Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 5

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 23.05.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Satz von Hurwitz, qualitative Version)**.** Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ die kompakt gegen eine Funktion f konvergiert und sei $z \in \Omega$ eine Nullstelle von f, also $f(z) = 0$. Zeigen Sie dass dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine Folge (z_n) mit $z_n \to z$ existieren sodass $f_n(z_n) = 0$ für alle $n \geq n_0$.
Hinweis: benutzen Sie das Maximumprinzip in einer Umgebung von z.

Aufgabe 2. Sei f eine ganze Funktion mit $\sup_{|z|=R} f \leq CR^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$, und alle $R > 1$. Zeigen Sie dass f ein Polynom ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie dass eine injektive ganze Funktion f linear sein muss.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst dass die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} f(\frac{1}{z}), & z \neq 0, \\ \infty, & z = 0, \end{cases}$$

meromorph in 0 ist.

Aufgabe 4. Sei f eine Funktion die auf $D_2(0)$ stetig und auf $\{z : |z| \neq 1\} \cap D_2(0)$ holomorph ist. Zeigen Sie dass f auf $D_2(0)$ holomorph ist.