Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 1

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 18.04.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Blaschkefaktor)**.** Man bezeichne die Einheitskreisscheibe mit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Für ein $w \in \mathbb{D}$ definieren wir

$$F(z) := \begin{cases} \frac{w-z}{1-\bar{w}z}, & \bar{w}z \neq 1 \\ 0, & \bar{w}z = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass

(a) $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(b) $|z| = 1 \implies F(z) = 1$

(c) F ist bijektiv auf $\mathbb{D}$ falls $|w| < 1$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie dass der Körper der komplexen Zahlen nicht geordnet werden kann, also dass keine Relation $\succ$ auf $\mathbb{C}$ existiert die die folgenden Axiome erfüllt:

- für alle $z, u \in \mathbb{C}$ gilt genau eine der Relationen $z \succ u$, $u \succ z$, oder $u = z$,
- für alle $z, u, v \in \mathbb{C}$ gilt $u \succ v \implies z + u \succ z + v$,
- für alle $z, u, v \in \mathbb{C}$ gilt $z \succ 0 \wedge u \succ v \implies zu \succ zv$.

Hinweis: unterscheiden Sie die Fälle $i \succ 0$ und $0 \succ i$.

Aufgabe 3. (a) Sei $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie dass für jedes z mit $|z| < R$ die Funktion f um den Punkt z in eine Potenzreihe $f(z+h) = \sum_{n \geq 0} b_n h^n$ mit Konvergenzradius $\geq R - |z|$ entwickelt werden kann.

(b) Finden Sie Beispiele von Potenzreihen mit Konvergenzradius 1 die für alle/keine z mit $|z| = 1$ konvergieren.

(c) Zeigen Sie dass die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} z^n$ für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert. Hinweis: benutzen Sie partielle Summation.

Aufgabe 4 (Körpererweiterungen von $\mathbb{R}$ vom Grad 2)**.** Sei $p = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad 2 ohne reelle Nullstellen.

(a) Lösen Sie die Gleichung $p(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie dass der Ring $\mathbb{R}[X]/\langle p \rangle$ isomorph zum Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist.