MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

http://www.LiB.uni-bonn.de

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn, den 12. Juli 2004
Abgabetermin: 19. Juli 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 12

Definitionen

- Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.
- Sei $F_c := \{I \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus I \text{ ist endlich}\}$ der Filter der coendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und U_c ein Ultrafilter der F_c erweitert.
- Sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U_c$ die Ultrapotenz von $\mathbb{R}$ über U_c. Für $c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sei $[c]$ die Äquivalenzklasse von c bezüglich U_c. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $c_r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die konstante Abbildung $c_r(n) \mapsto r$.
- Auf $\mathbb{R}^*$ definieren wir die Operationen $+^*$ und $\cdot^*$, sowie die Relation $\leq^*$ wie folgt:

$$[a] +^* [b] := [a+b](= [n \mapsto a(n) + b(n)]),$$
$$[a] \cdot^* [b] := [a \cdot b](= [n \mapsto a(n) \cdot b(n)]),$$
$$[a] \leq^* [b] :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a(n) \leq b(n)\} \in U_c.$$

- Außerdem definieren wir $-^*[a] := [-a](= [n \mapsto -a(n)])$.
- Ein angeordneter Körper K heißt **ordnungsvollständig**, falls jede nicht-leere Teilmenge von K, die eine obere Schranke besitzt, eine kleinste obere Schranke besitzt.

Aufgabe 47
Zeigen Sie, dass U_c kein Hauptultrafilter ist. (10 Punkte)

Aufgabe 48
Zeigen Sie, dass $[a] +^* [b]$, $[a] \cdot^* [b]$, $-^*[a]$ und $[a] \leq^* [b]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten a, b für die Äquivalenzklassen $[a], [b]$ abhängen. (15 Punkte)

Aufgabe 49
Zeigen Sie: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = z \;\Leftrightarrow\; [c_x] +^* [c_y] = [c_z]$, $x \cdot y = z \;\Leftrightarrow\; [c_x] \cdot^* [c_y] = [c_z]$, $x \leq y \;\Leftrightarrow\; [c_x] \leq^* [c_y]$. (D.h. $\mathbb{R}$ kann man kanonisch in $\mathbb{R}^*$ einbetten.) (15 Punkte)

Aufgabe 50
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, c_0, c_1)$ ein Körper ist. Dabei ist c_0 das neutrale Element der Addition, c_1 das neutrale Element der Multiplikation und für $[a] \in \mathbb{R}^*$ ist $-^*[a]$ das inverse Element zu $[a]$ bezüglich der Addition. (40 Punkte)

Aufgabe 51
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, \leq^*, c_0, c_1)$ ein angeordneter Körper ist. (20 Punkte)

Aufgabe 52

1. Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{R}^*$ ein infinitesimales Element ungleich 0 gibt. (5 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{R}^*$ ein unendliches Element gibt. (5 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^*$ nicht ordnungsvollständig ist. (10 Punkte)
   (*Hinweis:* Betrachten sie die Teilmenge $\{[c_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$.)