Einführung in die PDGs
17.05.2019
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 24.05.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt dient zur Wiederholung und Darstellung der Theorie der harmonischen Funktionen.

Aufgabe 1: **5 + 5 = 10 Punkte**

Sei $d \geq 2$ und $1 \leq p < \infty$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p

(a) alle harmonischen Funktionen $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty$$

(b) alle harmonischen Funktionen $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $0 \in \Omega$. Sei weiters $(u_j) \subset \mathrm{C}^2(\Omega)$ eine (punktweise) nichtfallende Folge harmonischer Funktionen, i.e., $u_j(x) \leq u_{j+1}(x)$ für alle $x \in \Omega$. Angenommen, $(u_j(0))$ ist beschränkt. Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ gibt, sodass $u_j \to u$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gilt.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend und es seien $f, g \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ zwei harmonische Funktionen mit $f = g$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass $f = g$ auf ganz Ω gilt.

Aufgabe 4: Lösung via Fourierreihen **10 Punkte**

Sei $Q_L := (0, L)^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit $L > 0$. Betrachten Sie die folgende Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ in } Q_L, \\ u(0,y) = f(y), \\ u(L,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,L) = 0. \end{cases}$$

(a) Hierbei sei zuerst $f(y) = \sin(\frac{n\pi}{L} y)$ für $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie die obige Gleichung, indem Sie zuerst einen geeigneten Produktansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ machen.

(b) Nun sei $f \in \mathrm{C}^1(\overline{(0, L)})$ eine beliebige Funktion mit $f(0) = f(L) = 0$ mit enstprechender Fourierentwicklung

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right), \quad \text{wobei } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Stellen Sie nun die Lösung u zu diesem allgemeinen Datum f in Abhängigkeit der Koeffizienten a_n dar. Modifizieren Sie hierzu den Produktansatz aus (a) geeignet.