differentialgleichung – lassen Sie sich hierbei von Aufgabe 2 des letzten Blatts inspirieren. Leiten Sie daraus eine alternative Darstellung der Funktion u her.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Es gehört $x_0 \in \mathbb{R}^d$ zum *Träger* von $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn es für jede offene Umgebung U von x_0 ein $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(U)$ existiert mit $S(\varphi) \neq 0$.
Sei nun speziell $d = 1$ und $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ so, dass der Träger von S genau aus der Null besteht. Zeigen Sie, dass S geschrieben werden kann als

$$S = \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \delta_0,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $c_0, ..., c_N \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Gegeben eine glatte, kompakt getragene Funktion ψ mit $\psi = 1$ in einer Umgebung der Null, betrachte man $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon^{-1}x)$. Was können Sie über die Abbildung $\widetilde{S}_\varepsilon(\varphi) := S(\psi_\varepsilon \varphi)$ aussagen?