Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 8

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 13.06.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Greensche Funktionen)**.** (a) Sei $f(x) = g(|x|^2)$ eine radiale Funktion auf $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Zeigen Sie dass $\Delta f(x) = 2dg'(|x|^2) + 4|x|^2 g''(|x|^2)$.

(b) Die Gruppe $O(d)$ der orthogonalen Matrizen wirkt auf dem Raum der zweifach differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger durch $Af(x) = f(Ax)$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie dass $\Delta A f = A \Delta f$ für alle $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ und $A \in O(d)$.

(c) Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ eine zweifach differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie dass

$$\int_{R^2} \Delta f(x) \ln |x| dx = 2\pi f(0).$$

(d) Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$, eine zweifach differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie dass

$$\int_{R^d} \Delta f(x) |x|^{-d+2} dx = -(d-2) A_d \pi f(0),$$

wobei A_d die Fläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Hinweis: führen Sie die letzten beiden Aufgabenteile auf den Fall radialer Funktionen zurück.

Aufgabe 2 (Poissonformel)**.** Sei $u : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine stetige funktion. Dann definiert die Formel

$$f(z) = \int_0^1 \frac{1 - |z|^2}{|e^{2\pi i\theta} - z|^2} u(e^{2\pi i\theta}) d\theta$$

eine harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$.

(a) Zeigen Sie dass diese Funktion eine stetige Fortsetzung auf $\bar{\mathbb{D}}$ besitzt die auf $\partial\mathbb{D}$ mit u übereinstimmt.

(b) Zeigen Sie dass jede weitere stetige Funktion $\tilde{f}$ auf $\bar{\mathbb{D}}$ die auf $\partial\mathbb{D}$ mit u übereinstimmt und auf $\mathbb{D}$ harmonisch ist auf $\mathbb{D}$ mit f übereinstimmt.

Aufgabe 3. Ein *Fixpunkt* einer Funktion f ist ein Punkt x mit $f(x) = x$.

(a) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion mit zwei verschiedenen Fixpunkten. Zeigen Sie dass f die Identität ist.

(b) Konstruieren Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die keine Fixpunkte hat. Hinweis: konstruieren Sie eine solche Funktion zunächst auf einer offenen Halbebene. Mündlich: warum widerspricht die konstruierte Funktion nicht dem Brouwerschen Fixpunktsatz?

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie das Schwarz–Pick-Lemma:

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$