Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 2

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 25.04.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Satz von Liouville)**.** Sei f eine *ganze Funktion*, das heißt dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist. Zeigen Sie dass f konstant sein muss falls $|f|$ beschränkt ist. Hinweis: benutzen Sie die Cauchy-Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

für Dreieckskurven γ mit den Ecken $N, N(i-1), N(-i-1)$ um $f(z_0)$ und $f(0)$ darzustellen. Schätzen Sie die Differenz $|f(z_0) - f(0)|$ anschließend ab und lassen Sie $N \to \infty$ gehen.

Aufgabe 2 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** (a) Folgern Sie aus dem Satz von Liouville den Fundamentalsatz der Algebra: jedes nichtkonstante Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt eine komplexe Nullstelle. Hinweis: zeigen Sie zuerst dass $1/p$ eine beschränkte ganze Funktion sein muss falls p keine Nullstellen besitzt.

(b) Ein nichtkonstantes Polynom über einem Körper K heißt *irreduzibel* falls es nicht als Produkt von Polynomen kleineren Grades geschrieben werden kann. Zeigen Sie dass alle irreduziblen Polynome über $\mathbb{C}$ Grad 1 haben und dass alle irreduziblen Polynome über $\mathbb{R}$ Grad 1 oder 2 haben. Hinweis: benutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra und den Euklidischen Algorithmus. Der letztere liefert für Polynome p, s eine Zerlegung $p = sq + r$ sodass entweder $\deg r < \deg s$ oder $s = 0$ gilt und sei als bekannt vorausgesetzt.

(c) Zeigen Sie dass $\mathbb{C}$ keine echten Körpererweiterung von endlichem Grad besitzt. Hinweis: was ist ein Minimalpolynom?

(d) Zeigen Sie dass $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie nur eine echte Körpererweiterung von endlichem Grad besitzt, nämlich $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3. Die Wirtinger-Ableitungen einer Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind durch $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ definiert.

(a) Drücken Sie die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen und den Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ durch Wirtinger-Ableitungen aus. Folgern Sie dass der Realteil $\mathrm{Re} f$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im} f$ einer auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktion harmonische Funktionen sind.

(b) Sei umgekehrt $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine 2 mal stetig differenzierbare, harmonische Funktion. Zeigen Sie dass eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re} f = u$ existiert.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und sei a ein Element der geschlitzten komplexen Ebene $Y := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Man definiere

$$F_n(a) := \int_{(1,a)} z^n dz.$$

Diese Funktion ist auf Y komplex differenzierbar und $F'(z) = z^n$ für $z \in Y$ (dies folgt aus dem Satz von Goursat und wird voraussichtlich in der Vorlesung am 21.04. gezeigt).

(a) Geben Sie eine explizite Formel für F_n im Fall $n \neq 1$ an.

(b) Im Fall $n = -1$ drücken Sie $F_{-1}(a)$ durch den Real- und Komplexteil von a sowie ln und arctan aus. Die Funktion F_{-1} heißt *der Hauptzweig des komplexen Logarithmus.*

(c) Zeigen Sie dass F_{-1} auf keinen Punkt von $(-\infty, 0]$ stetig fortgesetzt werden kann.

(d) Berechnen Sie die Differenz

$$\int_{(i-1,-i-1)} z^n dz - (F_n(-i-1) - F_n(i-1)), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$