Einführung in die PDGs

10.05.2019

Prof. Dr. H. Koch

Dr. F. Gmeineder

Abgabe: 17.05.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Kugelflächenfunktionen **10 Punkte**

Sei $f\colon \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := x + \frac{z^2}{2}$. Stellen Sie f im Rahmen der Theorie von Kapitel 2.6.5 im Skript – indem Sie f in Polarkoordinaten übersetzen – als eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen dar. Berechnen Sie hierzu die entsprechend benötigten Kugelflächenfunktionen explizit; Ihr Ergebnis sollte nur die von der standardmäßigen Polardarstellung[1] bekannten Winkel (θ, φ) beinhalten.

Aufgabe 2: Rotationsfreie Vektorfelder und Stammfunktionen **3 + 7 = 10 Punkte**

(a) Geben Sie eine offene, nicht einfach zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sowie ein rotationsfreies Vektorfeld $F \in \mathrm{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ an, welches *keine Stammfunktion* auf Ω besitzt.

(b) Sei $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei nun $F\colon \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $F(x) := g(|x|)x$. Zeigen Sie, dass F auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese. Geben Sie weiters die Stammfunktion für die spezielle Wahl $g(t) = t^p$, $p \in \mathbb{Z}$ an.

Auf diesem und dem nächsten Übungsblatt wollen wir uns einem abstrakten Zugang zu Darstellungsformeln auf Gebieten widmen. Wir haben bereits auf dem letzten Blatt gesehen, dass Greensche Funktionen (über die Korrespondenz zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen) hilfreich beim Finden von Darstellungsformeln für holomorphe Funktionen sein können. Für die folgende Aufgabe erinnern wir auf den folgenden Satz aus der Analysis 3:

Satz (Riesz-Fréchet). *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann existiert für jedes Element $f \in \mathcal{H}'$ aus dem Dualraum von $\mathcal{H}$ genau ein $y \in \mathcal{H}$, sodass für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt*

$$f(x) = \langle x, y\rangle.$$

Hierbei verwenden wir die Konvention, dass das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ linear im ersten und semilinear im zweiten Argument ist.

Aufgabe 3: Bergman–Theorie **4 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 = 20 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge. Wir betrachten

$$\mathcal{A}^2(\Omega) := \Big\{ f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\colon \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}m^2 < \infty \Big\}.$$

Hierbei ist m^2 das zweidimensionale Lebesguemaß auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Wir statten $\mathcal{A}^2(\Omega)$ mit der Sesquilinearform

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{A}^2(\Omega)} := \int_\Omega f\overline{g}\,\mathrm{d}m^2, \qquad f, g \in \mathcal{A}^2(\Omega)$$

---

[1] D.h., $(x,y,z)^\top = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))^\top$.

und entsprechend mit $\|f\|_{\mathcal{A}^2(\Omega)} := \sqrt{\langle f, f\rangle_{\mathcal{A}^2(\Omega)}}$ aus.

(a) Zeigen Sie, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ eine Konstante $C = C(K, \Omega) > 0$ existiert, sodass für alle $f \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ gilt

$$\sup_K |f| \leq C\Big(\int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}m^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Zeigen Sie basierend auf (a), dass $(\mathcal{A}^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}^2(\Omega)})$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ ist.

(c) Sei $z \in \Omega$ und die Abbildung $e_z \colon \mathcal{A}^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ gegeben durch $e_z(f) := f(z)$. Zeigen Sie, dass

$$e_z \in (\mathcal{A}^2(\Omega))'$$

und schlussfolgern Sie, dass es ein $k_z \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ gibt mit $e_z(f) = \langle f, k_z\rangle_{\mathcal{A}^2(\Omega)}$ für alle $f \in \mathcal{A}^2(\Omega)$.

(d) In der Situation von (c) definieren wir $K \colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ durch $K(z, \xi) := \overline{k_z(\xi)}$. Zeigen Sie, dass dann

$$K(z, \xi) = \overline{K(\xi, z)}$$

für alle $(z, \xi) \in \Omega \times \Omega$ gilt, und weiters für alle $f \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ und $z \in \Omega$ die Darstellung

$$f(z) = \int_\Omega f(\xi) K(z, \xi) \, \mathrm{d}m^2(\xi)$$

gilt. Wir nennen dann K den *Bergmankern* für Ω.

(e) Zeigen Sie: Ist $H \colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

- $H(\cdot, \xi) \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ für alle $\xi \in \Omega$,
- $H(z, \xi) = \overline{H(\xi, z)}$ für alle $z, \xi \in \Omega$,
- $f(z) = \int_\Omega f(\xi) H(z, \xi) \, \mathrm{d}m^2(\xi)$ für alle $z \in \Omega$,

so ist H der Bergmankern: $H = K$.

(f) Sei nun $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe und sei (φ_k) eine abzählbares Orthonormalbasis in $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Angenommen, wir können zeigen, dass

$$K(z, \xi) := \sum_k \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)}, \qquad (z, \xi) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}. \tag{$\heartsuit$}$$

Zeigen Sie, dass dann der Bergmankern für $\mathbb{D}$ gegeben ist durch

$$K(z, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - z\bar{\xi})^2}, \qquad z, \xi \in \mathbb{D},$$

indem Sie $\varphi_k(\xi) := \xi^{k-1}/\gamma_k$ für geeignete $\gamma_k \in \mathbb{R}$ betrachten. Ziehen Sie Analogien zu Ihnen bereits bekannten Darstellungen von holomorphen Funktionen auf $\mathbb{D}$.

Zusatzaufgabe (10 Bonuspunkte): Begründen Sie, warum $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt und die Darstellung ($\heartsuit$) gilt – unabhängig von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis.