Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 10

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 27.06.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. (a) (Verallgemeinerung des Satzes von Rouché) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und γ eine Kurve in Ω für die der Cauchy-Integralsatz gilt. Sei außerdem g eine holomorphe Funktion auf Ω und f eine meromorphe Funktion auf Ω die auf γ keine Nullstellen und keine Pole hat. Zeigen Sie dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{z \text{ Nullstelle}} n_{\gamma,z} g(z) - \sum_{z \text{ Pol}} n_{\gamma,z} g(z),$$

wobei über Nullstellen und Pole (mit Vielfachheit) von f summiert wird und $n_{\gamma,z}$ die Umlaufzahl von γ um z bezeichnet.

(b) Sei Ω ein Gebiet, f eine auf Ω holomorphe und nichtverschwindende Funktion, und $\gamma : [0,1] \to \Omega$ eine glatte Kurve mit $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1))$. Zeigen Sie dass $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}$ eine ganze Zahl ist.

(c) Sei f eine elliptische Funktion mit Periodengitter Λ und Grundparallelogram P. Seien $a_1, \dots, a_r$ Nullstellen und $b_1, \dots, b_r$ Pole von f in P. Zeigen Sie dass

$$a_1 + \dots + a_r - b_1 - \dots - b_r \in \Lambda.$$

Aufgabe 2. Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\Lambda^* := \Lambda \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie dass die Reihe

$$-L(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\tau\in\Lambda^*} \frac{z^2}{\tau^2(z-\tau)} = \frac{1}{z} + \sum_{\tau\in\Lambda^*} \Big(\frac{1}{z-\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\tau^2}\Big)$$

für $z \notin \Lambda$ absolut konvergiert und eine meromorphe Funktion definiert.

(b) Zeigen Sie dass $L'(z) = \wp(z)$ für $z \notin \Lambda$.

Aufgabe 3. Wir übernehmen die Notation aus Aufgabe 2. Sei $\omega \in \Lambda$. Zeigen Sie dass die Funktion $L(z) - L(z+\omega)$ konstant ist. Hinweis: summieren Sie die Reihe über verschachtelte schmale Rechtecke in $\mathbb{C}$ deren lange Seite in Richtung ω zeigt.

Aufgabe 4. Das Additionstheorem für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion besagt dass

$$\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\Big)^2, \quad z, w \notin \Lambda.$$

Beweisen Sie dies in der Form

$$4(\wp(z) - \wp(w))^2(\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w)) = (\wp'(z) - \wp'(w))^2.$$

Hinweis: beide Seiten sind elliptische Funktionen von z. Zeigen Sie dass $z = 0$ die einzige (in einem Grundparallelogramm) Polstelle beider Seiten ist und dass sie eine gemeinsame Nullstelle haben. Bestimmen Sie die Laurentreihen an der Stelle 0 bis zur Ordnung -2 (bestimmen Sie dazu die Laurentreihe von $\wp$ an der Stelle 0 bis zur Ordnung 2 und die Formel für $\wp''$ als Funktion von $\wp$).