Einführung in die PDGs

12.04.2019
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 19.04.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Zeigen Sie die Rotationsinvarianz der Laplacegleichung: Sei $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^d)$ eine harmonische Funktion und $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine orthogonale Matrix. Dann ist $v(x) := u(Tx)$ ebenfalls harmonisch.

Aufgabe 2: Maximumsprinzip. **2 + 8 = 10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, und sei $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Zeigen Sie, dass dann

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

gilt, einmal

(a) indem Sie dies direkt aus dem starken Maximumsprinzip ableiten, und einmal,

(b) indem Sie die Funktionenschar $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$ für $\varepsilon > 0$ betrachten und zeigen, dass u_ε sein Maximum niemals an einem inneren Punkt annehmen kann (wie folgt dann daraus die obige Gleichheit ?).

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, und seien $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ sowie $g \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$. Sei weiters $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstant $C > 0$ gibt welche nur von Ω abhängt, sodass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C\big(\max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\overline{\Omega}} |f|\big)$$

gilt.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $-\Delta(u(x) + \frac{|x|^2}{2n}\lambda) \leq 0$ für ein geeignetes $\lambda \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4:

Beachten Sie den Zusatz 'zusammenhängend'[1]. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Wir sagen, dass Ω eine innere Kegelbegingung erfüllt, falls das Folgende gilt: Es gibt ein $R > 0$ und ein $h > 0$, sodass der Kegel

$$K := \{(x_1, ..., x_d)^\top : \mathbb{R}^d\colon\ 0 \leq x_d \leq h,\ x_1^2 + ... + x_{d-1}^2 \leq R^2 x_d^2\}$$

---

[1] Danke an Herrn Christian Kremer für das Aufmerksammachen auf das Fehlen dieser Bedingung in einer früheren Version des Blattes.

für jeden Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ so durch eine Rotation $T_{x_0} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ transformiert werden kann, dass $x_0 + T_{x_0}(K) \subset \overline{\Omega}$ gilt. Erfülle nun Ω weiters die innere Kegelbedingung und sei $u \colon \Omega \to [0, \infty)$ harmonisch und sei $x_0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass es $c > 0$ und $s > 0$ gibt mit

$$u(x_0)c^{-1}(\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)))^s \leq u(x) \leq c(\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega))^{-s}u(x_0)$$

für alle $x \in \Omega$.