

Einführung in die komplexe Analysis (V2B5)

Matthias Lesch

ZUSAMMENFASSUNG. Vorlesung gehalten im SS 2003 an der Universität zu Köln und im SS 2013 an der Universität Bonn.

Haftungsausschluß: Dieses Dokument ist ein unfertiger Entwurf. Die Benutzung erfolgt auf eigene Gefahr. Haftung des Autors für die Richtigkeit ist ausgeschlossen.

Für Korrekturhinweise bin ich dankbar.

Alle Rechte vorbehalten © Matthias Lesch.

Die aktuelle Version ist lediglich brauchbar bis etwa zum Abschnitt 20 über den Riemannsches Abbildungssatz. Danach ist der Zustand noch reichlich grob.

INHALTSVERZEICHNIS

Abbildungsverzeichnis	4
Vorwort	5
0. Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten	6
1. Komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemann Differentialgleichungen	8
2. Beispiele holomorpher Funktionen	12
3. Analytische Funktionen	14
4. Komplexe Kurvenintegrale	14
5. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$	16
6. Der CAUCHYSche Integralsatz für Sterngebiete	18
7. Erste wichtige Konsequenzen des Cauchyschen Integralsatzes	21
7.A. Die CAUCHYSche Integralformel	21
7.B. Potenzreihenentwicklung	21
7.C. Satz von Liouville und Folgerungen	22
7.D. Identitätssatz	23
7.E. Lokales Verhalten holomorpher Funktionen	24
7.F. Maximum- und Minimumprinzip	25
8. Holomorphe Logarithmen	26
9. Die CAUCHYSche Integralformel für Kreisringe, isolierte Singularitäten	27
9.A. Isolierte Singularitäten	29
9.B. Das Residuum	30
9.C. Meromorphe Funktionen	32
10. Die Riemannsche Zahlenkugel	32
11. Möbius Transformationen	34
12. Folgen holomorpher Funktionen	37
13. Konkrete Partialbruch- und Produktentwicklungen	37
13.A. Partialbruchzerlegung	38
13.B. Produktentwicklung	40
14. Die Gamma Funktion	42
14.A. Ergänzendes Material	45
14.B. Aufbau der Γ -Funktion nach Lebedev	46
15. Die RIEMANNSche ζ -Funktion I	47
15.A. Analytische Fortsetzung	49
16. Der globale CAUCHYSche Integralsatz	51
17. Der Residuensatz	54
18. Anwendungen des Residuensatzes I: Berechnung bestimmter Integrale	55
18.A. Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$	55
18.B. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	56
18.C. Uneigentliche Hauptwertintegrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	58
18.D. Uneigentliche Integrale $\int_0^{\infty} f(x) dx$, Mellin- Transformationen	60

19.	Anwendungen des Residuensatzes II: theoretische Anwendungen	61
19.A.	Null- und Polstellen zählende Integrale	61
19.B.	Die LAGRANGE-BÜRMANN Formel	62
19.C.	Folgen holomorpher Funktionen	65
20.	Der (kleine) RIEMANNSche Abbildungssatz	67
21.	Die RIEMANNSche ζ -Funktion II	67
22.	Der Weierstraßsche Produktsatz für \mathbb{C}	69
23.	Kanonische Weierstraß-Produkte, der Hadamardsche Produktsatz	71
23.A.	Verschärfung des Satzes von Liouville	71
23.B.	Jensens' Formel	73
23.C.	Kanonische Weierstraß Produkte	74
23.D.	Funktionen endlicher Ordnung	74
24.	Die RIEMANNSche ζ -Funktion III: Produktentwicklung	76
25.	Der Primzahlsatz	76
25.A.	Hilfsmittel	77
25.B.	äquivalenz von Asymptotiken	77
25.C.	Beweis des Primzahlsatzes	78
25.D.	Primzahlsatz und RIEMANNSche Vermutung	78
26.	BLOCH, SCHOTTKY UND PICARD	78
26.A.	BLOCH Konstante	78
26.B.	SCHOTTKY	79
27.	Elliptische Funktionen	80
27.A.	Die Liouvilleschen Sätze	82
27.B.	Die \wp -Funktion	83
28.	Miscellanea	84
29.	Anhang: Die Stirling Formel	84
29.A.	Bernoulli Polynome (periodisch)	84
29.B.	Eulersche Summenformel	84
29.C.	Stirling direct	85
30.	Anhang: Harmonische Funktionen	85
	Literatur	86

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1	Eine zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende, Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Die Kurve oszilliert unendlich oft zwischen -1 und 1 ohne den Balken links je in einem festen Punkt zu treffen.	7
2	Die Exponentialfunktion bildet den Streifen rechts zwischen den gepunkteten horizontalen Linien auf die geschlitzte Ebene links, d. h. die komplexe Ebene ohne den fett markierten Halbstrahl, ab.	13
3	Kreisbogen um z_0 mit Radius r . Eine kanonische Parametrisierung ist $z_0 + r \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.	15
4	Zerlegung eines Dreiecks in vier untereinander kongruente Dreiecke.	18
5	Der Ausnahmepunkt liegt in einer Ecke. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ unterteilt man das Dreieck so, dass z_0 im Dreieck Δ_ε vom Umfang $\leq \varepsilon$ liegt.	19
6	Falls der Ausnahmepunkt nicht in einer Ecke liegt, können wir durch Hinzufügen weiterer Linien erreichen, dass er in einer Ecke eines Teildreiecks liegt.	20
7	Zerlegung eines Kreisringes in sternförmige Gebiete. Die Punkte in den Segmenten sind Sternpunkte. Die Anzahl der nötigen Segmente hängt von der Dicke des Kreisringes ab.	28
8	Integrationsweg für das HANKELsche Schleifenintegral.	45
9	Integrationsweg, welcher die in der oberen Halbebene gelegenen Pole umläuft. Es sind Bedingungen zu stellen, die garantieren, dass das Integral über den Halbkreis im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Übrig bleibt dann das reelle Integral von $-\infty$ nach ∞ .	56
10	Integrationswege für den Fall, dass Pole auf der reellen Achse liegen. Ersetzt man die gestrichelten Segmente durch die Halbkreisbögen in der oberen Halbebene, so werden genau die in der oberen Halbebene liegenden Pole umlaufen. Der Defekt zum Hauptwertintegral ergibt sich zu $\pi i \cdot \text{Res}_{z \in \mathbb{R}} \text{Res}_z f$.	59
11		59
12		60

Vorwort

Dies ist eine Ausarbeitung meiner Vorlesungen über Funktionentheorie, welche ich SS 2003 an der Universität zu Köln und im SS 2013 an der Universität Bonn gehalten habe.

Wir setzen die reelle mehrdimensionale Analysis als bekannt voraus. In der Analysis Vorlesung wurde insbesondere das Konvergenzverhalten von Potenzreihen diskutiert und gezeigt, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises lokal gleichmäßig konvergieren und gliedweise differenziert werden dürfen. Dies wird an dieser Stelle nicht nochmals bewiesen.

Von der Lebesgue Theorie machen wir nur sparsam Gebrauch; es werden lediglich die einschlägigen Sätze über das Differenzieren von Parameterintegralen verwendet.

In Analysis III wurden komplex differenzierbare Funktionen kurz diskutiert. Dies soll hier jedoch wiederholt und vertieft werden.

Literatur, einige Standardbücher: Fischer/Lieb [[FiLi80](#), [FiLi88](#)], Jänich [[Jäng3](#)], Remmert [[Rem91](#), [Rem84](#)], Rudin [[Rud87](#)], Busam/Freitag [[BeSo62](#), [FrBu93](#)], Salamon [[Sal11](#)], Ahlfors [[Ahl78](#)], Titchmarsh [[Tit58](#)].

Bonn, im Frühjahr 2015, Matthias Lesch

o. Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten

o.1. Dieser Abschnitt gehört nicht im eigentlichen Sinne zur Funktionentheorie. Ich stelle hier lediglich das für die Funktionentheorie nötigste Material aus der Topologie zusammen. Idealerweise sind die Inhalte dieses Abschnittes aus der Grundvorlesung zur Analysis bereits bekannt und können daher übergangen werden.

In diesem Abschnitt bezeichnen X, Y metrische Räume, in der Funktionentheorie stellen wir uns darunter meist Teilmengen der komplexen Ebene \mathbb{C} vor. Für mich sind metrische Räume stets separiert, d. h. der Abstand $d(x, y)$ verschwindet dann und nur dann, wenn $x = y$ ist. Insbesondere sind einpunktige Teilmengen stets abgeschlossen.

o.2. lokal-konstante Abbildungen. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *lokal-konstant*, falls es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U so gibt, dass $f|_U$ konstant ist. Ist z. B. Y *diskret*, so ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bereits lokal-konstant.

Als Beispiel betrachten wir die Abbildung

$$f : [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Dann ist f lokal-konstant aber nicht konstant.

o.3. Satz. Sei Y ein fest gewählter metrischer Raum mit mindestens 2 Punkten. Dann sind für den metrischen Raum X folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Jede lokal-konstante Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist konstant.
- (2) \emptyset und X sind die einzigen Teilmengen von X , welche sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
- (3) Ist $X = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in offene Teilmengen $A, B \subset X$, so ist bereits $A = \emptyset, B = X$ oder $A = X, B = \emptyset$.

Erfüllt X eine und damit alle der äquivalenten Bedingungen, so heißt X zusammenhängend.

BEWEIS. Da Y mindestens zwei Punkte hat, können wir $a, b \in Y$ wählen mit $a \neq b$. Die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (3) ist offensichtlich.

(1) \Rightarrow (2). Ist $A \subset X$ offen und abgeschlossen, so setze

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f(x) := \begin{cases} a, & x \in A, \\ b, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Da A und $X \setminus A$ offen sind, ist f lokal-konstant. Nach (1) ist f konstant, folglich $A = \emptyset$ oder $X \setminus A = \emptyset$.

(2) \Rightarrow (1). Sei eine lokal-konstante Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gegeben. Ist X die leere Menge, so ist nichts zu zeigen. Wir betrachten daher $x_0 \in X$. Die Menge $A := f^{-1}(\{f(x_0)\})$ ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{f(x_0)\}$ abgeschlossen. Wegen der Lokal-Konstanz von f ist A aber auch offen. Da $x_0 \in A$ ist A nicht leer. Aus (2) folgt nun $A = X$. Folglich ist f konstant gleich $f(x_0)$. \square

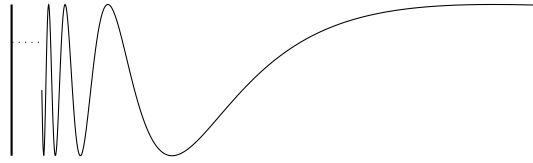


ABBILDUNG 1. Eine zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende, Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Die Kurve oszilliert unendlich oft zwischen -1 und 1 ohne den Balken links je in einem festen Punkt zu treffen.

0.4. Satz. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist J zusammenhängend.

BEWEIS. Sei J ein nicht leeres Intervall, die leere Menge ist sicher zusammenhängend.¹ Seien $a = \inf J \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b = \sup J \in \mathbb{R} \cup \infty$, dann ist $(a, b) \subset J \subset [a, b]$. Wir betrachten eine zugleich offene, abgeschlossene und nicht leere Teilmenge $A \subset J$, wählen $x_0 \in A$ und setzen

$$c := \sup\{x \in J \mid [x_0, x) \subset A\}.$$

Nehmen wir an, es wäre $c < b$. Dann ist jedenfalls $c \in A$, $[x_0, c) \subset A$ und, da A abgeschlossen ist, auch $[x_0, c] \subset A$. Aus der Offenheit folgt nun aber die Existenz eines $\varepsilon > 0$ so, dass auch noch $[x_0, c + \varepsilon) \subset A$. Dies widerspricht aber der Supremumseigenschaft von c . Also muss $c = b$ und folglich $[x_0, b) \subset A$ sein.

Analog sieht man $(a, x_0] \subset A$ und damit $(a, b) \subset A$. Aus der Abgeschlossenheit von A in J folgt nun aber $A = J$. \square

0.5. Satz. Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

BEWEIS. Sei etwa $f : X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend. Sei weiterhin $\varphi : f(X) \rightarrow \{0, 1\}$ eine lokal-konstante Abbildung in den diskreten Zwei-Punkt-Raum $\{0, 1\}$. Dann ist auch $\varphi \circ f$ lokal-konstant und folglich, da X zusammenhängend ist, konstant, etwa $\varphi \circ f \equiv 0$. Dann ist $\varphi \equiv 0$ ebenfalls konstant. \square

0.6. Wegzusammenhang. Eine Kurve (oder auch Weg) ist eine stetige Abbildung $\gamma : [1, b] \rightarrow X$; $\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, $\gamma(b)$ heißt Endpunkt der Kurve. $\text{Sp}\gamma = \gamma([a, b])$ nennt man die Spur von γ .

Der metrische Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ gibt mit $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$.

Man sollte die Kurve γ nicht mit ihrer Spur $\text{Sp}\gamma$ gleichsetzen. Es gibt sicher noch andere Abbildungen $\tilde{\gamma}$ mit gleicher Spur.

BEISPIEL. Es folgt das unvermeidliche Beispiel einer zusammenhängenden, aber nicht wegzusammenhängenden, Teilmenge des \mathbb{R}^2 (Fig. 1):

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \wedge y \in [-1, 1]) \vee (0 < x < \frac{2}{\pi} \wedge y = \sin \frac{1}{x}) \right\}.$$

¹Ich werde auf diesen trivialen Sonderfall nicht immer wieder hinweisen.

0.7. Beispiel: Konvexe und sternförmige Teilmengen des \mathbb{R}^n . Diese sind wegzusammenhängend. Dabei heißt $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig mit Sternpunkt $p \in X$, falls für jedes $q \in X$ die gesamte Verbindungsstrecke $[p, q] = \{t \cdot p + (1-t) \cdot q \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset X$ in X liegt.

Man nennt X *konvex*, falls jedes $p \in X$ bereits ein Sternpunkt ist, also für beliebige $p, q \in X$ die Verbindungsstrecke $[p, q] \subset X$ liegt.

0.8. Satz. 1. *Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang.*

2. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so ist X auch wegzusammenhängend.*

3. *Setzt man $p \sim q$ falls es eine Kurve in X mit Anfangspunkt p und Endpunkt q gibt, so wird durch \sim eine Äquivalenzrelation auf X erklärt. Die Äquivalenzklassen nennt man (Weg)Komponenten von X .*

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, so sind die Wegkomponenten offen und abgeschlossen in X .

BEWEIS. 1. Sei $A \subset X$ offen, abgeschlossen und nicht leer. Wir fixieren ein $x \in A$ und betrachten ein beliebiges $y \in X$. Da X nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist, können wir eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach y wählen. Das Urbild $\gamma^{-1}(A) \subset [0, 1]$ ist offen, abgeschlossen und nicht leer, also nach Satz 0.4 gleich $[0, 1]$. Insbesondere ist $y = \gamma(1) \in A$. Da y beliebig war, ergibt sich $A = X$.

2. Sei $x \in X$ fest. Betrachte die Menge A bestehend aus all denjenigen $y \in X$, zu welchen es eine stetige Verbindungskurve von x nach y gibt. Sicherlich ist $x \in A$, also ist A nicht leer. A ist aber auch offen: ist $y \in A$, so ist für $\varepsilon > 0$ klein genug, da $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, der Ball $B(y, \varepsilon)$ ganz in X enthalten. Dann ist aber für jedes $y' \in B(y, \varepsilon)$ die Verbindungsstrecke $[y, y']$ in $B(y, \varepsilon)$ enthalten. Wir können also x mit y' durch Verknüpfung der Wege von x nach y und der Strecke $[y, y']$ verbinden.

Schließlich ist A auch abgeschlossen: sei dazu $(y_n) \subset A$ eine Folge, welche in X gegen y konvergiert. Wähle wiederum einen Ball $B(y, \varepsilon) \subset X$. Für n groß genug ist $y_n \in B(y, \varepsilon)$ und wie zuvor folgt nun $y \in A$.

A ist also offen, abgeschlossen und nicht leer. Damit ist $A = X$ und X ist wegzusammenhängend.

3. Die Überprüfung dieser Aussage ist eine Routineangelegenheit. \square

1. Komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Wir setzen die reelle mehrdimensionale Analysis als bekannt voraus. In Analysis III wurden komplex differenzierbare Funktionen kurz diskutiert. Dies soll hier jedoch wiederholt und vertieft werden.

1.1. Reell- und komplex lineare Abbildungen. Der Körper \mathbb{C} ist in natürlicher Weise ein 2-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} mit der kanonischen Basis $1, i$. Matrixdarstellungen von Endomorphismen beziehen sich im Folgenden auf diese Basis. Wir schreiben x, y für die entsprechenden kanonischen Koordinatenfunktionen bzw.

$$z = x + y \cdot i, \quad \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Mit $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ bezeichnen wir die \mathbb{R} -linearen Endomorphismen des \mathbb{R} -Vektorraumes \mathbb{C} und mit $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ die \mathbb{C} -linearen Endomorphismen des \mathbb{C} -Vektorraumes \mathbb{C} . Sicherlich ist $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Da $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ ist $\dim_{\mathbb{C}}(\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) = 1$ und folglich $\dim_{\mathbb{R}}(\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) = 2$. Andererseits ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ und daher $\dim_{\mathbb{R}}(\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})) = 2 \times 2 = 4$. Im folgenden Lemma charakterisieren wir $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ in Termen der Matrixdarstellung bzgl. der Basis $1, i$.

1.2. Lemma. Sei $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ ein \mathbb{R} -linearer Endomorphismus von \mathbb{C} mit der Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $1, i$. Dann gilt $Tz = \lambda \cdot z + \mu \cdot \bar{z}$, wobei $\lambda = \frac{1}{2}(a + d + (c - b)i)$ und $\mu = \frac{1}{2}(a - d + (c + b)i)$.

Genau dann ist $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ wenn $\mu = 0$, oder äquivalent $a = d$ und $b = -c$. D. h. $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ genau dann, wenn die Matrixdarstellung die Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ hat.

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} Tz &= T(x + y \cdot i) = x \cdot T(1) + y \cdot T(i) \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2}(a + c \cdot i) + \frac{z - \bar{z}}{2i}(b + d \cdot i) \\ &= \frac{1}{2}(a + d + (c - b) \cdot i) \cdot z + \frac{1}{2}(a - d + (c + b) \cdot i) \cdot \bar{z} \\ &= \lambda \cdot z + \mu \cdot \bar{z}. \end{aligned}$$

Ist T sogar \mathbb{C} -linear, so ist $(\lambda - \mu) \cdot i = T(i) = i \cdot T(1) = i \cdot (\lambda + \mu)$, also $\mu = 0$. Offenbar ist $z \mapsto \lambda \cdot z$ auch \mathbb{C} -linear. \square

Ergänzend bemerken wir, dass $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ allein durch $T(1)$ bestimmt ist. Nach Definition der Matrixdarstellung eines Endomorphismus bzgl. einer Basis ist nämlich $a = \Re(T(1))$ und $b = \Im(T(1))$.

1.3. Wirtinger-Ableitungen. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0 \in U$. Dann ist bekanntlich

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0),$$

wobei $Df(z_0) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ die reelle Ableitungsmatrix bezeichnet.²

Also können wir nach Lemma 1.2 schreiben

$$f(z) = f(z_0) + \lambda \cdot (z - z_0) + \mu \cdot \overline{(z - z_0)} + o(z - z_0).$$

Mit $u = \Re f, v = \Im f$ ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \lambda = \frac{1}{2}(u_x + v_y + (v_x - u_y) \cdot i)(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right)(z_0), \quad (1.1)$$

² o ist die LANDAUSCHE "Klein o" Notation. $o(z - z_0)$ bezeichnet eine Funktion $\varphi(z - z_0)$ mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := \mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)(z_0). \quad (1.2)$$

Mit den sogenannten WIRTINGER-Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ lässt sich rechnen wie mit partiellen Ableitungen nach den unabhängigen Variablen z, \bar{z} .

1.4. Satz und Definition (sog. WIRTINGER-Kalkül). *Die Differentialoperatoren*

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

heißen WIRTINGER-Ableitungen. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

1. Ist f in z_0 differenzierbar, so gilt

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(z - z_0), \quad \text{für } z \rightarrow z_0.$$

2. Die Operatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sind \mathbb{C} -linear und es gilt die LEIBNIZregel

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}.$$

3. Die Operatoren sind mit der komplexen Konjugation verträglich:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}.$$

4. Für die Funktionen $z \mapsto z$ bzw. $z \mapsto \bar{z}$ gilt

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0.$$

5. Sind $g(w), f(z)$ stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \quad (\text{Kettenregel I}).$$

Für $\frac{\partial g \circ f}{\partial \bar{z}}$ gilt eine ³ analoge Formel.

6. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} \circ \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ \varphi \cdot \overline{\frac{d\varphi}{dt}} \quad (\text{Kettenregel II}).$$

BEWEIS. Den einfachen Beweis überlassen wir als Übung. □

1.5. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, falls f in z_0 (reell) differenzierbar ⁴ ist und die Ableitung $Df(z_0)$, die a priori in $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ liegt, sogar komplex linear ist, also sogar in $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ liegt. Die Zahl $f'(z_0) := Df(z_0)(1)$ heißt (komplexe) Ableitung von f im Punkt z_0 .

³die offensichtliche.

⁴d. h. im althergebrachten Sinne der Analysis Vorlesung; manche Leute nennen das auch "total differenzierbar".

f heißt holomorph auf U , falls f in jedem Punkt $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist.

Schreibweise: $\mathcal{O}(U)$ bezeichnet die Menge der auf U holomorphen Funktionen.

1.6. Satz. Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- (1) f ist komplex differenzierbar in z_0 .
- (2) f ist in z_0 im reellen Sinne differenzierbar und es gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.
- (3) f ist in z_0 im reellen Sinne differenzierbar und es gelten mit $u = \Re f, v = \Im f$ im Punkt z_0 die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- (4) Der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

Der Grenzwert in (4) ist dann gleich $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Da es sich bei (4) um den Grenzwert des Differenzenquotienten analog zu Analysis I handelt, schreiben wir auch oft $\frac{d}{dz}$ (also mit geradem "d" für "gewöhnliche Ableitung") an Stelle von $\frac{\partial}{\partial z}$ (mit rundem "∂" für "partielle Ableitung"). Die andere WIRTINGER-Ableitung $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ verschwindet ja für holomorphe Funktionen und spielt daher weiter keine große Rolle.

BEWEIS. Ist f im reellen Sinne differenzierbar im Punkt z_0 , so gilt

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} + o(z - z_0). \quad (1.3)$$

Zusammen mit Lemma 1.2 ergeben sich hieraus unmittelbar die Äquivalenzen (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3). Unter der Annahme von (2) liefert Eq. (1.3) für $z \rightarrow z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + o(1) \quad (1.4)$$

und damit folgt (4). Umgekehrt haben wir unter der Annahme von (4)

$$f(z) =: f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varphi(z),$$

wobei

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right] = 0.$$

Der Vergleich mit Eq. (1.3) zeigt, dass f in z_0 differenzierbar ist und dass $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Damit ist alles gezeigt. \square

1.7. Bemerkung. Bekanntlich ist eine Funktion f von zwei Variablen genau dann stetig differenzierbar, wenn sie stetig partiell differenzierbar ist. Für die Holomorphie von f genügt es also, die stetige partielle Differenzierbarkeit und die CAUCHY-RIEMANN Gleichungen zu zeigen.

1.8. Satz (Rechenregeln für die komplexe Ableitung). Sind f, g komplex differenzierbar in z_0 , so gelten jeweils im Punkt z_0 die Formeln $(f + g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.⁵

Ist f komplex differenzierbar im Punkt $g(z_0)$, so gilt die Kettenregel

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0).$$

Diese Regeln ergeben sich unmittelbar aus den reellen Differentiationsregeln oder aus den Regeln für den WIRTINGER-Kalkül, Satz und Definition 1.4.

2. Beispiele holomorpher Funktionen

2.1. Polynome und Potenzreihen. 1. *Polynome.* Sei $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \in \mathbb{C}[z]$

ein Polynom. Dann ist p holomorph auf ganz \mathbb{C} und $p'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1}$.

Um dies einzusehen, bemerken wir, dass die konstanten Funktionen eine verschwindende (totale) Ableitung haben und damit sicherlich holomorph mit verschwindender komplexer Ableitung sind. Des Weiteren ist nach Satz und Definition 1.4 die Funktion $z \mapsto z$ holomorph mit Ableitung 1. Der Rest ergibt sich nun aus den Rechenregeln Satz 1.8.

2. *Antiholomorphie.* $f(z) := \bar{z}$ ist in keinem Punkt komplex differenzierbar, denn $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$. Man könnte f *antiholomorph* nennen.

3. *Potenzreihen.* Sei

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - a)^j$$

eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Wir wissen aus der Analysis Vorlesung, dass die formal nach z bzw. \bar{z} abgeleiteten Reihen (letztere ist $= 0$ (!)) in der Kreisscheibe $B(a, R)$ lokal gleichmäßig konvergieren. Also können wir unter der Summe differenzieren und erhalten $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, da jeder Summand holomorph ist, sowie

$$f'(z_0) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}.$$

Dies ist wichtig genug, um es als Satz festzuhalten.

2.2. Satz. *Konvergente Potenzreihen stellen im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen dar. Die komplexen Ableitungen ergeben sich durch gliedweises Differenzieren.*

Damit haben wir bereits einen großen Vorrat an holomorphen Funktionen zur Verfügung, z. B. \exp , \sin , \cos , \tan , rationale Funktionen etc.

⁵letzteres natürlich nur falls $g(z_0) \neq 0$.

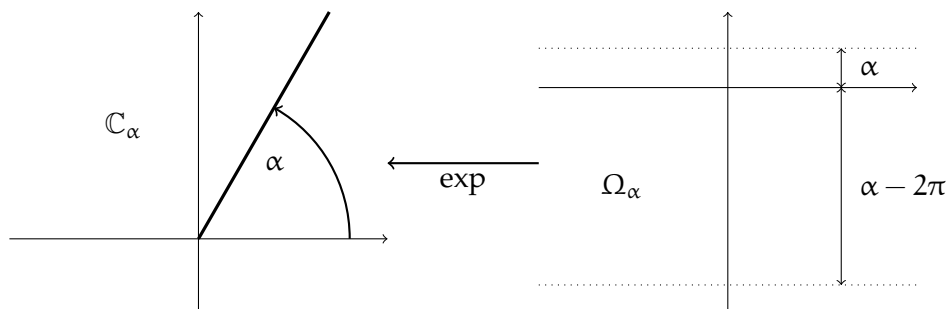


ABBILDUNG 2. Die Exponentialfunktion bildet den Streifen rechts zwischen den gepunkteten horizontalen Linien auf die geschlitzte Ebene links, d. h. die komplexe Ebene ohne den fett markierten Halbstrahl, ab.

2.3. Der Umkehrsatz im Komplexen. Für die nächsten Beispiele benötigen wir eine holomorphe Version des Umkehrsatzes. Sei dazu $f : U \rightarrow V$ stetig komplex differenzierbar, bijektiv, und es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.⁶ Dann ist nach dem Umkehrsatz die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ reell differenzierbar und es gilt $Df^{-1}(f(z)) = (Df(z))^{-1}$.

Nun ist aber $Df(z) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ komplex linear, folglich auch ihre Inverse und wir haben bewiesen:

2.4. Satz. Sei $f : U \rightarrow V$ eine stetig komplex differenzierbare Abbildung zwischen den offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{C}$. Des Weiteren sei f bijektiv und es gelte $f'(z) \neq 0$ für $z \in U$. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ ebenfalls stetig komplex differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

2.5. Zweige des Logarithmus. Seien $\mathbb{C}_{\alpha} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$, $0 < \alpha \leq 2\pi$ und $\Omega_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha - 2\pi < \Im z < \alpha\}$, vgl. Fig. 2. Die Exponentialfunktion $\exp : \Omega_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha}$ ist als Potenzreihe stetig komplex differenzierbar, bijektiv und $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$. Die Umkehrabbildung $\log_{\alpha} : \mathbb{C}_{\alpha} \rightarrow \Omega_{\alpha}$ heißt *Zweig des Logarithmus* in der geschlitzten Ebene \mathbb{C}_{α} . $\log_{\pi} = \log$ heißt *Hauptzweig des Logarithmus*. Es gilt für die Ableitung

$$\frac{d}{dz} \log_{\alpha} z = \frac{1}{\exp(\log_{\alpha} z)} = \frac{1}{z}.$$

2.6. Hauptzweig der n-ten Wurzel. Die Potenzfunktion $z \mapsto z^n$ bildet die offene Menge $\{z \in \mathbb{C}^* \mid 0 \leq |\arg z| < \pi/n\}$ bijektiv auf die geschlitzte Ebene \mathbb{C}_{π} ab. Die Voraussetzungen des Satzes 2.4 sind erfüllt. Die holomorphe Umkehrabbildung $\sqrt[n]{\cdot}$ heißt *Hauptzweig der n-ten Wurzel*. Die Ableitung berechnen wir wie zuvor:

$$\frac{d}{dz} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{nz} \sqrt[n]{z}.$$

⁶Diese Voraussetzung ist redundant, aber das sehen wir erst später im Satz 7.13.

3. Analytische Funktionen

3.1. Analytizität. Alle Beispiele holomorpher Funktionen aus Abschnitt 2 lassen sich lokal in Potenzreihen entwickeln. Man vgl. hierzu die Logarithmusreihe, Binomialreihe aus Analysis I. In der Tat kann man im Rahmen der sog. WEIERSTRASS'schen Funktionentheorie die Funktionentheorie ausgehend vom Begriff der analytischen Funktion aufbauen. Dies werden wir hier nicht tun, wir möchten aber kurz die Verbindung zu der von uns dargestellten CAUCHY'schen Funktionentheorie herstellen.

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *komplex analytisch*, falls es zu jedem $z_0 \in U$ eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

mit einer in einer geeigneten ⁷ Kreisscheibe $B(z_0, \varepsilon)$ konvergenten Potenzreihe gibt.

Analytische Funktionen sind automatisch unendlich oft differenzierbar im Sinne der reellen Analysis.

3.2. Theorem. Für $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- (1) f ist holomorph auf U .
- (2) f ist analytisch auf U .

BEWEIS. Die Richtung (2) \Rightarrow (1) ist klar, da durch Potenzreihen dargestellte Funktionen nach Abschnitt 2.1 holomorph sind.

Die Rückrichtung (1) \Rightarrow (2) ist weniger trivial und wird unten im Abschnitt 7.B bewiesen werden. Selbstredend werden wir die Aussage bis dahin nicht verwenden. \square

4. Komplexe Kurvenintegrale

4.1. Integrationswege. Unter einem Integrationsweg (auch nur "Weg" oder "Kurve") in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ wollen wir eine stetige, stückweise stetig differenzierbare, Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ von einem reellen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ verstehen.

Ist γ ein Integrationsweg, so gibt es also eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ so, dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ eine C^1 -Abbildung ist. Unter der Spur $\text{Sp } \gamma = \text{ran } \gamma$ verstehen wir das Bild von γ .

Ist eine stetige Funktion $f : \text{Sp } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Spur des Integrationsweges γ gegeben, so definieren wir das Kurvenintegral von f über γ durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

BEISPIEL. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(z) = (z - z_0)^k$ und als Integrationsweg den Rand des Kreises (vgl. Fig. 3) vom Radius $r > 0$ um

⁷natürlich nicht trivialen

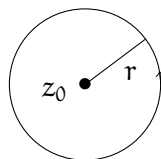


ABBILDUNG 3. Kreisbogen um z_0 mit Radius r . Eine kanonische Parametrisierung ist $z_0 + r \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

z_0 , den wir im mathematisch positiven Sinne einmal durchlaufen: dazu setzen wir $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann ist ⁸

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^k i r e^{it} dt = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = -1. \end{cases} \quad (4.1)$$

$\int_{\gamma} f(z) dz$ hängt nur von der Durchlaufrichtung und nicht weiter von der konkreten Parametrisierung von $\text{Sp } \gamma$ ab. Dazu sei $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig, monoton und stückweise C^1 . Die Substitutionsregel liefert (evtl. sind die Intervalle geeignet zu unterteilen ...)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz &= \int_a^b (f \circ \gamma)(\varphi(t)) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \text{sgn } \varphi' \int_c^d f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \text{sgn } \varphi' \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

Dabei ist $\text{sgn } \varphi'$ entweder 1 oder -1 , je nachdem ob φ wachsend oder fallend ist.

Für den *entgegengesetzten* (also in umgekehrter Richtung durchlaufenen) Weg $\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$ gilt insbesondere $\int_{\gamma^-} = - \int_{\gamma} f$.

4.2. Satz (Holzhammerungleichung⁹ für Kurvenintegrale). *Für Kurvenintegrale gilt die folgende Abschätzung*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \text{Sp } \gamma} |f(z)|.$$

Dabei bezeichnet $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'|$ die Länge von γ sowie $\int_{\gamma} g(z) |dz| := \int_a^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ das Integral bzgl. des Oberflächenmaßes auf $\text{Sp } \gamma$.

BEWEIS. Die Abschätzung folgt aus der entsprechenden Abschätzung für gewöhnliche (RIEMANN- bzw. LEBESGUE-) Integrale mit komplexwertigen

⁸Dieses Kurvenintegral ist zentral für die gesamte Funktionentheorie. Würde das Integral immer verschwinden, dann gäbe es die Funktionentheorie nicht!

⁹Eigentlich "Fundamentalungleichung" genannt. Der "Holzhammer" drückt ganz gut aus, dass die Abschätzung nicht besonders feinfühlig ist; dennoch ist sie ungemein nützlich.

Integranden:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{z \in \text{Sp } \gamma} |f(z)| \int_a^b |\gamma'| = L(\gamma) \cdot \max_{z \in \text{Sp } \gamma} |f(z)|. \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden verwenden wir gelegentlich die Schreibweise

$$\|f\|_{\infty, \text{Sp } \gamma} := \max_{z \in \text{Sp } \gamma} |f(z)|$$

für die Supremumsnorm einer Funktion (hier f) auf einer Menge (hier die Spur von γ).

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich der entsprechende Satz für Wegintegrale.

4.3. Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Wegintegrale). Sei $F \in \mathcal{O}(U)$ stetig komplex differenzierbar auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg in U . Dann gilt

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere ist $\int_{\gamma} F' = 0$, falls γ geschlossen ist.

BEWEIS. Wir schreiben das Kurvenintegral aus und verwenden den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis I:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(z) dz &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square \end{aligned}$$

4.4. Beispiel. Für $n \neq -1$ hat $z \mapsto (z - a)^n$ die Stammfunktion $\frac{1}{n+1}(z - a)^{n+1}$; folglich ist $\int_{\gamma} (z - a)^n dz = 0, n \neq -1$, für jeden geschlossenen Weg γ in \mathbb{C} .

In der geschlitzten Ebene \mathbb{C}_{α} (vgl. (2.5)) ist \log_{α} eine Stammfunktion von $1/z$. Also gilt $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$ für jeden geschlossenen Weg in \mathbb{C}_{α} . Andererseits gilt $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (vgl. Beispiel (4.1)). Also kann $z \mapsto \frac{1}{z}$ in \mathbb{C}^* keine Stammfunktion besitzen! ¹⁰

5. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$

5.1. Die Umlaufszahl (Windungszahl). Für einen geschlossenen Weg γ und $a \notin \text{Sp } \gamma$ heißt

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

¹⁰Dieses Beispiel basiert natürlich auf dem gleichen Phänomen wie das Beispiel im Abschnitt 4.1 oben. Hätte auch noch $1/z$ eine globale Stammfunktion, so wäre die Theorie des komplexen Logarithmus und damit die Funktionentheorie trivial!

die Umlaufszahl (oder auch Windungszahl) von γ um a .¹¹

5.2. Lemma. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ stetig komplex differenzierbar und γ ein Weg in U . Dann ist

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'}{f}(z) dz\right) = \frac{f(\gamma(b))}{f(\gamma(a))}.$$

Letzteres ist natürlich $= 1$ falls γ geschlossen ist.

BEWEIS. Die Funktion

$$\Phi(t) := \exp\left(-\int_a^t \frac{f'}{f}(\gamma(s))\gamma'(s) ds\right) \cdot f(\gamma(t))$$

ist stetig, stückweise stetig differenzierbar, und es gilt $\Phi'(t) = 0$.¹² Also ist Φ konstant, insbesondere ist

$$f(\gamma(a)) = \Phi(a) = \Phi(b) = \exp\left(-\int_{\gamma} \frac{f'}{f}\right) \cdot f(\gamma(b)). \quad \square$$

5.3. Satz. Sei γ ein geschlossener Weg in \mathbb{C} . Dann ist $n(\gamma, \cdot)$ lokal-konstant, \mathbb{Z} -wertig auf $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$, sowie $= 0$ auf der unbeschränkten Wegkomponente¹³ von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$. Es gilt

$$\oint_{|\zeta-a|=r} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \text{ oder } |z-a| > r, \\ 2\pi i, & n = 1 \text{ und } |z-a| < r. \end{cases}$$

BEWEIS. Aus den Sätzen über Parameterintegrale¹⁴ folgt die Differenzierbarkeit von $n(\gamma, \cdot)$ und

$$\frac{d}{dz} n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(\zeta-z)^2} d\zeta = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = 0,$$

also ist $n(\gamma, \cdot)$ auch lokal-konstant. Nun wenden wir das Lemma 5.2 mit $f(\zeta) = \zeta - z$ an und erhalten, da γ geschlossen ist,

$$e^{2\pi i \cdot n(\gamma, z)} = \exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta\right) = 1,$$

also ist $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$. Schließlich ist

$$|n(\gamma, z)| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \text{dist}(z, \text{Sp } \gamma) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0,$$

somit verschwindet $n(\gamma, z)$ auf der unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$.

¹¹Zum dritten und letzten Mal erfolgt hier der Hinweis mit erhobenem Zeigefinger, dass das vorstehende Integral von zentraler Bedeutung für die Funktionentheorie ist, vgl. dazu das Beispiel im Abschnitt 4.1 und Beispiel 4.4.

¹²Man rechne das nach!

¹³Man zeige, dass $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$ in der Tat genau eine unbeschränkte Wegkomponente besitzt. Dieses Ergebnis ist für den Satz jedoch nicht so wesentlich und wird auch nicht benutzt. Der Beweis zeigt, dass $n(\gamma, \cdot)$ auf jeder unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$ verschwindet. Dass es nur eine solche Wegkomponente gibt, brauchen wir an dieser Stelle nicht wirklich zu wissen.

¹⁴Es genügen dazu die einfachen Sätze aus Analysis I.

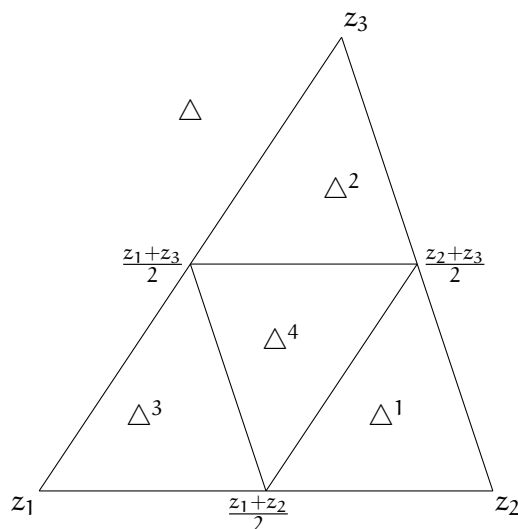


ABBILDUNG 4. Zerlegung eines Dreiecks in vier untereinander kongruente Dreiecke.

Bleibt nur noch $\int_{|\zeta-a|=r} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, |z-a| < r$, zu behandeln. Wegen der bereits bewiesenen Lokal-Konstanz von $n(\gamma, \cdot)$ dürfen wir o. B. d. A. $z = a$ annehmen. Dann erhalten wir mit dem Beispiel im Abschnitt 4.1

$$\int_{|\zeta-a|=r} \frac{d\zeta}{\zeta-a} = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} rie^{it} dt = 2\pi i. \quad \square$$

6. Der Cauchysche Integralsatz für Sterngebiete

6.1. Vorbereitung. Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck. Indem wir die Mittelpunkte der Seitenlinien durch Strecken miteinander verbinden, unterteilen wir Δ in vier kongruente Dreiecke $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$, vgl. Fig. 4. Offenbar gilt für deren Umfang ($L(\dots)$) und Durchmesser ($\text{diam}(\dots)$)

$$L(\partial\Delta^j) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta), \tag{6.1}$$

$$\text{diam } \Delta = \max_{z,w \in \Delta} |z-w| \leq L(\partial\Delta). \tag{6.2}$$

Letzteres ist eine grobe Abschätzung (vgl. Holzhammer 4.2), es kommt uns hier auf Optimalität nicht an. Weiterhin gilt für eine stetige Funktion $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta^j} f(z) dz. \tag{6.3}$$

6.2. Lemma (Integrallemma von GOURSAT). Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, sowie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$.

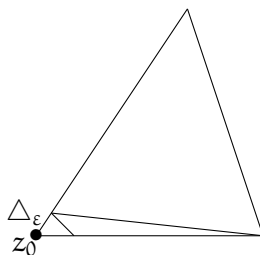


ABBILDUNG 5. Der Ausnahmepunkt liegt in einer Ecke. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ unterteilt man das Dreieck so, dass z_0 im Dreieck Δ_ε vom Umfang $\leq \varepsilon$ liegt.

BEWEIS. 1. Fall I: f ist auf ganz Δ holomorph, d. h. $z_0 \notin \Delta$. Wir zerlegen Δ wie oben. Sei $\Delta_1 \in \{\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4\}$ so, dass

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|.$$

So fortfahrend erhalten wir eine Folge $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ kompakter Dreiecke mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|, \quad (6.4)$$

$$L(\partial\Delta_n) \leq 2^{-n} L(\partial\Delta), \quad (6.5)$$

$$\text{diam}(\Delta_n) \leq L(\partial\Delta_n) \leq 2^{-n} L(\partial\Delta) \rightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Aus Kompaktheitsgründen existiert also genau ein $z^* \in \Delta$ mit $\bigcap_n \Delta_n = \{z^*\}$. Die komplexe Differenzierbarkeit in z^* liefert

$$f(z) = f(z^*) + f'(z^*) \cdot (z - z^*) + (z - z^*) \cdot r(z),$$

wobei $\lim_{z \rightarrow z^*} r(z) = 0$. Da die Abbildung $z \mapsto f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*)$ die Stammfunktion $z \mapsto f(z^*)(z - z^*) + \frac{1}{2} f'(z^*)(z - z^*)^2$ besitzt, ist nach Satz 4.3

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*) dz = 0.$$

Dies ist der alles entscheidende Punkt. Es folgt nun nämlich mit Eq. (6.4)–(6.6)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta_n} (z - z^*) r(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\partial\Delta_n) \cdot \text{diam}(\Delta_n) \cdot \max_{z \in \partial\Delta_n} |r(z)| \\ &\leq L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{z \in \partial\Delta_n} |r(z)|. \end{aligned}$$

Da letzteres für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, folgt die Behauptung $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

2. Fall II: $z_0 \in \Delta$. Diesen Fall führt man leicht auf Fall I zurück. Ist z_0 ein Eckpunkt, so zerlegen wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ das Dreieck in weitere Teildreiecke, so dass z_0 Eckpunkt eines Teildreiecks Δ_ε vom Umfang $\leq \varepsilon$

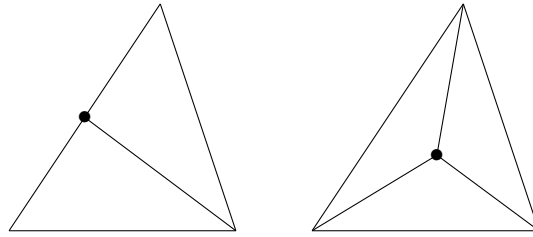


ABBILDUNG 6. Falls der Ausnahmepunkt nicht in einer Ecke liegt, können wir durch Hinzufügen weiterer Linien erreichen, dass er in einer Ecke eines Teildreiecks liegt.

wird, s. Fig. 5. Dann verschwinden nach dem bewiesenen Teil I alle Integrale über die Teildreiecke, welche den Punkt z_0 nicht enthalten. Folglich, $|\int_{\partial\Delta} f| = |\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f| \leq \|f\|_{\infty, \Delta} \cdot \varepsilon$ und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\int_{\Delta} f = 0$.

Denn Fall eines beliebig gelegenen z_0 kann man durch Hinzufügen weiterer Linien leicht auf den Fall eines Eckpunktes zurückführen, s. Fig. 6. □

6.3. Theorem (CAUCHYSCHER Integralsatz für Sterngebiete). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges ¹⁵ Gebiet und sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten holomorph ist. Dann hat f eine Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \tag{6.7}$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G .

BEWEIS. Eq. (6.7) folgt aus Satz 4.1 sobald wir die Existenz einer Stammfunktion gezeigt haben. Wir wählen einen Sternpunkt z^* von G und setzen

$$F(z) := \int_{[z^*, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei $[z^*, z]$ die linear parametrisierte Verbindungsstrecke ¹⁶ von z^* nach z bezeichnet. Für $z_0, z \in G$ ist dann nach dem Lemma 6.2 $F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$ und folglich

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\zeta) - f(z_0) d\zeta \right| \\ &\leq \sup_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Letzteres konvergiert wegen der Stetigkeit von f für $z \rightarrow z_0$ gegen 0. □

¹⁵vgl. Abschnitt 0.

¹⁶ $t \mapsto (1 - t)z^* + tz$

6.4. Elementargebiete. Eines unserer Ziele wird sein, diejenigen Gebiete zu charakterisieren, in denen der CAUCHYSche Integralsatz gilt. Einstweilen nennen wir ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ein *Elementargebiet*, falls jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt und somit $\int_{\gamma} f = 0$ für jeden geschlossenen Weg in G . Wir bemerken noch:

- Sternförmige Gebiete sind Elementargebiete.
- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein Elementargebiet.

Letzteres folgt aus der oben im Beispiel 4.4 bewiesenen Tatsache, dass die Funktion $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzt.

7. Erste wichtige Konsequenzen des Cauchyschen Integralsatzes

7.A. Die Cauchysche Integralformel

7.1. Satz. Seien γ ein geschlossener Weg in einem Sterngebiet G sowie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $z \in G$

$$n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

insbesondere gilt für jeden in G gelegenen abgeschlossenen Kreis $\overline{B(a, r)} \subset G$ und $z \in B(a, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z - a| < r.$$

BEWEIS. Die Hilfsfunktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z, \end{cases}$$

ist auf G stetig und auf $G \setminus \{z\}$ holomorph. Also gilt nach dem CAUCHYSchen Integralsatz für Sterngebiete 5.3

$$0 = \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \cdot n(\gamma, z) \cdot 2\pi i. \quad \square$$

7.B. Potenzreihenentwicklung

7.2. Theorem. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann ist f analytisch auf G . Genauer sei $B(z_0, r) \subset G$ eine offene Kreisscheibe. Mit

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad 0 < \rho < r,$$

gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei diese Potenzreihe mindestens Konvergenzradius r hat.

7.3. Bemerkung. 1. Damit ist Theorem 3.2 vollständig bewiesen.

2. Aus dem Theorem folgt, dass die Potenzreihe von f um z_0 mindestens im größten ganz in G gelegenen offenen Kreis um z_0 konvergiert.

7.4. Korollar (CAUCHYSche Abschätzungen für Taylorkoeffizienten). *Mit den Bezeichnungen des Theorems 7.2 gilt*

$$|a_n| \leq \|f\|_{\partial B(z_0, r)} \cdot r^{-n}.$$

Natürlich ist dies nur sinnvoll, falls f auf der Kreisscheibe $B(z_0, r)$ beschränkt ist.

BEWEIS. Für $0 < \rho < r$ setzen wir $C_\rho := \|f\|_{\partial B(z_0, \rho)}$ und erhalten mit der Holzhammerungleichung 4.2

$$|a_n| \leq \rho \cdot C_\rho \cdot \rho^{-n-1},$$

woraus durch Grenzübergang $\rho \rightarrow r$ die Behauptung folgt. □

BEWEIS DES THEOREMS 7.2. Sei $z \in B(z_0, r)$ gegeben. Fixiere ρ mit $|z - z_0| < \rho < r$, etwa $\rho = (r + |z - z_0|)/2$. Dann liefert die geometrische Reihe für ζ mit $|\zeta - z_0| = \rho$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (7.1)$$

Für $|\zeta - z_0| = \rho$ haben wir

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^n \frac{1}{\rho},$$

wobei $|z - z_0|/\rho < 1$. Man beachte, dass die rechte Seite unabhängig von ζ ist. Folglich konvergiert die Reihe Eq. (7.1) normal auf dem Kreisrand $|\zeta - z_0| = \rho$. Also erhalten wir mit Satz 7.1 durch Vertauschung von Summation und Integration

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

7.5. Korollar (MORERA). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und für jedes in U gelegene abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$ gelte $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$. Dann ist f holomorph.*

BEWEIS. Holomorphie ist eine lokale Eigenschaft, also o. B. d. A. sei U ein sternförmiges Gebiet. Wie im Beweis von Theorem 6.3 zeigt man, dass f eine Stammfunktion F hat. Diese ist nach Theorem 7.2 analytisch. Folglich ist auch $F' = f$ analytisch und damit holomorph. □

7.C. Satz von Liouville und Folgerungen

7.6. Ganze Funktionen. Hierunter versteht man auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktionen. Ist f eine solche Funktion, so besitzt sie nach Theorem 7.2 eine Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (7.2)$$

mit Konvergenzradius ∞ .

7.7. Satz (Liouville). Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze holomorphe Funktion, die polynomial beschränkt ist, d. h. $|f(z)| \leq C|z|^N$ für $|z| \geq R$. Dann ist $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $\leq N$.

Ist f beschränkt ($N = 0$), so ist f bereits konstant.

Der Satz von Liouville läßt sich noch verschärfen, man vgl. hierzu das Korollar 23.4.

BEWEIS. Wir wenden die CAUCHYSCHEN Abschätzungen Korollar 7.4 auf die Potenzreihe Eq. (7.2) an und erhalten für $r \geq R$

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq Cr^{N-n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

falls $n > N$. □

Es folgt der unvermeidliche funktionentheoretische Beweis des sog. Fundamentalsatzes der Algebra. Wir haben diesen Satz in Analysis I bereits hinreichend diskutiert, so dass wir uns hier kurz fassen dürfen.

7.8. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). Sei $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann besitzt P eine komplexe Nullstelle.

BEWEIS. Sei $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, $a_n \neq 0$, ohne Nullstellen. Es folgt

$$|P(z)| = |a_n| \cdot |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n,$$

für $|z| \geq R$ groß genug. Also ist $f(z) := 1/P(z)$ eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leq C|z|^{-n}$, $|z| \geq R$. Folglich ist f beschränkt und nach Liouville 7.7 damit konstant. Also sind die konstanten Polynome $\neq 0$ die einzigen nullstellenfreien Polynome und der Satz ist bewiesen. □

7.D. Identitätssatz

7.9. Satz (Identitätssatz). Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:

- (1) $f = g$,
- (2) In einem Punkt $z_0 \in G$ stimmen Funktionswert und sämtliche Ableitungen von f und g überein.
- (3) Es gibt eine Folge $(z_n) \subset G \setminus \{a\}$ mit $z_n \rightarrow a \in G$, so dass $f(z_n) = g(z_n)$ für $n = 0, 1, \dots$ gilt.

WARNUNG. In (3) ist wesentlich, dass der Häufungspunkt a in G liegt. Als warnendes Beispiel betrachte die auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f(z) = \sin(1/z)$. Diese ist sicherlich nicht 0. Allerdings gilt $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0$.

BEWEIS. Indem wir $f - g$ statt f betrachten, dürfen wir o. B. d. A. $g = 0$ annehmen. Die Implikation (1) \Rightarrow (2) ist klar.

(2) \Rightarrow (3). Nach Theorem 7.2 hat f eine in einem Kreis $B(z_0, \varepsilon) \subset G$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0,$$

die a posteriori nach (2) verschwindet. Die gewünschte Folge erhalten wir nun etwa durch $z_n := z_0 + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$

(3) \Rightarrow (1). Wieder nach Theorem 7.2 gilt für $z \in B(a, \varepsilon) \subset G$ mit geeignetem $\varepsilon > 0$ die Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum a_n (z - a)^n$.

Es ist $a_0 = f(a) = \lim f(z_n) = 0$. Induktiv sei schon $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$ gezeigt. Die Funktion

$$\tilde{f}(z) := (z - a)^{-m-1} f(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - a)^{n-m-1}$$

ist holomorph auf $B(a, \varepsilon)$ und

$$a_{m+1} = \tilde{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - a)^{-m-1} f(z_n) = 0.$$

Also verschwindet f auf der offenen Kreisscheibe $B(a, \varepsilon)$.

Wir betrachten nun die Menge $M := \{z \in G \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n\}$. Nach vorstehender Überlegung ist M offen und nicht leer, da $a \in M$. Aus der Stetigkeit der Ableitungen (Theorem 7.2!) folgt schon die Abgeschlossenheit von M . Als nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge der zusammenhängenden Menge G muss folglich $M = G$ sein. \square

7.E. Lokales Verhalten holomorpher Funktionen

7.10. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant. Fixiere $a \in G$, $b := f(a)$. Nach dem Identitätssatz 7.9 2 können nicht alle Ableitungen von f im Punkt a verschwinden. Daher gilt in einer Kreisscheibe $B(a, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} f(z) &= b + \sum_{n=N} a_n (z - a)^n, \quad a_N \neq 0 \\ &=: b + (z - a)^N g(z) \end{aligned}$$

mit einer in $B(a, \varepsilon)$ holomorphen Funktion g mit $g(a) = a_N \neq 0$. Sei $\sqrt[N]{\cdot}$ ein holomorpher Zweig der N -ten Wurzel auf $B(a_N, \delta)$ für geeignetes $\delta > 0$ (vgl. Abschnitt 2). Dann ist

$$f(z) = b + \left((z - a) \sqrt[N]{g(z)} \right)^N =: b + \Psi(z)^N.$$

Wegen $\Psi(a) = 0, \Psi'(a) = \sqrt[N]{g(a)} \neq 0$ bildet Ψ eine Umgebung von a biholomorph auf eine Umgebung der 0 ab und mit $\varphi = \Psi^{-1}$ erhalten wir $f \circ \varphi(w) = b + w^N$.

Sei etwa φ definiert auf $B(0, \rho)$. Dann ist $V = \varphi(B(0, \rho))$ eine offene Umgebung von a mit $f(V) = B(b, \rho^N)$. Weiterhin ist

- (1) $f^{-1}(\{b\}) \cap V = \{a\}$,
- (2) Für jedes $w \in B(b, \rho^N)$, $w \neq b$, ist

$$\#(f^{-1}(\{w\}) \cap V) = N.$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

7.11. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant, $a \in G, b := f(a)$. Dann gibt es ein wohlbestimmtes $N > 0$, genannt die Vielfachheit mit der f den Wert b in a annimmt, so dass $f^{(l)}(a) = 0, 1 \leq l \leq N - 1, f^{(N)}(a) \neq 0$. Des Weiteren gibt es eine biholomorphe Abbildung $\varphi : B(0, \rho) \rightarrow V$ auf eine Umgebung V von a , so dass $f \circ \varphi(z) = z^N + b, z \in B(0, \rho)$. Weiterhin

- (1) $f(V) = B(b, \rho^N)$.
- (2) $f^{-1}(\{b\}) \cap V = \{a\}$.
- (3) Zu jedem $z \in B(b, \rho^N) \setminus \{b\}$ gibt es genau N verschiedene Punkte $w \in V$ mit $f(w) = z$.

7.12. Satz (Satz von der Gebietstreue). Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant. Dann ist f offen, insbesondere ist das Bild $f(G)$ ein Gebiet.

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Satz 7.11. □

7.13. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ injektiv. Dann ist stets $f'(z) \neq 0$ und f ist eine biholomorphe Abbildung von G auf das Gebiet $f(G)$.

BEWEIS. Nach Satz 7.11 kann f in der Nähe einer Nullstelle von f' nicht injektiv sein. Der Rest ergibt sich aus Satz 7.12. □

7.F. Maximum- und Minimumprinzip

7.14. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ holomorph auf dem Gebiet G .

1. Hat $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist f konstant. Ist G beschränkt und f auf \bar{G} stetig (fortsetzbar), so gilt $\|f\|_{\infty, G} \leq \|f\|_{\infty, \partial G}$, d. h. f nimmt sein Betragsmaximum auf dem Rand von G an.

2. Hat $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant. Ist G beschränkt und f auf \bar{G} stetig (fortsetzbar), so hat f Nullstellen in G oder $|f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ für alle $z \in G$.

BEWEIS. 1. Seit $U \subset G$ eine offene Umgebung von z_0 mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in U$. Dann ist

$$f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(z_0)|\}$$

sicherlich keine Umgebung von $f(z_0)$. Nach dem Satz von der Gebietstreue 7.12 ist dann f konstant. Die zweite Behauptung unter 1. folgt aus der ersten.

2. Ist $f(z_0) \neq 0$ so ist $f(z) \neq 0$ in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{B}(z_0, \varepsilon) \subset G$. Wende 1. auf $\frac{1}{f}$ an. Dann ist f konstant in $B(z_0, \varepsilon)$ und nach dem Identitätssatz 7.9 dann auf ganz G . Den zweiten Teil zeigt man analog. □

Als Anwendung zeigen wir:

7.15. Satz (Lemma v. H. A. SCHWARZ). Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der Einheitskreis und $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine holomorphe Selbstabbildung mit $f(0) = 0$. Dann gilt

- (1) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

$$(2) |f'(0)| \leq 1.$$

Gilt in einer der beiden Ungleichungen Gleichheit für auch nur ein $z \in \mathbb{E}$, so ist f schon eine Drehung, d. h. es gibt eine Zahl λ vom Betrag 1, so dass $f(z) = \lambda \cdot z$ für $z \in G$.

BEWEIS. Wegen $f(0) = 0$ ist die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

auf \mathbb{E} holomorph. Das Maximumprinzip 7.14 liefert für $z \in \mathbb{E}$ und $|z| < r < 1$

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| \leq \frac{1}{r}.$$

Der Grenzübergang $r \rightarrow 1$ liefert $|g(z)| \leq 1$ und somit die 1. Behauptung.

Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist $|g(z_0)| = 1$ oder $|g(0)| = 1$. $|g|$ nimmt also in \mathbb{E} ein Maximum an und das Maximumprinzip 7.14 impliziert, dass g konstant sein muss. Folglich ist $g(z) \equiv \lambda$ mit $|\lambda| = 1$, und $f(z) = \lambda \cdot z$. \square

8. Holomorphe Logarithmen

8.1. Logarithmische Ableitung. Existiert auf dem Bild der holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ ein Zweig \log des Logarithmus, so liefert die Kettenregel Satz 1.8

$$\frac{d}{dz} (\log \circ f)(z) = \frac{f'}{f}(z).$$

Man nennt daher den Ausdruck $\frac{f'}{f}$ die *logarithmische Ableitung* von f . Dieser ist außerhalb der Nullstellen von f immer definiert, unabhängig von der Existenz von $\log f$. Manchmal werden wir statt $\frac{f'}{f}$ auch suggestiv $\frac{d}{dz} \log f(z)$ schreiben. Mit dieser Schreibweise wird nicht behauptet, dass ein Zweig des Logarithmus auf dem Bild von f existiert. Für die logarithmische Ableitung gilt noch die Rechenregel

$$\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}, \tag{8.1}$$

d. h. für die logarithmische Ableitung kann man so tun, also ob $\log(f \cdot g) = \log f + \log g$ gelten würde.

Wir notieren noch:

8.2. Lemma. Seien $f, g \neq 0$ bis auf isolierte Singularitäten¹⁷ holomorphe Funktionen auf dem Gebiet G . Aus $f' \cdot g = g' \cdot f$ folgt schon $f = c \cdot g$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

¹⁷d. h. es gibt (z.B. für f) eine diskrete Ausnahmemenge $P_f \subset G$, so dass f auf $G \setminus P_f$ holomorph ist. Isolierte Singularitäten werden systematisch im nächsten Abschnitt besprochen werden.

BEWEIS. Da g nicht verschwindet, ist auch f/g eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion auf G . Differentiation liefert

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} = 0,$$

also ist f/g konstant auf G . □

8.3. Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ eine nullstellenfreie holomorphe Funktion; z. B. $G \subset \mathbb{C}^*, f(z) = \frac{1}{z}$.

Eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ heißt holomorpher Logarithmus zu f , falls $\exp \circ g = f$. Da \exp lokal biholomorph ist (vgl. Abschnitt 2.5), sieht man, dass eine stetige Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp \circ g = f$ bereits ein holomorpher Logarithmus zu f ist. Ein holomorpher Logarithmus existiert sicher immer dann, wenn auf dem Bild von f ein Zweig des Logarithmus existiert. Allerdings ist diese Bedingung nicht notwendig: die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist bekanntlich surjektiv und bekanntlich existiert auf deren Bild \mathbb{C}^* (vgl. Beispiel 4.4) kein Zweig des Logarithmus. Dennoch besitzt \exp den trivialen holomorphen Logarithmus $\text{id}_{\mathbb{C}^*}$.

8.4. Satz. Für ein Gebiet G und eine nullstellenfreie holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ sind äquivalent:

- (1) f besitzt einen holomorphen Logarithmus auf G .
- (2) Die Funktion $\frac{f'}{f}$ besitzt eine Stammfunktion auf G .

Insbesondere existiert also auf jedem Elementargebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Zweig des Logarithmus.

BEWEIS. Ist $f = e^g$ so liefert Differenzieren $f' = g'e^g = g'f$, also $g' = \frac{f'}{f}$.

Besitzt umgekehrt $\frac{f'}{f}$ die Stammfunktion \tilde{g} , so ist $(fe^{-\tilde{g}})' = f'e^{-\tilde{g}} - f\frac{f'}{f}e^{-\tilde{g}} = 0$, also ist $fe^{-\tilde{g}} = c =: e^d$ eine Konstante $\neq 0$. Nun ist $g = d + \tilde{g}$ die gesuchte Funktion mit $f = \exp \circ g$. □

9. Die Cauchysche Integralformel für Kreisringe, isolierte Singularitäten

9.1. Kreisringe. Wir betrachten den offenen Kreisring $\text{KR}(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ und $f \in \mathcal{O}(\text{KR}(z_0, r, R))$. Wir zerlegen den Kreisring, wie in Fig. 7 angedeutet, in sternförmige Gebiete, so dass der CAUCHYSche Integralsatz für Sterngebiete 5.3 auf die Teilgebiete angewendet werden kann. Die Integrale über die radialen Strecken heben sich auf und wir erhalten dann für $r < r' < R' < R$

$$\oint_{|\zeta - z_0| = R'} f = \oint_{|\zeta - z_0| = r'} f$$

und mit dem gleichen Beweis wie für Satz 7.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &=: f_1(\zeta) + f_2(\zeta) \end{aligned}$$

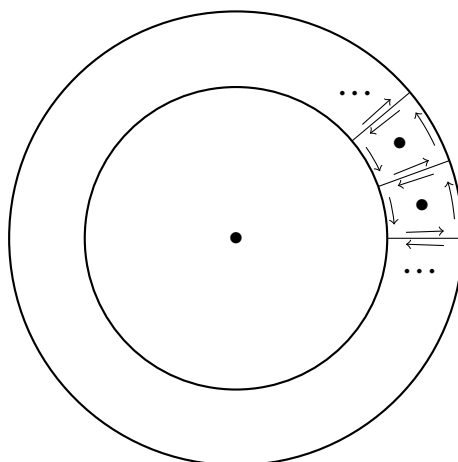


ABBILDUNG 7. Zerlegung eines Kreisringes in sternförmige Gebiete. Die Punkte in den Segmenten sind Sternpunkte. Die Anzahl der nötigen Segmente hängt von der Dicke des Kreisringes ab.

für $r' < |z - z_0| < R'$. Die Formel für f_1 zeigt¹⁸, dass f_1 im offenen Kreis $B(z_0, R)$ holomorph ist. Ebenso ist f_2 in dem Außengebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ holomorph. Der Potenzreihenentwicklungssatz 7.2 liefert

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Analog erhalten wir für $|z - z_0| > r'$ mittels der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Bei festen z mit $|z - z_0| > r'$ konvergiert diese Reihe normal auf dem Kreisrand $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z_0| = r'\}$, also haben wir für f_2 die im Außengebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ ¹⁹ konvergente Reihendarstellung

$$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (9.1)$$

für jedes $r' > r$. Dass die Reihe Eq. (9.1) dort auch lokal gleichmäßig konvergent ist, sehen wir wie folgt. Die rechte Seite ist eine Potenzreihe in $\xi := \frac{1}{z - z_0}$ mit Konvergenzradius mindestens $1/r$. Folglich konvergiert die Reihe dort lokal gleichmäßig in ξ und somit auch die Reihe Eq. (9.1) lokal gleichmäßig im Außengebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$. Damit haben wir auch schon bewiesen:

¹⁸Natürlich kann man zu jedem z im offenen Kreisring $KR(z_0, r, R)$ geeignete $r < r' < |z - z_0| < R' < R$ finden.

¹⁹Letzteres da wir das Argument für jedes $r' > r$ durchführen können.

9.2. Satz (LAURENT-Entwicklungssatz für Kreisringe). Sei f holomorph im offenen Kreisring $KR(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Für $r < \rho < R$ sei

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (9.2)$$

Dann ist a_n unabhängig von der Wahl von ρ und es gilt für f die Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R.$$

Diese sog. LAURENT-Reihe von f konvergiert auf dem Kreisring $KR(z_0, r, R)$ lokal gleichmäßig. $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ heißt Hauptteil und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt Nebenteil der LAURENT-Reihe von f .

9.A. Isolierte Singularitäten

9.3. Wir wenden den LAURENT-Entwicklungssatz auf isolierte Singularitäten an. Sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *isolierte Singularität* von f , falls f in einer punktierten Kreisscheibe $\dot{B}(z_0, \varepsilon) := B(z_0, \varepsilon) \setminus \{0\} \subset G$ holomorph ist. Gemäß Satz 9.2 haben wir dann die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Wir fragen uns zunächst, ob man aus dem lokalen Verhalten von f bei z_0 etwas über den Hauptteil der LAURENT-Entwicklung erfahren kann. Nehmen wir an, dass f in der Nähe von z_0 durch eine Potenzfunktion abgeschätzt werden kann, etwa

$$|f(z)| \leq M|z - z_0|^{-N}, \quad 0 < |z - z_0| < \delta < \varepsilon,$$

so folgt in einem ähnlichen Schluss wie beim Beweis des Korollars 7.4

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq M \cdot r^{-n-N}.$$

Falls $n < -N$, so folgt durch Grenzübergang $r \rightarrow 0$, dass $a_n = 0$ sein muss. Damit haben wir drei sich ausschließende Alternativen.

9.4. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{0\})$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität z_0 . Dann tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:

- (1) Für eines und damit alle $0 < \delta < \varepsilon$ ist f beschränkt auf der offenen punktierten Kreisscheibe $\dot{B}(z_0, \delta)$. Dann verschwindet der Hauptteil der LAURENT-Entwicklung von f bei z_0 und f ist nach z_0 holomorph fortsetzbar. (sog. RIEMANNscher Hebbarkeitssatz)
- (2) Es gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. Genauer gibt es ein $N \in \mathbb{Z}_+^*$, die sog. Polordnung, so dass die Funktion $z \mapsto (z - z_0)^N f(z)$ bei z_0 eine hebbare Singularität hat (d. h. es tritt der erste Fall ein) und $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^N f(z) \neq 0$.

Dies ist äquivalent dazu, dass der Hauptteil der LAURENT-Entwicklung nur endlich viele (jedoch mindestens einen nichtverschwindenden) Summanden hat. Es gilt daher

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_{-N} \neq 0.$$

- (3) Der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ existiert nicht. Dies ist äquivalent dazu, dass $a_n \neq 0$ für unendliche viele Indizes $n < 0$.

Man nennt die Singularität z_0 *hebbar* im Fall (1), Pol der Ordnung N im Fall (2) und wesentlich im Fall (3). Gelegentlich faßt man die Fälle (1) und (2) unter dem Begriff "unwesentliche Singularität" zusammen.²⁰

Wir müssen nur noch zeigen, dass im Falle eines unendlichen Hauptteils tatsächlich der Limes $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ nicht existiert. Es gilt jedoch viel mehr:

9.5. Theorem (Großer Satz von PICARD). Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f , d. h. unendliche viele der a_n mit $n < 0$ sind von Null verschieden. Dann existiert ein $a \in \mathbb{C}$ so, dass für jedes $0 < \delta < \varepsilon$ die Funktion f in der punktierten Kreisscheibe $\dot{B}(z_0, \delta)$ jeden Wert von $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ annimmt.

A posteriori folgt natürlich, dass jeder Wert in der genannten punktierten Kreisscheibe sogar unendlich oft angenommen wird.

Diesen Satz werden wir erst sehr viel später im Abschnitt 26 beweisen können. Wir zeigen lediglich, dass das Bild von $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ unter f in \mathbb{C} dicht liegt. Dies ist der sog. Satz von CASORATI-WEIERSTRASS. Das genügt natürlich, um den noch hängenden Beweis des Satzes 9.4 abzuschließen.

Nehmen wir an, die Dichtheitsbehauptung wäre falsch. Dann gäbe es eine Kreisscheibe $B(w_0, \gamma) \subset \mathbb{C} \setminus f(B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\})$. Folglich ist die nicht-konstante Funktion

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}$$

auf $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ beschränkt, folglich nach dem bewiesenen Teil (1) des Satzes 9.4 holomorph nach z_0 fortsetzbar. Dann ist aber

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{h(z)},$$

also ist z_0 entweder hebbar oder, falls $h(z_0) = 0$ ²¹, ein Pol von f . Widerspruch!

9.B. Das Residuum

9.6. Sei f eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion in G . Für $a \in G$ nennt man

$$\text{Res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\varepsilon} f(\zeta) d\zeta \tag{9.3}$$

das *Residuum* von f in a , vgl. Eq. (9.2).

²⁰Klingt etwas schräg, oder?

²¹Man beachte, dass h nicht konstant 0 sein kann!

Ist a ein *einfacher* Pol von f , so gilt

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{\zeta \rightarrow a} (\zeta - a) f(\zeta) = (\zeta - a) f(\zeta) \Big|_{\zeta=a}. \quad (9.4)$$

Allgemeiner gilt für einen N -fachen Pol

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^{N-1} (\zeta - a)^N f(\zeta) \Big|_{\zeta=a}. \quad (9.5)$$

Die Formeln Eq. (9.4) und (9.5) sind für praktische Berechnungen von gewisser Bedeutung und wir werden Sie im Folgenden, insbesondere im Abschnitt 19, gelegentlich benutzen.

BEMERKUNG. Hat f in einer Umgebung von a eine Stammfunktion, so verschwindet das Residuum, $\operatorname{Res}_a f = 0$. Das ergibt sich unmittelbar aus der Definition Eq. (9.3) und dem Satz 4.3. Das Residuum Res_a verhält sich in gewisser Weise wie ein "Integral" auf dem Ring der (formalen) Potenzreihen mit Entwicklungspunkt a . Wegen $\operatorname{Res}_a (f \cdot g' + f' \cdot g) = \operatorname{Res}_a (f \cdot g)' = 0$ gilt die Regel der partiellen Integration

$$\operatorname{Res}_a f' \cdot g = -\operatorname{Res}_a f \cdot g' \quad (9.6)$$

auch für Res_a .

9.7. Die Ordnung einer Funktion. Wir führen noch folgende nützliche Schreibweise ein: sei $f \in \mathcal{O}(\dot{B}(a, r))$ mit einer unwesentlichen Singularität bei a . Dann hat f die LAURENT-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_m \neq 0.$$

Wir setzen dann $\operatorname{ord}_a f := \operatorname{ord}(f, a) := m$ und nennen $\operatorname{ord}_a f$ die *Ordnung* der Funktion f im Punkt a . M. a. W.

$$\operatorname{ord}_a f := \operatorname{ord}(f, a) := \begin{cases} 0, & \text{falls } a \text{ hebbar und } f(a) \neq 0, \\ -k, & \text{falls } a \text{ Pol der Ordnung } k, \\ k, & \text{falls } a \text{ Nullstelle der Ordnung } k. \end{cases} \quad (9.7)$$

BEMERKUNG. Im vorstehenden Fall gilt für die logarithmische Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m \cdot c_m (z-a)^{m-1} + (m+1) \cdot c_{m+1} (z-a)^m + \dots}{c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \dots} \\ &= \frac{m}{z-a} \cdot \frac{1 + (m+1) \cdot c_{m+1}/c_m (z-a) + \dots}{1 + c_{m+1}/c_m (z-a) + \dots}, \end{aligned}$$

also hat f'/f in a einen einfachen Pol vom Residuum

$$\operatorname{Res}_a \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_a f. \quad (9.8)$$

9.C. Meromorphe Funktionen

9.8. Eine wichtige Klasse von Funktionen mit isolierten Singularitäten bilden diejenigen, die keine wesentlichen Singularitäten besitzen.

f heißt *meromorph* auf G , falls es eine diskrete Menge $P_f \subset G$ gibt, so dass f auf $G \setminus P_f$ holomorph ist und die Punkte von P_f allesamt unwesentliche Singularitäten (d. h. also hebbar oder Polstellen) von f sind. Mit $\mathcal{M}(G)$ bezeichnen wir die meromorphen Funktionen auf G . Obwohl meromorphe Funktionen nicht überall definiert sind, kann man sie in offensichtlicher Weise addieren, multiplizieren und auch, falls $\neq 0$, dividieren. Man setzt etwa $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$, $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$ für $z \notin P_f \cup P_g$.²² Ist $g \in \mathcal{M}(G) \setminus \{0\}$, so ist auch die Nullstellenmenge von g diskret und man setzt $\frac{f}{g}(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ für $z \notin P_f$ und $g(z) \neq 0$. Auf diese Weise erhält man

9.9. Satz. $(\mathcal{M}(G), +, \cdot)$ ist ein Körper.

BEWEIS. Der Beweis ist im Wesentlichen eine Fleißaufgabe. Wir diskutieren lediglich das multiplikativ Inverse. Sei $g \in \mathcal{M}(G) \setminus \{0\}$. Dann liegen die Nullstellen $N_g \subset G$ diskret. Ist $a \in N_g$, so schreibe $g(z) = (z - a)^m g_1(z)$, $g_1(a) \neq 0$, wobei m die Ordnung der Nullstelle ist. Dies ist möglich, denn wäre die Ordnung der Nullstelle ∞ , so wäre g nach dem Identitätssatz 7.9 schon konstant 0. Also ist $1/g(z) = (z - a)^{-m} 1/g_1(z)$, d. h. $1/g(z)$ hat in a einen Pol der Ordnung m . Insgesamt folgt $1/g \in \mathcal{M}(G)$. \square

Wir bemerken noch, dass $\mathcal{O}(G) \subset \mathcal{M}(G)$ ein nullteilerfreier Ring ist und tatsächlich kann man zeigen, dass $\mathcal{M}(G)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(G)$ ist. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir dies jedoch nur für den Fall $G = \mathbb{C}$ beweisen können (s. Satz 22.5).

10. Die Riemannsche Zahlenkugel

10.1. $\widehat{\mathbb{C}}$. Es liegt nahe, einer Funktion in einer Polstelle den Wert ∞ zuzuordnen. Wir erweitern dazu \mathbb{C} durch Hinzunahme eines Punktes zu $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wir topologisieren $\widehat{\mathbb{C}}$ als Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{C} .²³ Eine sehr elegante alternative Beschreibung ist die Folgende: sei

$$\mathbb{CP}^1 = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \mathbb{C}^*$$

der komplex eindimensionale projektive Raum.²⁴ Die beiden Karten

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1 : 0]\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & [z_0 : z_1] &\mapsto z_0/z_1, \\ \varphi_2 : \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0 : 1]\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & [z_0 : z_1] &\mapsto z_1/z_0, \end{aligned}$$

²²Natürlich ist mit P_f und P_g auch deren Vereinigung $P_f \cup P_g$ diskret in G .

²³s. Analysis III oder eine einschlägige Topologieeinführung.

²⁴D. h. \mathbb{CP}^1 ist der Quotientenraum von $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bzgl. der Äquivalenzrelation $(z_0, z_1) \sim (\lambda \cdot z_0, \lambda \cdot z_1), \lambda \in \mathbb{C}^*$. Für die Äquivalenzklasse von (z_0, z_1) verwendet man üblicherweise die Schreibweise $[z_0 : z_1]$. Man nennt (z_0, z_1) *homogene Koordinaten* des entsprechenden Punktes in \mathbb{CP}^1 . Man muss sich stets bewusst sein, dass homogene Koordinaten nur bis auf Multiplikation mit einer von Null verschiedenen komplexen Zahl eindeutig bestimmt sind.

bilden einen holomorphen Atlas mit dem Kartenwechsel

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_2([z : 1]) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad [z_0 : z_1] \mapsto \begin{cases} z_0/z_1, & z_1 \neq 0, \\ \infty, & z_1 = 0, \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus. Durch Verknüpfung mit Φ^{-1} erhalten wir einen holomorphen Atlas von $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} h_1 &:= \varphi_1 \circ \Phi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z, \\ h_2 &:= \varphi_2 \circ \Phi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

$\widehat{\mathbb{C}}$ ist eine sogenannte RIEMANNSCHE Fläche, also eine komplex eindimensionale Mannigfaltigkeit. Dies wird hier jedoch nicht weiter benutzt werden.

10.2. Holomorphie im Unendlichen. Sei $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen und $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Wir nennen f holomorph in $z_0 \in U$ falls folgendes gilt: sind φ, ψ holomorphe Karten um z_0 bzw. $f(z_0)$, so ist $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ holomorph (im üblichen Sinne) in einer Umgebung von $\psi(z_0)$.

Die Definition beinhaltet genauer die folgenden Fälle:

- (1) $z_0, f(z_0) \in \mathbb{C}$. Dann erhalten wir die übliche Definition der Holomorphie.
- (2) $z_0 = \infty, f(z_0) \in \mathbb{C}$ (Holomorphie in ∞). f ist genau dann holomorph in ∞ , wenn $f(\frac{1}{z})$ (im üblichen Sinne) holomorph in 0 ist.
- (3) $z_0 \in \mathbb{C}, f(z_0) = \infty$. Dann ist f als Abbildung $U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ genau dann holomorph in z_0 , wenn $1/f$ im üblichen Sinne holomorph in z_0 ist. Das bedeutet aber, dass f in z_0 einen Pol hat.
- (4) $z_0 = f(z_0) = \infty$. Dann ist Holomorphie äquivalent zur Holomorphie von $1/f(1/z)$ in $z = 0$.

BEISPIEL. 1. Ein nicht-konstantes Polynom $P(z)$ wird durch die Setzung $P(\infty) = \infty$ zu einer holomorphen Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

2. Sei f auf G eine meromorphe Funktion. Ordnet man f in den Polstellen den Wert ∞ zu, so wird f zu einer holomorphen Abbildung $G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

WARNUNG. Die Terminologie hier ist ein bisschen vertrackt. Man muss unterscheiden zwischen holomorpher *Abbildung* und holomorpher *Funktion*. Funktionen sind stets komplexwertig, während Abbildungen (hier) auch Werte in der Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ annehmen dürfen.

Wir bestimmen noch den Körper der meromorphen Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

10.3. Satz. $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ ist der Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{C}[z]$ der Polynome in einer Unbestimmten über \mathbb{C} . Man nennt dies auch den Körper der rationalen Funktionen.

M. a. W. ist $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine holomorphe Abbildung, so gibt es Polynome $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, so dass $f = \frac{p}{q}$. Ist f eine holomorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ (d. h. f bildet nach \mathbb{C} ab), so ist f konstant.

BEWEIS. Sei f eine holomorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann ist f sicher stetig und da $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist f und insbesondere $f|_{\mathbb{C}}$ beschränkt. Nach dem Satz von LIOUVILLE ist f dann aber konstant.

Sei nun $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ nicht konstant. Da die Pole von f diskret liegen und $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, hat f nur endlich viele Polstellen. Seien $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ die in \mathbb{C} liegenden Pole mit den Hauptteilen

$$H_j(z) = \sum_{n=-m_j}^{-1} a_{nj}(z - z_j)^n.$$

Dann ist $f - \sum_{j=1}^r H_j =: g \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ ohne Pole in \mathbb{C} . ∞ ist höchstens ein Pol, also

$$|g(z)| \leq C|z|^N, \quad |z| \geq 1,$$

mit geeignetem $N > 0$. Wiederum nach dem Satz von LIOUVILLE ist g ein Polynom. Wir erhalten also Frei Haus die *Partialbruchzerlegung* von f

$$f(z) = g(z) + \sum H_j(z),$$

und die rechte Seite ist offenbar eine rationale Funktion. □

Wir haben im Beweis also insbesondere folgendes gezeigt: ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze holomorphe Funktion, so können wir f als eine holomorphe Abbildung mit einer isolierten Singularität im Punkt ∞ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ auffassen. Ist dann noch ∞ höchstens ein Pol, so ist f bereits ein Polynom.

11. Möbius Transformationen

11.1. Automorphismen. Wir bestimmen hier die Automorphismen, also die biholomorphen Selbstabbildungen, einiger Gebiete, insbesondere von $\widehat{\mathbb{C}}$.

Für ein Gebiet G bezeichne $\text{Aut}(G) := \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ biholomorph}\}$. $\text{Aut}(G)$ bildet bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe.

11.2. Satz. $\text{Aut}(\mathbb{C})$ besteht aus den Abbildungen der Gestalt $f(z) = a \cdot z + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Die Zuordnung

$$(z \mapsto a \cdot z + b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenisomorphismus von $\text{Aut}(G)$ auf die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$.

BEWEIS. Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Dann sind $f(\{|z| < 1\})$ und $f(\{|z| > 1\})$ disunkte nichtleere Gebiete in \mathbb{C} , insbesondere sind beide nicht dicht in \mathbb{C} . Folglich hat nach CASORATI-WEIERSTRASS (s. Beweis des Satzes 9.4 nach Theorem 9.5) f in ∞ höchstens einen Pol und nach dem Satz von LIOUVILLE 7.7 ist

f somit ein Polynom. Da f aber injektiv ist, muss nach dem Fundamentalsatz der Algebra 7.8 der Grad des Polynoms 1 sein. Daraus folgt die Behauptung. \square

11.3. Möbius- oder gebrochen lineare Transformationen. Für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ setzen wir

$$f := M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \widehat{\mathbb{C}} \ni z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

f heißt Möbius- oder gebrochen lineare Transformation. Man beachte, dass wegen der Bedingung $ad - bc \neq 0$ Zähler und Nenner nicht gleichzeitig verschwinden können. Daher ist f eine meromorphe Funktion, die wir gleichzeitig (vgl. Abschnitt 10) als meromorphe Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ auffassen können.

Ist $c = 0$ so ist $f(z) = \frac{a}{d} \cdot z + \frac{b}{d}$, also $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Ist hingegen $c \neq 0$, so ist

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{ad - bc}{cz + d},$$

also $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

BEISPIEL. Die CAYLEY Transformation $\kappa(z) := \frac{z-i}{z+i}$ bildet die Obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \mid \Im z > 0\}$ biholomorph auf den Einheitskreis \mathbb{E} ab.

11.4. Satz. Die Zuordnung

$$M : \text{GL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut } \widehat{\mathbb{C}}, \quad M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, dessen Kern genau aus den Diagonalmatrizen $\{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ besteht. Folglich ist $\text{Aut } \widehat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}\text{GL}(2, \mathbb{C}) = \text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm \text{Id}\}$.

BEWEIS. Man rechnet einfach nach, dass $M(A) \circ M(B) = M(AB)$ für Matrizen $A, B \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$.

Zur Bestimmung des Kernes sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ im Kern der Abbildung M .

Dann ist

$$az + b = z(cz + d) = cz^2 + dz$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und Koeffizientenvergleich liefert in der Tat $c = 0, b = 0$ sowie $a = d$. D. h. jedoch gerade, dass es sich um eine Diagonalmatrix handelt.

Zum Beweis der Surjektivität betrachte $f \in \text{Aut } \widehat{\mathbb{C}}$. Ist $f(\infty) = \infty$, so ist $f|_{\mathbb{C}}$ sicherlich ein Automorphismus von \mathbb{C} , also ist f nach Satz 11.2 von der Gestalt $f(z) = az + b$ mit $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

Ist hingegen $f(\infty) = c \neq \infty$, so setzen wir $g(z) = 1/(f(z) - c)$. Dann ist g ebenfalls ein Automorphismus von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit $g(\infty) = \infty$. Nach dem soeben gezeigten ist g linear und $f = 1/g + c$ ist eine Möbius Transformation. \square

11.5. Automorphismen des Einheitskreises. Für ein festes $a \in \mathbb{E}$ betrachte die Möbius Transformation $\Phi(z) := \Phi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Φ bildet die Kreislinie S^1 in sich ab, denn für $z \in S^1$ ist

$$|\Phi(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}| \cdot |z|} = 1.$$

Folglich kann nur $\Phi(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ oder $\Phi(\mathbb{E}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}$ sein. Wegen $\Phi(a) = 0$ scheidet die zweite Möglichkeit jedoch aus.

Ist nun f irgendein Automorphismus des Einheitskreises, so betrachten wir mit $a = f(0)$ die zuvor definierte Abbildung Φ_a . Dann ist $\Phi_a \circ f$ ein Automorphismus des Einheitskreises mit $(\Phi_a \circ f)(0) = 0$. Nach dem SCHWARZschen Lemma 7.15 ist $(\Phi \circ f)(z) = \lambda \cdot z$ eine Drehung. Auflösen nach f liefert

$$f(z) = \lambda \cdot \frac{z - (-a\bar{\lambda})}{1 - (-\bar{a}\lambda)z} =: \lambda \cdot \frac{z-b}{1-\bar{b}z} = \lambda \cdot \Phi_b(z), \quad b := -a\bar{\lambda}.$$

Wir erhalten also sämtliche Automorphismen des Einheitskreises in der Gestalt $f(z) = \lambda \cdot \Phi_b(z)$ mit $b \in \mathbb{E}, \lambda \in S^1$. λ und b sind durch f eindeutig bestimmt; denn es ist $b = f^{-1}(0)$ und $\bar{\lambda} = -b/f(0)$.

11.6. Automorphismen der oberen Halbebene. Konjugation mit der CAYLEY Transformation $f \mapsto \kappa^{-1} \circ f \circ \kappa$ liefert einen Gruppenisomorphismus von $\text{Aut } \mathbb{E}$ auf $\text{Aut } \mathbb{H}$. Der Rest ist eine Fleißaufgabe. Es folgt, dass die Zuordnung

$$M : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut } \mathbb{H}, \quad M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, dessen Kern genau aus den beiden Matrizen $\pm \text{Id}$ besteht. Damit ist $\text{Aut } \mathbb{E} \simeq \text{Aut } \mathbb{H}$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

11.7. Möbius Transformationen als Abbildungen des komplex projektiven Raumes $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Wir hatten im Abschnitt 10 gesehen, dass man die RIEMANNsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ als den komplex eindimensionalen projektiven Raum $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ auffassen kann. Wir zeigen noch, wie Möbius Transformationen auf homogenen Koordinaten wirken. Ist $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ so erhalten wir mit der Identifizierung $z = z_0/z_1 \leftrightarrow [z_0 : z_1]$

$$f([z_0 : z_1]) = \left[\frac{az + b}{cz + d} : 1 \right] = [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1].$$

In homogenen Koordinaten verliert der Punkt ∞ bekanntlich seine Sonderstellung und die Formel rechts ist für sämtliche Punkte des komplex projektiven Raumes gültig. Weiterhin zeigt diese Überlegung, dass die Möbius Transformationen genau die Projektivitäten des Raumes $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ darstellen.²⁵

²⁵Wer damit nichts anfangen kann, darf es getrost ignorieren; wir werden das nicht weiter verwenden oder benötigen.

12. Folgen holomorpher Funktionen

12.1. Kompakte Konvergenz. Wir erinnern zunächst an den Begriff der lokal gleichmäßigen bzw. kompakten Konvergenz: sei dazu $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. (f_n) konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $z_0 \in G$ eine offene Umgebung $U \ni z_0$ so gibt, dass $f|_U$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

Man überzeugt sich leicht davon, dass dieser Konvergenzbegriff äquivalent zur *kompakten Konvergenz* ist. D. h. $f|_K$ konvergiert auf jedem Kompaktum $K \subset G$ gleichmäßig gegen $f|_K$.

Der folgende Satz gibt Aufschluss über das Verhalten kompakt konvergenter Folgen holomorpher Funktionen.

12.2. Satz (WEIERSTRASSScher Konvergenzsatz). *Die Folge $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(G)$ konvergiere kompakt gegen die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph und alle Ableitungen $(f_n^{(k)})_n$ konvergieren kompakt gegen die Ableitungen $f^{(k)}$; $k = 0, 1, 2, \dots$*

Man vergleiche diesen Satz mit dem entsprechenden Satz der reellen Analysis über die gliedweise Differentiation von Funktionenfolgen. Dort musste man die kompakte Konvergenz der Ableitungen *voraussetzen* um schliessen zu können, dass Differentiation und Limesbildung vertauschbar ist.

BEWEIS. 1. Wegen der kompakten Konvergenz ist f stetig. Wir verwenden den Satz von MORERA Korollar 7.5: ist $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck, so konvergiert $f_n|_{\Delta} \rightarrow f|_{\Delta}$ gleichmäßig, also folgt

$$\int_{\partial\Delta} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n = 0,$$

da f holomorph. Nach MORERA ist nun auch f holomorph.

2. Sei $z_0 \in G$ und $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ eine kompakte Kreisscheibe, $r > 0$. Für $|z - z_0| \leq r/2$ liefert die CAUCHYSche Integralformel

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| d\zeta \\ &\leq \frac{r \cdot k!}{(r/2)^{k+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \end{aligned}$$

und Letzteres konvergiert nach Voraussetzung auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B(z_0, r/2)}$ gegen 0. □

13. Konkrete Partialbruch- und Produktentwicklungen

Es ist an der Zeit, mit der Theorie etwas zu pausieren und eine Reihe von interessanten konkreten meromorphen Funktionen anzuschauen und das bisher Erlernte darauf anzuwenden. Da Funktionen immer wieder mit Hilfe von Grenzprozessen erklärt werden, ist der WEIERSTRASSSche Konvergenzsatz 12.2 hierfür ein wichtiges Hilfsmittel.

13.A. Partialbruchzerlegung

13.1. Die Funktion $\pi \cot(\pi z)$ hat einfache Pole in \mathbb{Z} . Die Residuen ergeben sich daher aus (vgl. Abschnitt 9.B)

$$\lim_{z \rightarrow k} \pi(z-k) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{z \rightarrow k} (-1)^k \pi \frac{z-k}{\sin(\pi z)} = \frac{(-1)^k \pi}{\pi \cos(\pi k)} = 1.$$

Des Weiteren ist die Funktion 1-periodisch.

Wir konstruieren nun auf eine andere Weise eine 1-periodische Funktion mit einfachen Polen in \mathbb{Z} vom Residuum 1 und vergleichen diese dann mit $\pi \cot(\pi z)$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ betrachte

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^N \frac{2z}{z^2 - k^2}.$$

Also ist

$$f(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}$$

in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ auf jedem Kompaktum normal konvergent. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzsatz 12.2 ist f meromorph in \mathbb{C} mit einfachen Polen in \mathbb{Z} vom Residuum 1. Desweiteren ist f in der Tat 1-periodisch, denn

$$f(z+1) - f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{z+1-k} - \frac{1}{z-k} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{z+N+1} - \frac{1}{z-N} = 0.$$

13.2. Die reduzierte Summe. Alternativ können wir schreiben

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=-N, k \neq 0}^N \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} =: \frac{1}{z} + \sum_{k=-N}' \frac{z}{k(z-k)}.$$

Dabei bezeichnet \sum' die *reduzierte Summe*. Dies ist lediglich eine abkürzende Schreibweise dafür, dass bei der Summation die 0 ausgelassen wird.

Damit erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}' \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}' \frac{z}{k(z-k)}.$$

Diese Reihe ist ebenfalls in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ kompakt konvergent. Betrachte nun die ganze Funktion $h(z) := \pi \cot(\pi z) - f(z)$. Da $f(z)$ die gleichen Hauptteile wie $\pi \cot(\pi z)$ hat, ist h in der Tat eine 1-periodische ganze Funktion. Natürlich wollen wir zeigen, dass h verschwindet. Dies gelingt nicht direkt, sondern über die Betrachtung der Ableitung. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzsatz 12.2 dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$h'(z) = \frac{-\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

Wir zeigen zunächst, dass h' beschränkt ist, um den Satz von LIOUVILLE 7.7 anwenden zu können. Da mit h auch h' 1-periodisch ist, genügt

es, h' auf einem vertikalen Streifen der Breite 1 abzuschätzen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $z = x + iy$, $y > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sin^2(\pi z)} \right| &= \frac{4}{|e^{\pi i x - \pi y} - e^{-\pi i x + \pi y}|^2} \\ &\leq 4e^{-2\pi y} \frac{1}{|e^{2\pi i x - 2\pi y} - 1|^2} \\ &\leq 8e^{-2\pi y}, \quad \text{für } y > y_0, \end{aligned}$$

d. h. man kann wegen $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-2\pi y} = 0$ sicherlich y_0 so wählen, dass die letzte Ungleichung für $y > y_0$ gilt.

Für $y < 0$ geht man analog vor. Nach evtl. Vergrößerung von y_0 erhalten wir also

$$\left| \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } |\Im z| \geq y_0.$$

Wenden wir uns nun der Abschätzung des zweiten Summanden von h' zu. Für $z = x + iy$, $0 \leq x \leq 1$, gilt sicherlich

$$\left| \frac{1}{z - k} \right|^2 \leq \max\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2}\right).$$

Wir wählen daher N so groß, dass

$$\sum_{|k| > N} \max\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2}\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dann ist

$$|h'(z)| \leq \frac{3}{4}\varepsilon + \sum_{k=-N}^N \left| \frac{1}{z - k} \right|^2.$$

Die Summe rechts schätzen wir ab durch $(2N + 1)|y|^{-2}$, also konvergiert die Summe rechts für $|y| \rightarrow \infty$ auf dem Streifen $0 \leq x \leq 1$ gleichmäßig gegen 0.

Wir können folglich $y_1 \geq y_0$ so wählen, dass $|h'(z)| \leq \varepsilon$ für $0 \leq \Re z \leq 1$, $|\Im z| \geq y_1$.

Als 1-periodische Funktion ist h' damit beschränkt und nach dem Satz von LIOUVILLE 7.7 ist sie daher konstant. Da aber $h'(x + iy) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$ muss $h' = 0$ sein.

Die Funktion h ist nun konstant. Andererseits ist sie aber ungerade (d. h. $h(-z) = -h(z)$), also ist auch $h = 0$. Wir fassen zusammen:

13.3. Satz (Partialbruchzerlegung des Cotangens). *Es gilt mit kompakter Konvergenz in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$*

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

sowie
$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k)^2}.$$

13.B. Produktentwicklung

13.4. Unendliche Produkte. Wir diskutieren zunächst grundlegende Fakten über unendliche Produkte. Ist (a_n) eine Folge in \mathbb{C} , so heißt das unendliche Produkt $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, falls alle bis auf endlich viele a_n von Null verschieden sind und für genügend großes n_0 der Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^N a_n$$

existiert und von Null verschieden ist. Man setzt dann natürlich

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N a_n.$$

Diese Definition, die zunächst etwas ungewöhnlich erscheint, garantiert, dass für ein konvergentes Produkt gilt:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- (2) $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ ist dann und nur dann gleich Null, wenn eines der a_n gleich Null ist.

13.5. Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n \in \mathcal{O}(G)$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ konvergiere kompakt auf G . Dann gilt:

- (1) $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert kompakt ²⁶ auf G .
- (2) $f \in \mathcal{O}(G)$ und die logarithmische Ableitung kann gliedweise genommen werden

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}.$$

Diese Reihe konvergiert kompakt in $G \setminus f^{-1}(\{0\})$.

BEWEIS. 1. Sei $K \subset G$ eine kompakte Menge. Dann konvergiert $\sum |f_n - 1|$ gleichmäßig auf K . Daher gibt es ein n_0 so, dass

$$|f_n(z) - 1| \leq \frac{1}{4}$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $z \in K$. Für diese n und z ist also stets $f_n(z) \neq 0$. Sei \log der Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Für $n \geq n_0, z \in K$ ist sicherlich $f_n(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, also

$$\prod_{n=n_0}^N f_n(z) = \prod_{n=n_0}^N e^{\log f_n(z)} = \exp\left(\sum_{n=n_0}^N \log f_n(z)\right).$$

²⁶D. h. für jedes feste $z \in G$ konvergiert das unendliche Produkt im Sinne obiger Definition und die Konvergenz $\prod_{n=1}^N f(z), N \rightarrow \infty$, ist kompakt auf G .

Für $|u| \leq \frac{1}{4}$ ist nun

$$|\log(1 + u)| = \left| \int_{[1, 1+u]} \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{|u|}{1 - |u|} \leq \frac{4}{3}|u|,$$

also

$$|\log f_n(z)| \leq \frac{4}{3}|f_n(z) - 1|,$$

folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)$ gleichmäßig auf K . Da die Exponentialfunktion auf Kompakta gleichmäßig stetig ist, folgt nun auch die gleichmäßige Konvergenz des Produktes

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=n_0}^{\infty} e^{\log f_n(z)} = \exp\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)\right) \neq 0. \quad (13.1)$$

2. Wegen der bewiesenen kompakten Konvergenz des Produktes (13.1) ist f holomorph auf G und mit dem WEIERSTRASSSchen Konvergenzsatz 12.2 und (8.1) erhalten wir aus

$$f(z) = \prod_{n=1}^{n_0-1} f_n(z) \cdot \exp\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)\right)$$

durch logarithmisches Differenzieren

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} + \frac{d}{dz} \sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)},$$

wobei die kompakte Konvergenz der letzten Reihe wiederum aus dem WEIERSTRASSSchen Konvergenzsatz 12.2 folgt. \square

13.6. Satz (Sinusprodukt). Für die Sinusfunktion gilt die folgende in \mathbb{C} kompakt konvergente Produktdarstellung

$$\sin(\pi z) = \pi \cdot z \cdot \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} = \pi \cdot z \cdot \prod'_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Dabei bezeichnet, analog zur reduzierten Summe \sum' , \prod' das reduzierte Produkt, d. h. der Index läßt die 0 aus.

BEWEIS. Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $n_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ so, dass $|z/n_0| \leq \frac{1}{2}$ für $z \in K$. Dann ist für $n \geq n_0$

$$\left| \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} - 1 \right| = \left| e^{z/n} - 1 - \frac{z}{n} - \frac{z}{n} (e^{z/n} - 1) \right| \leq C \frac{|z|^2}{n^2},$$

folglich ist $f(z) := \pi \cdot z \cdot \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}$ kompakt konvergent und gliedweise logarithmische Differentiation liefert mit Satz 13.3

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum'_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right) = \pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{\frac{d}{dz} \sin(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

Das Lemma 8.2 liefert $\sin(\pi z) = c \cdot f(z)$. Die Konstante ergibt sich durch Auswertung an der Stelle $z = 0$

$$\pi = \frac{\sin(\pi z)}{z} \Big|_{z=0} = c \frac{f(z)}{z} \Big|_{z=0} = c \cdot \pi,$$

also $c = 1$ und wir sind fertig. □

14. Die Gamma Funktion

14.1. Wir betrachten das "halbe Sinusprodukt"

$$H(z) := z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z/\nu}.$$

Wie bei der Diskussion des Sinusproduktes folgt die kompakte Konvergenz auf \mathbb{C} , also ist $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in den Punkten $0, -1, -2, \dots$. Vergleich mit dem Sinusprodukt 13.6 liefert

$$-H(z)H(-z) = z^2 \cdot \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z/\nu} = z \cdot \frac{\sin(\pi z)}{\pi}. \quad (14.1)$$

Der Funktionswert bei 1 ergibt sich zu

$$\begin{aligned} H(1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^N \exp\left(\log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) - \frac{1}{\nu}\right) \\ &= \exp\left(-\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\nu} - \log(N+1)\right]\right). \end{aligned}$$

Der Limes im Exponenten ist die aus der Analysis bekannte EULER-MASCHERONI Konstante, die wir mit γ bezeichnen.

14.2. Die Γ -Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(z) := e^{-\gamma z} \cdot H(z)^{-1} = e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-1} e^{z/\nu}. \quad (14.2)$$

Die Eigenschaften der Γ -Funktion fassen wir zusammen in

14.3. Satz. 1. $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion mit einfachen Polen in den Punkten $0, -1, -2, \dots$. Das Residuum in $z = -n$ ist $\frac{(-1)^n}{n!}$. Γ hat keine Nullstellen.

2. Es gilt die EULERSche Produktdarstellung

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

3. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z),$$

sowie $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{Z}_+$.

4.

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

5. Für $\Re z > 0$ gilt die Integraldarstellung

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

6. Es ist $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

BEWEIS. 1. Da $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist $\Gamma(z) = e^{-\gamma z} H(z)^{-1}$ nullstellenfrei. Die Pole sind genau die Nullstellen von H , also $0, -1, -2, \dots$. Die Residuen berechnen wir unter 3.

2. Dies ergibt sich durch Manipulation der "Partialprodukte" der definierenden Produktdarstellung. Es ist

$$\begin{aligned} z \cdot \prod_{\nu=1}^n \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z/\nu} &= z \cdot \prod_{\nu=1}^n \frac{z + \nu}{\nu} e^{-z/\nu} \\ &= \frac{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}{n! \cdot n^z} \exp\left(z\left(\log n - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}\right)\right). \end{aligned}$$

Der letzte Faktor konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen $e^{-\gamma z}$ (vgl. Abschnitt 14.1) und wir erhalten daher

$$H(z) = e^{\gamma z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}{n! \cdot n^z}$$

und somit

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} H(z)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^z}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}.$$

3. Dies folgt nun leicht aus der bewiesenen EULERSchen Produktdarstellung:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^z}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \frac{z \cdot n}{(z+1+n)} = \Gamma(z) \cdot z. \quad (14.3)$$

Es ist $\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n}{(n+1)!} = 1$. Rekursiv (=induktiv) ergibt sich nun $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n! \cdot \Gamma(1) = n!$.

Da die Pole wegen der Produktdarstellung einfach sind, berechnen sich die Residuen in $-n$ mit Eq. (14.3):

$$\begin{aligned} \text{Res}_{-n} \Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \cdot \Gamma(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

4. Schließlich liefert Eq. (14.1)

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \Gamma(z) \cdot (-z) \cdot \Gamma(-z) = -z \cdot \frac{1}{H(z)H(-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

5. Hier machen wir eine Ausnahme und verwenden Methoden der LEBESGUE Theorie aus Analysis III. Ein elementarer Beweis ist möglich.

Allerdings steht der Nutzen einer Theorie "gleichmäßig konvergenter uneigentlicher Integrale" in keinem Verhältnis zum Aufwand. Für geeignetes von z abhängiges $t_0 > 0$ ist

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{\Re z-1}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ e^{-t/2}, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Das genügt schon um zu sehen, dass $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ für $\Re z > 0$ über das Intervall $[0, \infty)$ im LEBESGUESchen Sinne integrierbar ist.

Nun weiß man aus der Analysis Vorlesung, dass

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Die Funktionen f_n definiert durch

$$f_n(t) := \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}, & 0 < t \leq n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

konvergieren also punktweise gegen unseren Integranden $t^{z-1}e^{-t}$. Sicherlich sind sie auch integrierbar und wegen der Abschätzung

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{\Re z-1}$$

²⁷ ist der LEBESGUESche Konvergenzsatz anwendbar und wir können Integration und Limesbildung vertauschen. Es gilt also

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Nun müssen wir uns nur noch ein bisschen in partieller Integration üben:

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt &= \int_0^n \frac{1}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt \\ &= \frac{n-1}{z(z+1)n} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{z+1} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{(n-1)!}{z(z+1) \cdots (z+n-1)n^{n-1}} \int_0^n t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade der allgemeine Term der EULERSchen Produktdarstellung 2. und wir sind fertig.

6. Aus 14.3.4 ergibt sich

$$\Gamma(1/2)^2 = \Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1 - 1/2) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi,$$

und wegen 14.3.5 ist $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t} dt > 0$, folglich $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

²⁷Um dies zu zeigen, überzeuge man sich davon, dass $(1 - \frac{t}{n})^n \leq (1 - \frac{t}{n+1})^{n+1}$ für $n \geq t > 0$. Die Ableitung nach n (n darf in der Formel ja eine reelle Zahl > 0 sein!) von $(1 - \frac{t}{n})^n$ ist positiv für $n > t > 0$.

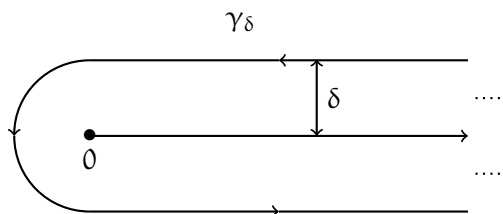


ABBILDUNG 8. Integrationsweg für das HANKELsche Schleifenintegral.

14.A. Ergänzendes Material

14.4. Für $\delta > 0$ bezeichne γ_δ den in Fig. 8 skizzierten Integrationsweg. Nach den Sätzen über Parameterintegrale ist die Funktion

$$H(z) := \int_{\gamma_\delta} t^{z-1} e^{-t} dt$$

eine ganze holomorphe Funktion, unabhängig von $\delta > 0$. Dabei ist $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$ wie üblich mittels des Hauptzweiges des Logarithmus in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ erklärt. Die Funktion $H(z)$ steht in einer einfachen Beziehung zur Γ -Funktion. Der folgende Satz liefert also auch einen alternativen Beweis der analytischen Fortsetzung der Γ -Funktion.

14.5. Satz (HANKELsche Schleifenintegraldarstellung). *Mit der zuvor erklärten ganzen Funktion $H(z)$ gilt*

$$H(z) = (e^{2\pi iz} - 1) \cdot \Gamma(z) = \frac{2\pi i \cdot e^{\pi iz}}{\Gamma(1-z)}.$$

Folglich gelten für $\delta > 0$ die Schleifenintegraldarstellungen von Γ und $1/\Gamma$:

$$\Gamma(z) = (e^{2\pi iz} - 1)^{-1} \int_{\gamma} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-,$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{e^{\pi iz}}{2\pi i} \int_{\gamma} t^{-z} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

BEWEIS. Für $\Re z > 0$ finden wir

$$\begin{aligned} H(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= -\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt + \int_0^\infty e^{(z-1)(\log t + 2\pi i) - t} dt \\ &= (e^{2\pi iz} - 1) \cdot \Gamma(z), \end{aligned}$$

also

$$\Gamma(z) = (e^{2\pi iz} - 1)^{-1} \int_{\gamma_\delta} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-. \quad (14.4)$$

Nun ist wegen Satz 14.3 4.

$$e^{2\pi iz} - 1 = e^{\pi iz} \cdot (e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}) = 2\pi i \cdot e^{\pi iz} \cdot \frac{\sin(\pi z)}{\pi} = \frac{2\pi i \cdot e^{\pi iz}}{\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)}.$$

Also folgt mit Eq. (14.4)

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{e^{-\pi iz}}{2\pi i} \int_{\gamma_8} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Substituiert man noch $w = 1 - z$, so ergibt sich die zweite behauptete Formel. \square

14.6. Alternativer Zugang zur analytischen Fortsetzung. Wir zerlegen das Γ -Integral Satz 14.3 5. für $\Re z > 0$

$$\Gamma(z) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Die Funktion $h(z) := \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ist eine ganze holomorphe Funktion. Weiterhin ist

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Die rechte Seite ist in $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ kompakt konvergent. Folglich erhalten wir die analytische Fortsetzung der Γ -Funktion nach $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ in der Form

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (14.5)$$

14.B. Aufbau der Γ -Funktion nach Lebedev

Die hier vorgestellten Resultate über die Γ -Funktion lassen sich auch allein aus der Integraldarstellung Satz 14.3 5. und der mehrdimensionalen Integrationstheorie ableiten ([Leb72, Chap. I]). Beispielhaft diskutieren wir die LEGENDRESche Verdopplungsformel in Anlehnung an loc. cit.

Wir betrachten die Funktion $z \mapsto 2^{2z-1} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z + 1/2)$. Einsetzen der Integraldarstellung der Γ -Funktion liefert das Doppelintegral

$$2^{2z-1} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z + 1/2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} (2\sqrt{xy})^{2z-1} x^{-1/2} dx dy,$$

und aus Symmetriegründen

$$\dots = \int_{0 \leq y \leq x < \infty} e^{-(x+y)} (2\sqrt{xy})^{2z-1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} dx dy.$$

Wir wenden den Transformationssatz für Mehrfachintegrale an mit der Substitution:

$$\begin{aligned} u &= x + y, & x &= \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - v^2}), \\ v &= 2\sqrt{xy}, & y &= \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - v^2}), \\ \sqrt{u \pm v} &= \sqrt{x} \pm \sqrt{y}, & x - y &= \sqrt{u^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ das Gebiet $\{0 < y < x < \infty\}$ diffeomorph auf das Gebiet $\{0 < v < u <$

$\infty\}$ abbildet. Die Determinante der Ableitung $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ ist gegeben durch

$$\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x - y}{\sqrt{xy}},$$

bzw. deren Inverse

$$\frac{\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{u - v}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}.$$

Somit

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{0 \leq v \leq u} e^{-u} v^{2z-1} \frac{1}{\sqrt{u-v}} \, dv du \\ &= \int_0^\infty v^{2z-1} \left(\int_v^\infty e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u-v}} \, du \right) dv \\ &= \int_0^\infty v^{2z-1} e^{-v} \, dv \cdot \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z), \end{aligned}$$

und wir erhalten

14.7. Satz (LEGENDRESche Verdopplungsformel). *Es gilt*

$$2^{2z-1} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z + 1/2) = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z).$$

15. Die Riemannsche ζ -Funktion I

In der Analysis Vorlesung zeigt man z. B. mit dem Verdichtungssatz von CAUCHY oder mit dem Integralvergleichskriterium, dass die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \tag{15.1}$$

für $\Re s > 1$ absolut konvergiert. Die so definierte Funktion auf der Halbebene $\Re s > 1$ heißt bekanntlich „RIEMANNSche ζ -Funktion“. Für $\Re s \geq s_0 > 1$ ist

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\Re s}} \leq \frac{1}{n^{s_0}},$$

folglich ist die ζ -Reihe in jeder Halbebene $\Re s > s_0$ normal konvergent. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzsatz 12.2 ist die ζ -Funktion somit holomorph in der Halbebene $\{\Re s > 1\}$.

Die eindeutige Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{r_2, r_3, \dots \geq 0} (2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \dots)^{-s} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r \geq 0} p^{-rs} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ die Menge der Primzahlen. Dies ist das sogenannte EULER-Produkt für ζ .

Zwischen der ζ -Funktion und der Γ -Funktion besteht eine enge Beziehung:

15.1. Satz.

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \Re s > 1.$$

BEWEIS. Für reelle $s > 1$ liefert der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \zeta(s) \cdot \Gamma(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt \\ &= \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \end{aligned}$$

Da die linke und rechte Seite analytische Funktionen sind ²⁸, folgt die Behauptung mit dem Identitätssatz 7.9 für alle $\Re s > 1$. \square

15.2. Bernoulli-Zahlen. Nach Theorem 7.2 hat die Potenzreihe

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} z^n \tag{15.2}$$

den Konvergenzradius 2π , denn die linke Seite ist eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} mit Polstellen in $2\pi i \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Der größte offene Kreis um 0, welcher keine Singularitäten enthält, besitzt also den Radius 2π . Die $(B_n)_n$ heißen BERNOULLI-Zahlen. Über diese gäbe es viel zu berichten. Wir begnügen uns hier mit dem Nötigsten. Multiplikation der definierenden Gleichung (15.2) mit $e^z - 1$ und Ausmultiplikation liefert

$$z = \sum_{m=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!(m-k)!} \right) z^m$$

und somit ergeben sich die BERNOULLI-Zahlen rekursiv aus

$$B_0 = 1; \quad B_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} B_k.$$

Insbesondere sind die B_n sämtlich rationale Zahlen; die ersten Werte ergeben sich zu

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0.$$

Dies legt den Verdacht nahe, dass mit Ausnahme von B_1 alle ungeraden BERNOULLI-Zahlen verschwinden. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^\infty \frac{B_n}{n!} z^n &= \sum_{m=1}^\infty \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m} \\ &= \frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2} z - 1 = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} - 1 = \frac{z \cosh(z/2)}{2 \sinh(z/2)} - 1 \end{aligned} \tag{15.3}$$

eine gerade Funktion und folglich

$$B_{2n+1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

²⁸Für die rechte Seite folgt dies aus dem einschlägigen Satz über Parameterintegrale der LEBESGUE Theorie.

15.3. Die geraden ζ -Werte $\zeta(2n)$. In Analysis I bekommt man unter dem Stichwort Reihen oftmals die frappierenden Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad (15.4)$$

mitgeteilt und der erstaunte Student fragt sich, wie man wohl diese Reihenauswertungen erhält. In Analysis I kann man Eq. (15.4) später mit Hilfe von FOURIER-Reihen²⁹ und der PARSEVAL-Gleichung auswerten. Wir gehen hier den funktionentheoretischen Weg. Ausgehend von der Partialbruchzerlegung des Cotangens 13.3 berechnen wir die Potenzreihenentwicklung von $\pi \cdot \cot(\pi z)$ auf zwei Weisen. Zunächst entwickeln wir den allgemeinen Term der Partialbruchzerlegung in eine geometrische Reihe. Für $|z| < 1$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$\frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{-2z}{n^2} \frac{1}{1 - z^2/n^2} = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m-1}}{n^{2m}}.$$

Analog sieht man für $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^{2m-1}}{n^{2m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{n^2 - |z|^2} < \infty,$$

d. h. die Doppelreihe ist für $|z| < 1$ absolut konvergent. Der Reihenwert ist daher unabhängig von der Summationsreihenfolge. Wir erhalten einerseits

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} - \sum_{m=1}^{\infty} 2 \zeta(2m) z^{2m-1}. \quad (15.5)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \pi \cdot \cot(\pi z) &= i\pi \cdot \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i\pi + \frac{1}{z} \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m} B_{2m}}{(2m)!} z^{2m-1} \end{aligned} \quad (15.6)$$

und Koeffizientenvergleich in Eq. (15.5) und Eq. (15.6) liefert

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2m)!}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15.7)$$

15.A. Analytische Fortsetzung

15.4. Satz. Die ζ -Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} mit einer einzigen Polstelle bei 1. Diese Polstelle ist einfach und es gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1), \quad s \rightarrow 1. \quad (15.8)$$

ζ hat einfache Nullstellen in $-2, -4, -6, \dots$

²⁹Genauer berechnet man die FOURIER-Reihen der periodisch fortgesetzten BERNOULLI-Polynome; die Sache ist also nicht so sehr von dem verschieden, was wir hier tun.

BEWEIS. Wir zerlegen das Integral in Satz 15.1 in $\int_0^1 + \int_1^\infty$ und analysieren die beiden Summanden. Die Funktion $h(s) := \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1} dt$ ist eine ganze Funktion. Im Integral \int_0^1 entwickeln wir den Integranden in eine Potenzreihe. Da die Reihe (15.2) den Konvergenzradius $2\pi > 1$ hat, können wir Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t-1} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} t^{n+s-2} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s+n-1} \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{1}{s+2\nu-1}. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Wiederum weil die Reihe (15.2) den Konvergenzradius $2\pi > 1$ hat, gilt sicherlich $\sum_{n=0}^\infty \left| \frac{B_n}{n!} \right| < \infty$ und folglich konvergiert die Reihe (15.9) auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \setminus \{-1, -3, -5, \dots\}$ normal. Damit haben wir mit Satz 15.1 die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{1}{s+2\nu-1} + h(s) \right).$$

Nach dem WEIERSTRASSSchen Konvergenzsatzz 12.2 ist die Funktion in der Klammer auf der rechten Seite meromorph in \mathbb{C} mit einfachen Polstellen in $1, 0, -1, -3, -5, \dots$. Die Funktion $\frac{1}{\Gamma(s)}$ ist als konvergentes Produkt (vgl. Abschnitt 14) polstellenfrei und sie besitzt einfache Nullstellen in $0, -1, -2, \dots$. Damit hat ζ einen einfachen Pol vom Residuum 1 im Punkt 1 und einfache Nullstellen in den Punkten $-2, -4, -6, \dots$

Um die Darstellung (15.8) zu zeigen, erinnern wir an eine einfache Version der EULERSchen Summenformel. Sei dazu $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Partielle Integration liefert

$$f(n+1) - (x-n)f(x) \Big|_n^{n+1} = \int_n^{n+1} f(x) dx + \int_n^{n+1} (x - [x]) f'(x) dx.$$

Wir wenden diese Formel auf die Funktion $x \mapsto x^{-s}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \sum_{n=1}^\infty (n+1)^{-s} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} x^{-s} dx - s \int_n^{n+1} (x - [x]) x^{-s-1} dx \\ &= 1 + \int_1^\infty x^{-s} dx - s \int_1^\infty (x - [x]) x^{-s-1} dx \\ &= 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty (x - [x]) x^{-s-1} dx. \end{aligned}$$

Die Funktion $s \mapsto \int_1^\infty (x - [x]) x^{-s-1} dx$ ist holomorph für $\Re s > 0$. Folglich

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - \int_1^\infty (x - [x]) x^{-2} dx + O(s-1), \quad s \rightarrow 1.$$

CLAIM. $1 - \int_1^\infty (x - [x]) x^{-2} dx$ ist gleich der EULER-Konstanten γ .

PROOF OF THE CLAIM. Für $N \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \int_1^N (x - [x])x^{-2} dx &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_j^{j+1} x^{-1} - \frac{j}{x^2} dx \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} (\log(j+1) - \log j) - \frac{1}{j+1} \\ &= 1 + \log N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Nach Definition, vgl. Abschnitt 14.1, konvergiert die rechte Seite in der Tat gegen $1 - \gamma$. QED

□

16. Der globale Cauchysche Integralsatz

16.1. Ketten, Zyklen. Aus Bequemlichkeitsgründen erweitert man den Kurvenbegriff wie folgt: sind $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ Wege in G und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen, so schreibt man hierfür kurz $\Gamma = \sum_{j=1}^r k_j \cdot \gamma_j$ und nennt dies eine *Kette*. Integration über Ketten ist in der offensichtlichen Weise erklärt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^r k_j \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Man nennt Γ einen *Zyklus* (oder geschlossen), falls jeder Punkt genauso oft als Anfangspunkt wie als Endpunkt in der Kette vorkommt, d. h. es gilt für $z \in G$

$$\sum_{j:z \text{ Anfangspunkt von } \gamma_j} k_j = \sum_{j:z \text{ Endpunktpunkt von } \gamma_j} k_j.$$

Das Integral über einen Zyklus läßt sich durch Hinzunahme geeigneter Hilfswege immer in ein Integral über einen geschlossenen Weg überführen. Da das aber auf Dauer lästig ist, führt man den Begriff der Kette bzw. des Zyklus ein.

Die Windungszahl ist für Ketten genauso wie für Wege erklärt:

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Satz 5.3 gilt entsprechend.

16.2. Ext, Int. Für einen Zyklus Γ bezeichnen wir mit

$$\text{Int } \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \Gamma \mid n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

das *Innere* und mit

$$\text{Ext } \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \Gamma \mid n(\Gamma, z) = 0\}$$

das *Äußere* von Γ .

Wegen Satz 5.3 ist $\text{Int } \Gamma$ offen und beschränkt. $\text{Ext } \Gamma$ ist aus Stetigkeitsgründen abgeschlossen in $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \Gamma$.

16.3. Nullhomolog. Ein Zyklus Γ in G heißt *nullhomolog* in G , falls $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$. M. a. W. Γ umläuft keinen Punkt des Komplementes von G . In der vorstehenden Terminologie von Ext, Int bedeutet dies, dass $\text{Int } \Gamma \subset G$.

G heißt *homologisch einfach zusammenhängend*, wenn jeder Zyklus Γ in G schon nullhomolog ist.

16.4. Satz (CAUCHYSche Integralformel in der Umlaufzahlversion). Seien G ein Gebiet, Γ ein nullhomologer Zyklus in G und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt für $z \in G \setminus \text{Sp } \Gamma$

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad (16.1)$$

BEWEIS. Es genügt, den Fall $k = 0$ zu beweisen. Die Formel für $k > 0$ folgt dann durch Differentiation unter dem Integral.

Wie im Beweis von Satz 7.1 betrachten wir die Hilfsfunktion

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & (\zeta, z) \in G \times G, \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z \in G, \end{cases}$$

und setzen $h(z) := \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta$. Wir zeigen:

- (1) g ist stetig auf $G \times G$.
- (2) h besitzt eine holomorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} .
- (3) $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$.

Nach dem Satz von Liouville ist dann $h = 0$, also für $z \in G \setminus \text{Sp } \Gamma$

$$0 = h(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - 2\pi i \cdot n(\Gamma, z) \cdot f(z)$$

und die Formel Eq. (16.1) ist bewiesen.

Ad (1). Nur die Stetigkeit in (ζ_0, z_0) mit $\zeta_0 = z_0$ ist beweisbedürftig. Es gilt

$$\begin{aligned} |g(\zeta, z) - g(\zeta_0, z_0)| &= \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z, \zeta]} f'(w) - f'(z_0) dw \right| \\ &\leq \sup_{w \in [z, \zeta]} |f'(w) - f'(z_0)|. \end{aligned}$$

Da f' in z_0 stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$ für $|w - z_0| < \delta$. Daraus folgt die erste Behauptung.

Ad (2). Nach (1) ist h sicher stetig auf G . Ist $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck, so folgt mit dem Satz von Fubini³⁰

$$\int_{\Delta} h(z) dz = \int_{\Delta} \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta dz = \int_{\Gamma} \left(\int_{\Delta} g(\zeta, z) dz \right) d\zeta.$$

Bei festem ζ ist die Funktion $z \mapsto g(\zeta, z)$ stetig auf G und holomorph auf $G \setminus \{\zeta\}$. Nach dem Integrallemma von Goursat 6.2 verschwindet daher das

³⁰Dabei genügt die Analysis II Version dieses Satzes für stetige Integranden auf kompakten Quadern.

innere Integral in Klammern. Also verschwindet das Integral über h für jedes abgeschlossene Dreieck in G . Nach dem Satz von MORERA Korollar 7.5 ist h damit holomorph auf G .

Ist $z \in G$ mit $n(\Gamma, z) = 0$, so gilt

$$h(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Man beachte, dass wegen der Nullhomologie von Γ sicherlich $n(\Gamma, z) = 0$ für alle z in einer Umgebung von ∂G . Daher ist

$$\tilde{h}(z) := \begin{cases} \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta, & z \in G, \\ \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, & z \notin G, \end{cases}$$

eine auf ganz \mathbb{C} definierte holomorphe Fortsetzung von h .

Ad (3). Da $n(\Gamma, z)$ für hinreichend großes $|z|$ verschwindet (Satz 5.3), folgt für solche z

$$|\tilde{h}(z)| \leq L(\Gamma) \|f\|_{\infty, \Gamma} \frac{1}{\text{dist}(z, \Gamma)}$$

und dies geht für $z \rightarrow \infty$ gegen Null. □

16.5. Satz (CAUCHYSCHER Integralsatz in der Umlaufzahlversion). *Seien G ein Gebiet und Γ ein Zyklus in G . Dann sind äquivalent:*

- (1) Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ ist $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
- (2) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$ ist $n(\Gamma, z) = 0$, d. h. Γ ist nullhomolog in G .

BEWEIS. (1) \Rightarrow (2). Sei $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $\zeta \mapsto f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ holomorph auf G , also nach (1)

$$2\pi i \cdot n(\Gamma, z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

(2) \Rightarrow (1). Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und $z \notin G$. Setze $F(\zeta) := f(\zeta) \cdot (\zeta - z)$. Dann ist F holomorph auf G und mit dem Satz 16.4 folgt

$$0 = 2\pi i \cdot n(\Gamma, z) \cdot F(z) = \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad \square$$

Wir haben nun folgende Charakterisierung von Elementargebieten.

16.6. Satz. *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

- (1) G ist ein Elementargebiet. D. h. jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ besitzt eine holomorphe Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(G)$.
- (2) Auf G gilt der CAUCHYSCHER Integralsatz. D. h. für jeden Zyklus Γ in G und jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ gilt $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
- (3) G ist homologisch einfach zusammenhängend. D. h. jeder Zyklus Γ in G ist nullhomolog in G .
- (4) G hat in folgendem Sinne keine Löcher: ist $\mathbb{C} \setminus G = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ eine disjunkte Zerlegung in abgeschlossene Mengen, wobei A_1 sogar kompakt ist, so muss A_1 schon die leere Menge sein.

Wir benutzen folgenden "anschaulich klaren" Hilfssatz:

16.7. Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset U$ kompakt. Dann existiert ein Zyklus in U , der die Punkte von A genau einmal, jedoch keine Punkte des Komplementes $\mathbb{C} \setminus U$, umläuft.*

Beachte: es wird nicht behauptet, dass der Zyklus nicht noch andere Punkte in U umläuft. Das tut er zwangsläufig, da die umlaufenen Punkte eine offene Menge, A hingegen ist kompakt, bilden.

BEWEIS. Mittels einer Teilung der Eins Argumentes sieht man ein, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum mit glattem Rand K_ε so gibt, dass $A \subset K_\varepsilon^\circ$ im offenen Kern von K_ε liegt und dass $\text{dist}(x, A) \leq \varepsilon$ für jedes $x \in K_\varepsilon$. Für $\varepsilon >$ klein genug ist dann $K_\varepsilon \subset U$. Da K_ε ein Kompaktum mit glattem Rand ist, leistet der Randzyklus ∂K_ε das Gewünschte. \square

Für konstruktive Beweise siehe [FiLi80, Satz IV.3.3] oder [Rem84, Satz 12.4].

BEWEIS DES SATZES 16.6. Die Äquivalenz (1) \Leftrightarrow (2) ist klar und die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (3) ist genau die Aussage des vorangegangenen Satzes.

(3) \Rightarrow (4). Angenommen, $\mathbb{C} \setminus G = A_1 \cup A_2$ wäre zerlegt wie in (4) mit $A_1 \neq \emptyset$. Da $U = A_1 \cup G$ offen ist, so existiert nach dem vorangegangenen Lemma ein Zyklus Γ in G mit $n(\Gamma, z) = 1$ für $z \in A_1$. Dieser Zyklus ist dann nicht nullhomolog in G .

(4) \Rightarrow (3). Sei Γ ein Zyklus in G . Bezeichne mit A_1 die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus G$ mit $n(\Gamma, z) \neq 0$ und entsprechend mit A_2 die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus G$ mit $n(\Gamma, z) = 0$. Sicherlich ist $\mathbb{C} \setminus G = A_1 \cup A_2$ eine disjunkte Zerlegung. Wegen der Stetigkeit der Windungszahl $n(\Gamma, \cdot)$ ist A_1 offen. A_1 ist nach Satz 5.3 sicherlich beschränkt. Wegen der Ganzzahligkeit der Windungszahl ist A_1 aber auch abgeschlossen. Nach (4) ist dann aber $A_1 = \emptyset$ und folglich ist Γ nullhomolog in G . \square

17. Der Residuensatz

Wir erinnern daran, dass wir im Abschnitt 9.B das Residuum einer Funktion f in einer isolierten Singularität eingeführt hatten. Der nachfolgende Residuensatz unterstreicht die Bedeutung dieses Begriffes für die Funktionentheorie.

17.1. Theorem (Residuensatz). *Seien G ein Gebiet in \mathbb{C} , $A \subset G$ eine diskrete Teilmenge und $f \in \mathcal{O}(G \setminus A)$. Weiterhin sei Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\text{Sp } \Gamma \cap A = \emptyset$ ³¹. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{z \in A} n(\Gamma, z) \cdot \text{Res}_z f.$$

Man bemerke, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid n(\Gamma, z) \neq 0\}$ kompakt ist, folglich ist die Summe endlich.

³¹Das bedeutet eben nicht, dass Γ in $G \setminus A$ nullhomolog ist. Daran hängt die Pointe des Satzes.

BEWEIS. Seien $z_1, \dots, z_r \in A$ diejenigen Punkte, welche von dem Zyklus umlaufen werden, also $n(\Gamma, z_j) \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B(z_j, \varepsilon)} \cap A = \{z_j\}$ und $\overline{B(z_j, \varepsilon)} \subset G$. Sei $\kappa_j(t) := z_j + \varepsilon e^{it}$ die parametrisierte Kreislinie mit Mittelpunkt z_j und Radius ε . Dann ist $\tilde{\Gamma} := \Gamma - \sum_{j=1}^r n(\Gamma, z_j) \cdot \kappa_j$ nullhomolog in $G \setminus A$. Da $f \in \mathcal{O}(G \setminus A)$, folgt in der Tat

$$0 = \int_{\tilde{\Gamma}} f = \int_{\Gamma} f - \sum_{j=1}^r n(\Gamma, z_j) \int_{\kappa_j} f.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, da nach Definition des Residuums ja gerade $\int_{\kappa_j} f = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z_j} f$. \square

18. Anwendungen des Residuensatzes I: Berechnung bestimmter Integrale

Der Residuensatz erlaubt die Berechnung einer ganzen Reihe bestimmter Integrale, die mit Methoden der reellen Analysis nur mit erheblich größerem Aufwand berechnet werden könnten.

18.A. Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Sei $R(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$, wobei $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ Polynome sind, eine rationale Funktion ohne Singularitäten auf der Kreislinie $\partial\mathbb{E} = S^1$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = -i \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz = 2\pi \sum_{|z|<1} \text{Res}_z \tilde{R}(z),$$

wobei $\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$.

18.1. Beispiel. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \lambda \cos^2 t} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+1}}$, $\lambda > -1$.

Im uninteressanten Fall $\lambda = 0$ sehen wir die Formel ohne zu rechnen. Daher sei nun $\lambda \neq 0$. Um die Formel einzusehen, setzen wir $R(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda x^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{R}(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \lambda(z + 1/z)^2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4z/\lambda}{z^4 + 2(2/\lambda + 1)z^2 + 1}. \end{aligned}$$

Seien nun ρ_1, ρ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $w^2 + 2(2/\lambda + 1)w + 1 = 0$. Man sieht, dass eine betragsmäßig < 1 , die andere betragsmäßig > 1 ist. Sei also $|\rho_1| < 1, |\rho_2| > 1$. Dann hat \tilde{R} im Einheitskreis die Pole $\pm\sqrt{\rho_1}$. Es gilt nun $\text{Res}_{\pm\sqrt{\rho_1}} \tilde{R} = \frac{2/\lambda}{\rho_1 - \rho_2}$, also insgesamt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \lambda \cos^2 t} = \frac{8\pi/\lambda}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

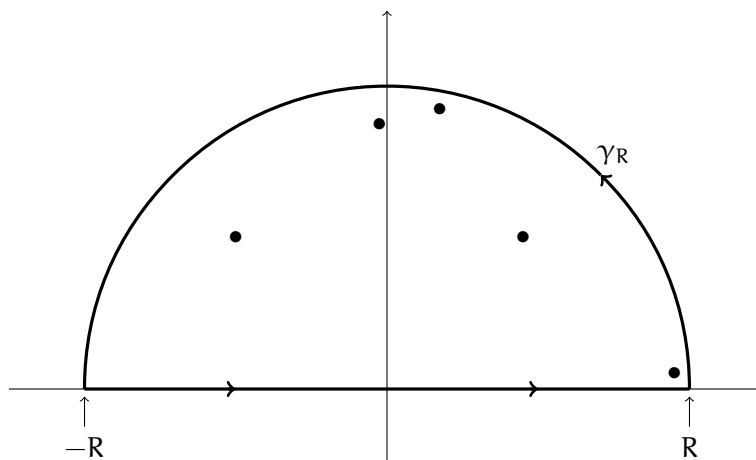


ABBILDUNG 9. Integrationsweg, welcher die in der oberen Halbebene gelegenen Pole umläuft. Es sind Bedingungen zu stellen, die garantieren, dass das Integral über den Halbkreis im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Übrig bleibt dann das reelle Integral von $-\infty$ nach ∞ .

18.B. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Sei $A \subset \mathbb{H}$ eine endliche Menge und f eine auf $\overline{\mathbb{H}} \setminus A$ holomorphe Funktion. Sei R größer als $\max |A|$. Wir betrachten den geschlossenen Integrationsweg wie in Fig. 9. Dabei bezeichnet γ_R den parametrisierten oberen Halbkreis von Radius R , also $\gamma_R(t) = R \cdot e^{it}, 0 \leq t \leq \pi$.

18.2. Satz. Falls

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f = 0, \tag{18.1}$$

so gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \text{Res}_z f.$$

1. Eq. (18.1) ist gegeben, falls

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \overline{\mathbb{H}}}} |z| \cdot |f(z)| = 0. \tag{18.2}$$

Dies ist insbesondere der Fall, falls f eine rationale Funktion vom Grad ≤ -2 ist³².

2. Falls für ein $\lambda > 0$

$$|f(z)| \leq \rho(z) e^{-\lambda \Im z}, \quad z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\} \tag{18.3}$$

mit einer auf $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$ stetigen Funktion ρ , so dass $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \rho(z) = 0$, so gilt schon Eq. (18.1). Dies ist insbesondere der Fall für $f(z) = g(z)e^{iz}$ mit $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$.

³²d.h. der Nennergrad ist mindestens um 2 größer als der Zählergrad.

WARNUNG. Es wird nicht behauptet, dass $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f$ existiert oder dass gar f im LEBESGUESCHEN Sinne integrierbar ist.

BEWEIS. Wähle R so groß, dass $|z| < R$ für $z \in A$. Dann folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{-R}^R f = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_z f + \int_{\gamma_R} f \longrightarrow 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_z f, \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

Ad 1.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq L(\gamma_R) \sup_{|z|=R} |f(z)| \\ &= \pi R \cdot \frac{1}{R} \sup_{|z|=R} (|z| \cdot |f(z)|) \rightarrow 0, \quad \text{für } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ad 2. Mit der Abschätzung Eq. (18.3) finden wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \rho(\operatorname{Re}^{it}) R e^{-\lambda R \sin t} dt \\ &\leq \sup_{|z|=R} |\rho(z)| \cdot R \int_0^\pi e^{-\lambda R \sin t} dt \\ &= 2 \cdot \sup_{|z|=R} |\rho(z)| \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\sup_{|z|=R} |\rho(z)|$ für $R \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, genügt es die

Beschränktheit von $R \mapsto R \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt$ zu zeigen.

Der Exponent $-\lambda R \sin t$ verschwindet nur für $t = 0$. Auf jedem Teilintervall $[t_0, \pi/2]$ ist $\sin t$ nach unten beschränkt und daher der Integrand exponentiell abfallend in R . Wir fixieren daher ein $t_0 > 0$ so klein, dass $|\sin t| \geq t/2$ für $0 < t < t_0$. Das ist möglich, weil $\sin' 0 = \cos 0 = 1$. Nun ist

$$R \int_0^{t_0} e^{-\lambda R \sin t} dt \leq R \int_0^{t_0} e^{-\lambda R t/2} dt = \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R t_0/2}) \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Für $t_0 \leq t \leq \pi/2$ ist $\sin t$ nach unten durch ein $\delta > 0$ beschränkt, folglich

$$R \int_{t_0}^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt \leq \frac{\pi}{2} \cdot R \cdot e^{-\lambda R \delta} \longrightarrow 0, \quad \text{für } R \rightarrow \infty. \quad \square$$

18.3. Beispiel. Als Beispiel betrachten wir die Fouriertransformation der rationalen Funktionen

$$g(z) := \frac{1}{z - i} \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Die Funktion $f(z) := e^{-iz\xi} g(z)$, $\xi \in \mathbb{R}$, ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ und falls $\xi < 0$ ist

$$|f(z)| \leq e^{\xi \Im(-iz)} |g(z)| = e^{-|\xi| \Im z} |g(z)|,$$

wobei $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$. Also liefert Satz 18.2

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{1}{x-i} \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n dx \\ = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=i} e^{-iz\xi} (z+i)^n (z-i)^{-n-1}, \end{aligned}$$

und weiter mit Eq. (9.5) und der LEIBNIZ-Regel

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi i}{n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \Big|_{z=i} e^{-iz\xi} (z+i)^n \\ &= 2\pi i \cdot e^{\xi} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2\xi)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite ist bis auf einen Faktor das sog. LAGUERRE-Polynom n -ten Grades. Für $\xi > 0$ findet man völlig analog

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} (x-i)^{-n-1} (x+i)^n dx \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{ix\xi} (-x-i)^{-n-1} (-x+i)^n = 0, \end{aligned}$$

da in \mathbb{H} keine Pole liegen.

18.C. Uneigentliche Hauptwertintegrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

18.4. Hauptwert. Unter den allgemeinen Voraussetzungen des Satzes 18.2 erlauben wir nun zusätzlich, dass Polstellen von f auf der reellen Achse liegen.

Sei dazu $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir setzen

$$\text{HW-} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\delta \searrow 0} \left(\int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^b \right) f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

18.5. Beispiel. $\text{HW-} \int_{-1}^1 x^{-2k-1} dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Seien nun $A \subset \overline{\mathbb{H}}$ endlich und $f : \overline{\mathbb{H}} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Analog zum vorherigen Abschnitt betrachten wir den Integrationsweg wie in Fig. 10. Ersetzt man im Hauptwertintegral $\text{HW-} \int_{-R}^R f(x) dx$ die gestrichelten Segmente durch die entsprechenden Halbkreisbögen, so erhält man wie im vorherigen Abschnitt die Residuensumme

$$2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \text{Res}_z f.$$

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ ein auf der reellen Achse gelegener einfacher Pol von f . Dann ist

$$f(z) = \frac{\text{Res}_{x_0} f}{z - x_0} + g(z),$$

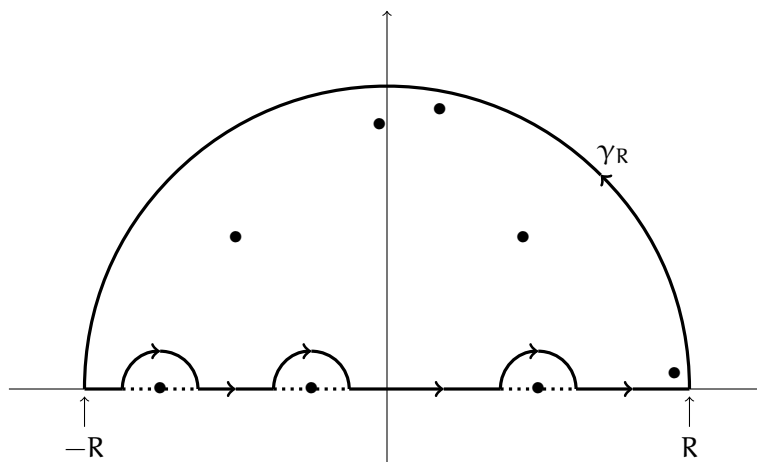


ABBILDUNG 10. Integrationswege für den Fall, dass Pole auf der reellen Achse liegen. Ersetzt man die gestrichelten Segmente durch die Halbkreisbögen in der oberen Halbebene, so werden genau die in der oberen Halbebene liegenden Pole umlaufen. Der Defekt zum Hauptwertintegral ergibt sich zu $\pi i \cdot \text{Res}_{z \in \mathbb{R}} \text{Res}_z f$.

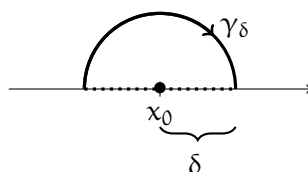


ABBILDUNG 11.

mit einer in $\overline{\mathbb{H}} \setminus A \cup \{x_0\}$ holomorphen Funktion g . Sei $\gamma_\delta(t) = x_0 + \delta \cdot e^{i(\pi-t)}$, $0 \leq t \leq \pi$, der im mathematisch negativen Sinne parametrisierte obere Halbkreis um x_0 vom Radius $\delta > 0$, vgl. Fig. 11. Dann gilt

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z - x_0} = - \int_0^\pi (\delta e^{it})^{-1} i \delta e^{it} dt = -\pi i,$$

also

$$\text{HW-} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx = \int_{\gamma_\delta} f(z) dz + \pi i \text{Res}_{x_0} f.$$

Damit zeigt man

18.6. Satz. *Unter den allgemeinen Voraussetzungen des Satzes 18.2 habe f endlich viele einfache Pole auf der reellen Achse. Dann gilt*

$$\text{HW-} \int_{-\infty}^{\infty} f = 2\pi i \sum_{\Im z > 0} \text{Res}_z f + \pi i \sum_{z \in \mathbb{R}} \text{Res}_z f.$$

18.7. Beispiel. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

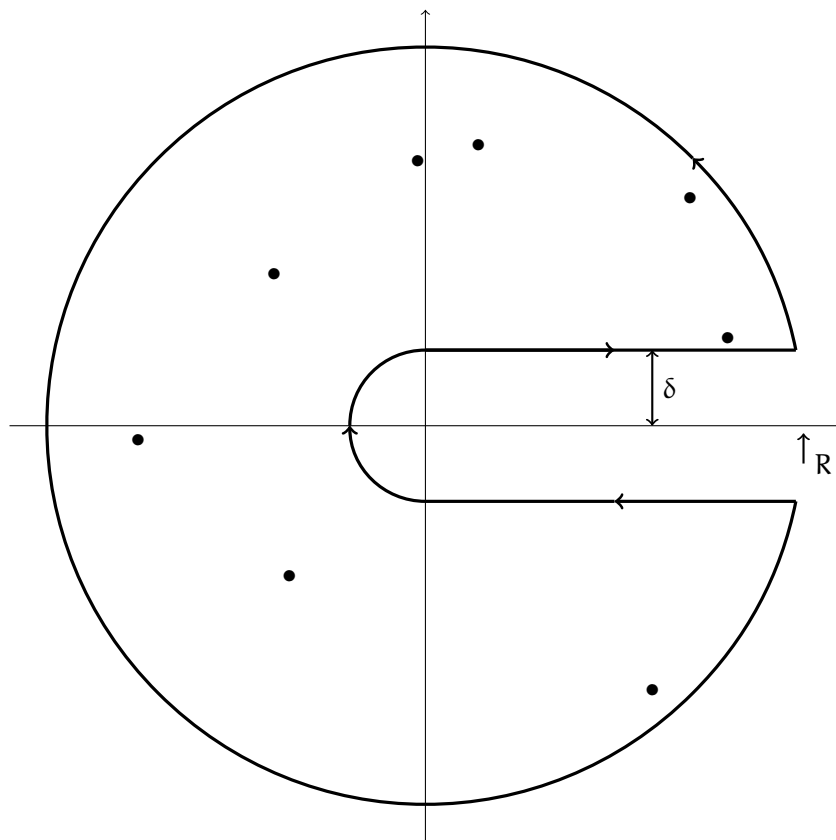


ABBILDUNG 12.

Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}e^{iz}$. Diese ist holomorph bis auf einen einfachen Pol in 0. Für $\Im z \geq 0$ gilt $|f(z)| = \frac{1}{|z|}e^{-\Im z}$, also liefert Satz 18.6

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{HW-} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \cdot \text{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z} = \pi i.$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert³³ nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

18.D. Uneigentliche Integrale $\int_0^{\infty} f(x) dx$, Mellin-Transformationen

Es sei $A \subset \mathbb{R}_+$ eine endliche Menge und $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$ eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten, welche sämtlich in A liegen. Wir interessieren uns für das Integral $\int_0^{\infty} f(x) dx$. Dazu wird es günstig sein, allgemeiner die *Mellin-Transformation* $\int_0^{\infty} x^\alpha f(x) dx$ zu untersuchen.

³³Der Realteil liefert das wenig überraschende Ergebnis

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{HW-} \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x} dx = 0,$$

welches auch sofort aus der profanen Feststellung, dass der Integrand eine ungerade Funktion ist, folgt.

18.8. Beispiel. $f(x) = \frac{1}{1+x^2} dx$. Wir zerlegen³⁴ **TODO**

Wie bei der Diskussion des HANKELschen Schleifenintegrals im Abschnitt 14.4 zeigt man, dass für $\delta \rightarrow 0$ das Integral $\int_{\gamma_\delta} z^\alpha f(z) dz$ gegen $(e^{2\pi i \alpha} - 1) \int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$ konvergiert. Andererseits ist das Integral $\int_{\gamma_\delta} z^\alpha f(z) dz$ nach dem Residuensatz gleich $2\pi i \sum_z \text{Res}_z(z^\alpha f(z))$. Man muss allerdings sicherstellen, dass das Integral über den großen Kreis im Limit verschwindet. Dazu muss $z^\alpha f(z)$ für $|z| \rightarrow \infty$ die Divergenz der Kreislänge schlagen. Genauer gilt:

18.9. Satz. Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine in \mathbb{C} meromorphe Funktion ohne Polstellen auf dem Intervall $[0, \infty)$. Es gelte $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^{-k}$ mit $k > 0$ ³⁵. Dann gilt für $-1 < \Re \alpha < k - 1$

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = (1 - e^{2\pi i \alpha})^{-1} 2\pi i \sum_z \text{Res}_z(z^\alpha f(z)).$$

Dabei ist $z^\alpha = e^{z \log \alpha}$, wobei $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 2\pi\}$ der Hauptzweig des Logarithmus in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ist.

19. Anwendungen des Residuensatzes II: theoretische Anwendungen

In diesem Abschnitt besprechen wir funktionentheoretische Anwendungen des Residuensatzes.

19.A. Null- und Polstellen zählende Integrale

19.1. Satz. Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{M}(G), F \in \mathcal{O}(G)$. Des Weiteren sei Γ ein in G nullhomologer Zyklus mit $\text{Sp } \Gamma \cap f^{-1}(\{a, \infty\}) = \emptyset$. Für ein festes $a \in \mathbb{C}$ mit $\text{Sp } \Gamma \cap f^{-1}(\{a\}) = \emptyset$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(z) \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz \\ &= \sum_{b \in f^{-1}(\{a\})} F(b) \cdot n(\Gamma, b) \cdot \text{ord}_b(f - a) + \sum_{c \in f^{-1}(\{\infty\})} F(c) \cdot n(\Gamma, c) \cdot \text{ord}_c(f). \end{aligned}$$

BEWEIS. Der Residuensatz liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(z) \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \sum_{z \in G} n(\Gamma, z) \cdot \text{Res}_z \frac{Ff'}{f - a}.$$

Bleiben die Residuen von $\frac{Ff'}{f-a}$ zu bestimmen:

Sei $f(b) = a$. Aus der Bemerkung im Abschnitt 9.7 folgt, dass die Funktion $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)-a} = \frac{\frac{d}{dz}(f(z)-a)}{f(z)-a}$ in b einen Pol erster Ordnung vom Residuum $\text{ord}_b(f-a)$ besitzt. Da F holomorph ist, hat dann $F(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)-a}$ ebenfalls einen Pol erster Ordnung vom Residuum $F(b) \cdot \text{ord}_b(f-a)$.

³⁴BILD

³⁵Das bedeutet, dass f eine rationale Funktion ist, vgl. Abschnitt 11

Sei $f(c) = \infty$. Dann hat auch $f(z) - a$ in c einen Pol der gleichen Ordnung wie f . Wie zuvor sieht man nun, dass $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ in c einen Pol erster Ordnung vom Residuum $\text{ord}_c(f)$ und folglich $F(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)-a}$ ebenfalls einen Pol erster Ordnung vom Residuum $F(c) \cdot \text{ord}_c(f)$ besitzt. \square

19.2. Satz (Null- und Polstellen zählendes Integral). *Seien Γ ein einfach geschlossener nullhomologer Zyklus in G und $f \in \mathcal{M}(G)$ mit $f^{-1}(\{0, \infty\}) \cap \text{Sp } \Gamma = \emptyset$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \#\{\text{Nullstellen in } \text{Int}(\Gamma)\} - \#\{\text{Polstellen in } \text{Int}(\Gamma)\} \\ &= \sum_{z \in \text{Int } \Gamma, f(z)=0} \text{ord}_z f - \sum_{z \in \text{Int } \Gamma, f(z)=\infty} |\text{ord}_z(f)| \\ &= \sum_{z \in \text{Int } \Gamma, f(z) \in \{0, \infty\}} \text{ord}_z f. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wende den Satz 19.1 mit $F = 1$ und $a = 0$ an. Da Γ einfach geschlossen ist, ist $n(\Gamma, z) = 1$ für $z \in \text{Int}(\Gamma)$. \square

19.3. Satz (Rouché). *Seien $f, g \in \mathcal{O}(G), \Gamma$ einfach geschlossener, in G nullhomologer, Zyklus in G . Es gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \text{ für } z \in \text{Sp } \Gamma.$$

Dann haben f und g (mit Vielfachheit gezählt) gleich viele Nullstellen in $\text{Int}(\Gamma)$.

BEWEIS. Betrachte die auf $\text{Sp } \Gamma$ nullstellenfreie Funktion $h_t := g + t(f - g), 0 \leq t \leq 1$. Für diese liefert Satz 19.2

$$N(h_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz.$$

$N(h_t)$ ist eine \mathbb{Z} -wertige Funktion, also konstant. \square

19.B. Die Lagrange-Bürmann Formel

Satz 19.1 geht auf LAGRANGE zurück. Er liefert interessante Formeln für die Umkehrabbildung einer analytischen Funktion bzw. formalen Potenzreihe.

19.4. Funktionentheoretischer Zugang. Wende Satz 19.1 auf folgenden Spezialfall an: $a = 0, f(a) = 0, f'(a) \neq 0$, sowie $F(z) = z$. Nach dem Umkehrsatz 2.4 gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Nullumgebung V , so dass $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset G$ ganz in G liegt und f den offenen Ball $B(0, \varepsilon)$ biholomorph auf V abbildet. Nach Satz 19.1 ist für $w \in V$ die Umkehrabbildung gegeben durch

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\varepsilon} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

Differentiation unter dem Integral ³⁶ liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dw} \right)^n \Big|_0 f^{-1}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\varepsilon} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{1}{n} f(\zeta)^{-n} d\zeta = \frac{1}{n} \operatorname{Res}_0 f^{-n}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Gleichheit partiell integriert.

Wir erhalten also die folgende frappierende Formel für die Potenzreihenentwicklung der Umkehrfunktion von f :

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{Res}_0 f^{-n}) w^n.$$

Führt man die analoge Rechnung mit beliebigem F (statt $F(z) = z$) durch, so erhält man die Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned} F(f^{-1}(w)) &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} \operatorname{Res}_0 (F' f^{-n}). \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \operatorname{Res}_0 (F f' f^{-n-1}). \end{aligned} \tag{19.1}$$

Dabei haben wir von der ersten zur zweiten Gleichung partiell integriert, vgl. Eq. (9.6). Diese sog. LAGRANGE-BÜRMANN Formel hat in der enumerativen Kombinatorik eine gewisse Bedeutung.

19.5. Beweis der Lagrange-Bürmann Formel für formale Potenzreihen.

Die LAGRANGE-BÜRMANN Formel kann allgemeiner für formale Potenzreihen auf rein kombinatorischem Wege, ohne Verwendung funktions-theoretischer Hilfsmittel, bewiesen werden. Sei dazu K ein Körper, der Einfachheit der Charakteristik 0. Mit $K[z]$, $K[[z]]$, $K((z))$ bezeichnen wir wie üblich den Polynomring, Ring der formalen Potenzreihen, resp. Ring der formalen LAURENT-Reihen in einer Unbestimmten über K . Für $f \in K((z))$ bezeichnet $[z^m]f$ den Koeffizienten von z^m in der LAURENT-Entwicklung von f . Insbesondere ist $[z^{-1}]f = \operatorname{Res}_0 f$ das Residuum von f . Man sieht unmittelbar, dass (vgl. Bemerkung im Paragraph 9.6) auch im Kontext formaler LAURENT-Reihen das Residuum einer Ableitung verschwindet,

$$\operatorname{Res}_0 f' = 0, \tag{19.2}$$

bzw. analog zur Rechnung in Bemerkung 9.7

$$\operatorname{Res}_0 (f^i f') = \begin{cases} 1, & i = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{19.3}$$

³⁶oder Entwicklung des Integralkernes nach der geometrischen Reihe wie im Beweis von Theorem 7.2.

Seien nun $F, f \in K[[z]]$ formale Potenzreihen mit $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. Dann ist f invertierbar. Wir bezeichnen $b_n := [z^n](F \circ f^{-1})$, d. h.

$$(F \circ f^{-1})(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n.$$

Folglich

$$F(z) = (F \circ f^{-1})(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n f(z)^n.$$

Differentiation nach z und Multiplikation mit f^{-m} liefert

$$F'(z)f(z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n f(z)^{n-m-1} f'(z).$$

Das Residuum ergibt sich nun wegen Eq. (19.3) zu

$$\operatorname{Res}_0(F'f^{-m}) = m b_m,$$

also

$$b_m = \frac{1}{m} \operatorname{Res}_0(F'f^{-m}), \quad m \geq 1.$$

Nun kann man bei der Residuenbildung wegen Eq. (19.2) ebenfalls partiell integrieren: das Residuum von $(Ff^{-m})' = F'f^{-m} - mFf^{-m-1}f'$ verschwindet, folglich erhalten wir

$$b_m = \frac{1}{m} \operatorname{Res}_0(F'f^{-m}) = \operatorname{Res}_0(Ff^{-m-1}f'),$$

wobei die Formel rechts auch für $m = 0$ gilt; denn wegen $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ ist $\operatorname{Res}_0 f'/f = 1$ (Bem. in 9.7). Wir erhalten also wiederum Eq. (19.1), diesmal jedoch für formale Potenzreihen.

19.6. Eine Variante der Lagrange-Bürmann Formel. Wir leiten noch eine Variante der LAGRANGE-BÜRMANNS Formel her, welche man in der Kombinatorik findet [Rio79, Sec. 4.5]. Dazu seien $F, \phi \in K[[w]]$ formale Potenzreihen mit $\phi(0) \neq 0$. Dann ist $f(z) = z/\phi(z)$ eine invertierbare formale Potenzreihe. Abkürzend setzen wir für eine formale Potenzreihe g

$$D^n g := \left(\frac{d}{dz} \right)^n \Big|_{z=0} g(z).$$

Mit Eq. (9.5) erhalten wir

$$\operatorname{Res}_0(F'f^{-n}) = \operatorname{Res}_0(F'\phi^n z^{-n}) = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1}(F'\phi^n),$$

bzw.

$$\operatorname{Res}_0(Ff'f^{-n-1}) = \frac{1}{n!} D^n(Ff'\phi^{n+1}).$$

Mit

$$f' = \frac{\phi - z\phi'}{\phi^2} = \frac{1 - f\phi'}{\phi}$$

ergibt sich

$$\operatorname{Res}_0 Ff'f^{-n-1} = \frac{1}{n!} D^n(F(1 - f\phi')\phi^n).$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$F(f^{-1}(w)) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} D^{n-1}(F'\phi^n), \quad (19.4)$$

bzw.

$$\frac{F}{1 - f\phi'}(f^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} D^n(F\phi^n). \quad (19.5)$$

Dabei haben wir in der zweiten Formel die Substitution $F(1 - f\phi') \rightarrow F$ vorgenommen.

19.7. Beispiele. TODO 1. $\phi(z) := e^{tz}, f(z) = z \cdot e^{-tz}, F(z) := e^{xz}, g(w) := f^{-1}(w)$. $D^{n-1}(F'\phi^n) = D_{\zeta}^{n-1}(xe^{(x+tn)\zeta}) = x(tn + x)^{n-1}$. $D^n(F\phi^n) = D_{\zeta}^n(e^{(x+tn)\zeta}) = (tn + x)^n$.

$$1 - w\phi'(g(w)) = 1 - wte^{tg(w)}.$$

Setzt man $\mathcal{E}_t(w) := e^{g(w)}$, so erhält man die Formeln

$$\mathcal{E}_t(w)^x = e^{xg(w)} = F(g(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(tn + x)^{n-1}}{n!} w^n,$$

bzw.

$$\frac{\mathcal{E}_t(w)^x}{1 - wt\mathcal{E}_t(w)^t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tn + x)^n}{n!} w^n.$$

Als Experiment frage man jemanden, der die LAGRANGE-BÜRMANN nicht kennt, nach einem direkten Beweis der Formeln

$$\left(\mathcal{E}_t(w) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tn + 1)^{n-1}}{n!} w^n\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(tn + x)^{n-1}}{n!} w^n,$$

bzw. $\mathcal{E}_t(w)^{-t} \log \mathcal{E}_t(w) = w$. Die letzte Formel ergibt sich nach unserer Definition sofort aus $\mathcal{E}_t(w)^{-t} \log \mathcal{E}_t(w) = e^{-tg(w)} \cdot g(w) = f(g(w)) = w$.

19.C. Folgen holomorpher Funktionen

Im Abschnitt 17 hatten wir bereits den WEIERSTRASSschen Konvergenz-satz diskutiert. Es folgen hier tiefliegendere Aussagen über kompakt konvergente Folgen holomorpher Funktionen.

19.8. Satz (HURWITZ). Sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen. Die Grenzfunktion $f \in \mathcal{O}(G)$ sei nicht konstant. Dann sind äquivalent

- (1) f hat im Punkt $a \in G$ eine b -Stelle der Ordnung $m \geq 1$.
- (2)

$$\exists \varepsilon_0 \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \exists n_{\varepsilon} \forall n > n_{\varepsilon} \sum_{\substack{|z-a| < \varepsilon \\ f_n(z)=b}} \text{ord}_z(f_n - b) = m.$$

MERKE. Die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen kann einen Wert nicht öfter annehmen als die Folgenglieder; es sei denn sie ist konstant.

Im Reellen kann hingegen folgendes passieren:

BEWEIS. O. B. d. A. dürfen wir $b = 0$ annehmen. Da Nullstellen isoliert liegen, gibt es jedenfalls ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass

$$\delta_\varepsilon := \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z)| > 0$$

für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Wähle nun zu solchem ε ein n_ε so groß, dass $|f_n(z) - f(z)| < \delta_\varepsilon$ für $z \in \partial B(a, \varepsilon)$ und alle $n \geq n_\varepsilon$.

Die Äquivalenz (1) \Leftrightarrow (2) folgt nun unmittelbar aus dem Satz von Rouché:

(1) \Rightarrow (2).

$$\sum_{\substack{|z-a|<\varepsilon \\ f_n(z)=0}} \text{ord}_z f_n = \sum_{\substack{|z-a|<\varepsilon \\ f(z)=0}} \text{ord}_z f = m,$$

da a isoliert.

(2) \Rightarrow (1). Für jedes $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ hat f in $B(a, \varepsilon)$ genau m Nullstellen. Da $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ beliebig, muss a eine m -fache Nullstelle sein. \square

19.9. Korollar. Sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine kompakt konvergente Folge schlichter(=injektiver) holomorpher Funktionen. Dann ist $f = \lim f_n$ schlicht oder konstant.

BEWEIS. Sei f nicht konstant und angenommen $b = f(z_1) = f(z_2), z_1 \neq z_2$. Wähle disjunkte Bälle $B_j \supset z_j, j = 1, 2$. Dann hat für n groß genug f_n sowohl in B_1 als auch in B_2 eine b -Stelle. Widerspruch! \square

19.10. Gleichgradige Stetigkeit, Arzelà-Ascoli für holomorphe Funktionen. Wir wenden uns nun dem Analogon des Satzes von ARZELÀ-ASCOLI für Folgen holomorpher Funktionen zu. Gegebenenfalls sollten Sie diesen Satz aus der Analysis Vorlesung wiederholen. Für einen direkten Zugang zu den folgenden Sätzen s. [Jän93, Abschnitt 9].

19.11. Satz (MONTEL). Sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet G . Dann ist $(f_n)_n$ lokal gleichgradig stetig und besitzt daher eine kompakt konvergente Teilfolge.

BEWEIS. Sobald die lokale gleichgradige Stetigkeit gezeigt ist, folgt die Existenz der kompakt konvergenten Teilfolge aus dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI.

Sei also $\overline{B(a, r)} \subset G$ eine kompakte Kreisscheibe. Da die Folge $(f_n)_n$ lokal beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $|f_n(z)| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \overline{B(a, r)}$. Nun folgt für $z, w \in B(a, r/2)$ mittels der CAUCHYSCHEN Integralformel

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_n(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r} f_n(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta-w} \right) d\zeta \right| \\ &\leq C \cdot r \max_{|\zeta-a|=r} \frac{|z-w|}{|\zeta-z||\zeta-w|} \leq \frac{4C}{r} |z-w|, \end{aligned}$$

also ist die Folge $(f_n)_n$ sogar lokal gleichgradig LIPSCHITZ-stetig und es folgt die Behauptung. \square

19.12. Satz (VITALI). Sei $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(G)$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet G . Es gelte

(f_n) konvergiert punktweise auf einer in G nicht diskreten Menge G_0 ³⁷.

oder

Es gibt ein $z_0 \in G$, so dass für jedes $k \geq 0$ die Folge der Ableitungen $(f_n^{(k)}(z_0))_n$ konvergiert.

Dann ist $(f_n)_n$ bereits kompakt konvergent.

BEWEIS. Nach dem vorangegangenen Satz von MONTEL genügt es zu zeigen, dass alle kompakt konvergenten Teilfolgen denselben Grenzwert haben. Seien also $(f_{n_k})_k, (f_{n'_l})_l$ Teilfolgen, die kompakt gegen f bzw. g konvergieren. Dann ist aber im ersten Fall $f|_{G_0} = g|_{G_0}$ und nach dem Identitätssatz 7.9 folglich $f = g$.

Im zweiten Fall argumentiert man völlig analog: es ist dann $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle k und man wende wiederum den Identitätssatz 7.9 an. \square

20. Der (kleine) Riemannsche Abbildungssatz

20.1. Theorem. Sei $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ auf die Einheitskreisscheibe.

BEWEIS. Der Lehrbuchbeweis ist mittlerweile so standardisiert, dass der Autor für eine Reproduktion hier wenig motiviert ist. Vielleicht später ... \square

20.2. Theorem (Charakterisierung von Elementargebieten). Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- (1) G ist einfach zusammenhängend.
- (2) G ist homologisch einfach zusammenhängend, d. h. jeder geschlossene Zyklus in G ist nullhomolog in G .
- (3) G ist ein Elementargebiet.
- (4) Jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f(G) \subset \mathbb{C}^*$ besitzt eine holomorphe Wurzel \sqrt{f} .
- (5) G ist homöomorph zu \mathbb{C} , insbesondere zusammenziehbar.
- (6) G ist biholomorph, insbesondere diffeomorph, zu \mathbb{E} oder \mathbb{C} .

21. Die Riemannsche ζ -Funktion II

Analog zur Schleifenintegraldarstellung von Γ bezeichnet

$$I(z) := \int_{\gamma_\delta} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw, \quad 0 < \delta < 2\pi.$$

$I(\mathbb{C})$ ist eine ganze Funktion unabhängig von $0 < \delta < 2\pi$.

21.1. Satz. Es gilt als Identität zwischen meromorphen Funktionen

$$\zeta(z) = \frac{I(z)}{\Gamma(z)(e^{2\pi i} - 1)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

³⁷D. h. G_0 hat einen Häufungspunkt in G .

ζ besitzt also eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} mit einer einzigen einfachen Polstelle bei 1.

BEWEIS. Wir gehen vor wie beim Beweis der Schleifenintegraldarstellung der Gamma-Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} I(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw, \quad \Re z > 1 \\ &= (e^{2\pi iz} - 1) \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dz \\ &= (e^{2\pi iz} - 1) \Gamma(z) \zeta(z), \end{aligned}$$

also

$$\zeta(z) = \frac{I(z)}{\Gamma(z)(e^{2\pi iz} - 1)}, \Re z > 1.$$

Die rechte Seite ist meromorph in \mathbb{C} . Der Faktor $(e^{2\pi iz} - 1)$ hat einfache Nullstellen in \mathbb{Z} , während die Γ -Funktion nullstellenfrei ist und einfache Pole in $0, -1, -2, \dots$ besitzt. Folglich hat ζ eine durch die rechte Seite von ??? gegebene meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} mit 1 als einzigem Pol. \square

21.2. Lemma. Für $\Re z > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{n,j}} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} = 0.$$

BEWEIS. Auf γ_n ist $|e^w - 1|$ gleichmäßig (in w und n) nach unten durch ein $c > 0$ beschränkt. Für $\Re w \geq 2\pi$ ist $|e^w - 1| \geq e^{\Re w} - 1 = e^{2\pi} - 1 > 0$. Für $\Re w \leq -2\pi$ ist $|e^w - 1| \geq 1 - e^{-2\pi} > 0$.

Damit folgt die Schranke für die Teilkurven $\gamma_{n,4}, \gamma_{n,2}$ und $\gamma_{n,6}$. Auf den Geraden $\Im w = \pm\pi i$ ist $e^w - 1$ nullstellenfrei und $\lim_{\Re w \rightarrow \infty} |e^w - 1| = \infty$, $\lim_{\Re w \rightarrow -\infty} |e^w - 1| = 1$.

Aus Kompaktheitsgründen also ebenfalls nach unten beschränkt. Der Rest folgt nun aus der $2\pi i$ -Periodizität von \exp . Somit folgt für $\gamma_{n,j}, j \geq 1$

$$\left| \int_{\gamma_{n,j}} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw \right| \leq L(\gamma_{n,j}) \frac{1}{c} \sup_{w \in \gamma_{n,j}} |w^{z-1}| \leq C \cdot n \cdot n^{\Re z - 1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

falls $\Re z < 0$.

\square

Wir wenden nun auf γ_n den Residuensatz an und erhalten mit Lemma ???

$$\begin{aligned} I(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -2\pi i \sum_{|\xi| < \pi(2n+1), \xi \neq 0} \operatorname{Res}_\xi \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} \\ &= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Res}_{2\pi i n} + \operatorname{Res}_{-2\pi i n}) \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} \\ &= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{z-1} (e^{i\pi/2(z-1)} + e^{3/2i\pi(z-1)}) \\ &= 2\pi (e^{3/2\pi iz} - e^{\pi/2iz}) (2\pi)^{z-1} \zeta(1-z). \end{aligned}$$

21.3. Satz (Funktionalgleichung der ζ -Funktion).

$$\zeta(1-z) = 2(2\pi)^{-z} \cdot \cos(\pi/2z) \cdot \Gamma(z) \cdot \zeta(z)$$

Insbesondere ist $\zeta(-2n) = 0, n = 1, 2, 3, \dots$ Mit $\Psi(z) := \pi^{-z/2} \cdot \Gamma(z/2) \cdot \zeta(z)$ gilt

$$\Psi(1-z) = \Psi(z).$$

BEWEIS. Die letzte Rechnung zeigt mit Satz ???

$$\begin{aligned} (e^{2\pi i} - 1)\Gamma(z)\zeta(z) &= I(z) \\ &= (2\pi)^z e^{i\pi/2z} (e^{i\pi z} - 1)\zeta(1-z). \end{aligned}$$

$$\zeta(1-z) = (2\pi)^{-z} e^{-i\pi/2z} \frac{e^{2\pi iz} - 1}{e^{i\pi z} - 1} \Gamma(z)\zeta(z)$$

... und die Funktionalgleichung ist bewiesen. □

22. Der Weierstraßsche Produktsatz für \mathbb{C}

22.1. Problemstellung. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Gegeben sei eine diskrete Menge $S \subset G$ und eine Abbildung $m : S \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Gesucht ist eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ mit

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \Leftrightarrow z \in S \\ \operatorname{ord}_z f &= m_z \text{ für } z \in S. \end{aligned}$$

Falls S endlich ist, so können wir sofort eine Polynomlösung angeben:

$$f(z) = \prod_{s \in S} (z - s)^{m_s} = z^N \prod_{s \in S} (1 - \frac{s}{z})^{m_s}, \quad N := \sum_s m_s.$$

Ist $|S| = \infty$, so wird das mittlere Produkt kaum konvergieren. Bessere Chancen hat das Produkt auf der rechten Seite (ohne den Faktor " z^∞ "), aber auch das konvergiert nicht immer.

Von jetzt an sei $G = \mathbb{C}$ und zunächst $0 \notin S$. Das bedeutet keine besondere Einschränkung der Allgemeinheit, jedoch eine erhebliche Verbesserung der Bequemlichkeit. Ist nämlich $f \in \mathcal{O}(G)$ eine Lösung für $S^* = S \setminus \{0\}$, so ist $z^{m_0} f(z)$ eine Lösung für S ; dies belegt die erste Behauptung über die

nicht vorhandene Einschränkung der Allgemeinheit. Die Sache mit der Bequemlichkeit wird gleich noch klar werden.

Sei nun $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ eine Abzählung von S mit

$$|s_1| \leq |s_2| \leq \dots, m_j := m_{s_j}.$$

Dann machen wir den Ansatz

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right) e^{p_n(z)},$$

wobei $p_n(z)$ so zu wählen ist, dass

$$\sum \left| \left(1 - \frac{z}{s_n}\right) e^{p_n(z)} - 1 \right| < \infty$$

ausfällt. Die Heuristik dahinter ist

$$1 = \frac{1-z}{1-z} = (1-z) e^{-\log(1-z)} = (1-z) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}}.$$

WEIERSTRASS Faktoren $E_0(z) := (1-z)$, $E_n(z) := (1-z) e^{\sum_{j=1}^n z^j/j}$ heißen WEIERSTRASS Faktoren.

1. $E'_n(z) = -z^n e^{\sum_{j=1}^n z^j/j}$. Für $t \geq 0, |z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E'_n(tz)| &\leq t^n |z|^n \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{|tz|^j}{j}\right) \\ &\leq |z|^n t^n \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{t^j}{j}\right) \\ &= -|z|^n E'_n(t). \end{aligned}$$

2. Für $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E_n(z) - 1| &\leq |z| \int_0^1 |E'_n(tz)| dt \\ &\leq -|z|^{n+1} \int_0^1 E'_n(t) dt = |z|^{n+1}. \end{aligned}$$

22.2. Satz (WEIERSTRASSscher Produktsatz, scharfe Form). Sei (s_n) die oben in ??? erklärte Folge. Dann existiert eine Folge $(k_n) \subset \mathbb{N}$ natürlicher Zahlen so, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left(\frac{z}{s_n}\right)^{k_n+1} < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.³⁸ Für jede solche Folge konvergiert das WEIERSTRASSprodukt

$$f(z) = z^{m_0} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)\right)^{m_n}$$

kompakt in \mathbb{C} . f hat genau in $s \in S$ Nullstellen der Ordnung m_s .

³⁸Man kann konkret $k_n = m_n + n$ wählen, aber das ist weder besonders scharf noch besonders wichtig, siehe aber den HADAMARD Produktsatz unten.

BEWEIS. Für $z \in \mathbb{C}$ wähle ein n_0 mit $|z/s_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$. Dann ist für diese n

$$m_n \left| \frac{z}{s_n} \right|^{m_n+n} \leq m_n \left(\frac{1}{2} \right)^{m_n+n} < \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Sei nun (k_n) eine Folge mit ???. Sei (a_n) die Folge

$$\underbrace{s_1, \dots, s_1}_{m_1}, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_{m_2}, \dots$$

bzw. l_n die Folge

$$\underbrace{k_1, \dots, k_1}_{m_1}, \underbrace{k_2, \dots, k_2}_{m_2}, \dots$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |z/a_n|^{l_n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} m_n |z/s_n|^{k_n+1} < \infty$ und es ist die kompakte Konvergenz des Produktes $z^{m_0} \prod E_{l_n}(z/a_n)$ zu zeigen. Es gilt $|E_{l_n}(z/a_n) - 1| \leq |z/a_n|^{l_n+1}$ für alle $z \in B(0, r)$ und alle n mit $|a_n| \geq r$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ gilt die Abschätzung zu gegebenem $r > 0$ für alle $|z| \leq r$ und alle bis auf endlich viele n . Folglich ist das Produkt auf $B(0, r)$ gleichmäßig konvergent. \square

22.3. Theoretische Konsequenzen.

22.4. Satz. [Faktorisierungssatz] Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit Nullstellen d_n der Ordnung m_n .³⁹ Dann existiert $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und ein WEIERSTRASSprodukt, so dass

$$f(z) = e^{g(z)} z^{m_0} \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n} \left(\frac{z}{d_n} \right)^{m_n}.$$

22.5. Satz. $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Genauer existieren zu $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ohne gemeinsame Nullstellen, so dass $h = \frac{g}{f}$.

BEWEIS. Seien (a_n) die Nullstellen von h , (b_v) die Polstellen und sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ein WEIERSTRASS Produkt mit Nullstellen b_v der Ordnung $|\text{ord}_{b_v}(h)|$. Dann ist $f = g \cdot h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit Nullstellen genau in a_v der Ordnung $\text{ord}_{a_v}(h)$. Es ist also $N(f) \cap N(g) = \emptyset$ und $f/g = h$. \square

23. Kanonische Weierstraß-Produkte, der Hadamardsche Produktsatz

23.A. Verschärfung des Satzes von Liouville

23.1. Satz. Sei $f : B(0, r_1) \rightarrow B(0, r_2)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann ist $|f(z)| \leq \frac{r_2}{r_1} |z|$.

BEWEIS. Die Funktion $g(z) := \frac{1}{r_2} f(r_1 z), |z| < 1$ ist eine mittelpunktstreue ($g(0) = 0$) Selbstabbildung des Einheitskreises \mathbb{E} . Das Lemma von Schwarz 7.15 impliziert dann $|g(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{E}$, also $|f(z)| = |r_2 \cdot g(z/r_1)| \leq r_2/r_1 \cdot |z|$. \square

³⁹Wir setzen in jedem Fall $d_0 = 0$; ist 0 keine Nullstelle, so setzen wir dann eben $m_0 = 0$. Das befreit uns von lästigen Fallunterscheidungen.

23.2. Satz. Sei f holomorph auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leq R, R > 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{R - |z|} \max_{|\zeta|=R} \Re(f(\zeta)) + \frac{R + |z|}{R - |z|} |f(0)|$$

für $|z| < R$.

BEWEIS. Für konstante Funktionen ist die Behauptung klar, sei also f nicht konstant.

1. Wir betrachten zunächst den Fall $f(0) = 0$ und setzen

$$A := \max_{|\zeta|=R} \Re f(\zeta) > \Re f(0).$$

Die Ungleichung ist strikt, da f als nicht konstant angenommen wurde. Mit

$$\phi(z) := f(z)/(2A - f(z))$$

ist

$$f(z) = \frac{2A\phi(z)}{1 + \phi(z)}.$$

ϕ ist sicherlich auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B(0, R)}$, $\phi(0) = 0$, sowie

$$|\phi(z)|^2 = \frac{|f(z)|^2}{|2A - \Re f(z)|^2 + |\Im f(z)|^2} \leq 1, \quad \text{für } |z| = R.$$

Nach dem Maximumprinzip 7.14 bildet also ϕ die offene Kreisscheibe $B(0, R)$ in den Einheitskreis ab und Satz 23.1 liefert $|\phi(z)| \leq |z|/R$ und folglich

$$|f(z)| = \left| \frac{2A\phi(z)}{1 + \phi(z)} \right| \leq \frac{2A|z|/R}{1 - |z|/R} = \frac{2A|z|}{R - |z|}, \quad (23.1)$$

was behauptet wurde.

2. Für allgemeines f (also mit $f(0)$ beliebig) wenden wir 1. auf $f - f(0)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + |f(z) - f(0)| \\ &\leq |f(0)| + \frac{2|z|}{R - |z|} \cdot \max_{|\zeta|=R} \Re(f(\zeta) - f(0)) \\ &\leq \frac{R + |z|}{R - |z|} |f(0)| + \frac{2|z|}{R - |z|} \cdot \max_{|\zeta|=R} \Re f(\zeta). \quad \square \end{aligned}$$

23.3. Erweiterung auf Ableitungen. Wir zeigen noch wie man den vorstehenden Satz zu einer Abschätzung der Ableitungen von f verallgemeinern kann. Dazu wenden wir die CAUCHYSche Ableitungsformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z|=\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (23.2)$$

an mit $\delta = \frac{1}{2}(R - |z|)$. Für diese ζ gilt

$$|\zeta| \leq |z| + \delta = \frac{1}{2}(R + |z|)$$

und Satz 23.2 liefert, falls $A = \max_{|\zeta|=R} \Re f(\zeta) \geq 0$,

$$|f(\zeta)| \leq \frac{R + \frac{1}{2}(R + |z|)}{R - \frac{1}{2}(R + |z|)} (A + |f(0)|) \leq \frac{4R}{R - |z|} (A + |f(0)|).$$

Mit Eq. (23.2) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{\delta^n} \frac{e^4}{R - |z|} (A + |f(0)|) \\ &= \frac{2^{n+2} n!}{(R - |z|)^{n+1}} \left(\max_{|\zeta|=R} \Re f(\zeta) + |f(0)| \right). \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir die folgende Verschärfung des Satzes von LIOUVILLE 7.7. Anstelle einer Betragsabschätzung benötigen wir lediglich eine Abschätzung des Realteils nach oben.

23.4. Korollar. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ eine ganze holomorphe Funktion mit $\Re f(z) \leq C|z|^N$. Dann ist f bereits ein Polynom vom Grad $\leq N$.

BEWEIS. Satz 23.2 liefert mit $R = 2|z|$

$$|f(z)| \leq 2 \max_{|\zeta|=2|z|} \Re f(\zeta) + 3|f(0)| \leq 2^{N+1} C|z|^N + 3|f(0)|$$

und die Behauptung folgt aus dem Satz von LIOUVILLE 7.7. □

23.B. Jensens' Formel

Wir erinnern an die Mittelwerteigenschaft (vgl. Abschnitt 30) harmonischer Funktionen. Sei u eine harmonische Funktion auf dem abgeschlossenen Ball $|z| \leq r$. Dann gilt die Mittelwertformel Eq. (30.1)

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

Sei nun $f \in \mathcal{O}(\overline{B(0, r)})$ irgendeine holomorphe Funktion auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius $r > 0$. Außerhalb der Nullstellen von f gilt

$$\partial \bar{\partial} \log |f|^2 = \partial \bar{\partial} \log f \bar{f} = \partial \frac{\bar{\partial} f}{f} = 0$$

da f'/f holomorph und somit $\frac{\bar{f}'}{f}$ antiholomorph ist. Also ist $\log |f| = \frac{1}{2} \log |f|^2$ außerhalb der Nullstellen von f eine harmonische Funktion.

23.5. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{B(0, r)})$ und seien a_1, \dots, a_n die mit Vielfachheiten wiederholten Nullstellen von f in der offenen Kreisscheibe $B(0, r)$. Dann gilt

$$\log |f(0)| = \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{a_j}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta. \quad (23.3)$$

BEWEIS. Wähle ρ so, dass $\max_j |a_j| < \rho < r$. Falls die Formel (23.3) für ρ gezeigt ist, so folgt sie für r durch Grenzübergang $\rho \nearrow r$, da beide Seiten der Formel sicherlich stetig von ρ abhängen. ⁴⁰

⁴⁰Es dürfen durchaus Nullstellen von f auf dem Rand $\partial B(0, r)$ liegen; beachte dass diese in (23.3) nicht vor kommen!

Für $|b| < 1$ ist $z \mapsto (z - b)/(1 - \bar{b}z)$ ein Automorphismus des Einheitskreises. Folglich ist

$$F(z) := f(z) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1 - \bar{a}_j/\rho z/\rho}{z/\rho - a_j/\rho}$$

holomorph und nullstellenfrei auf der abgeschlossenen Kreisscheibe... \square

23.6. Poisson-Jensen Formel. Wende die POISSON Integralformel auf die im obigen Beweis konstruierte Funktion F mit $\rho = r$ an.

TODO

23.C. Kanonische Weierstraß Produkte

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{C}^* , die dem Betrage nach aufsteigend geordnet sei, d. h.

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$$

Weiterhin gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1} < \infty$$

Dann ist nach dem WEIERSTRASSschen Produktsatz

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n)$$

eine ganze Funktion mit Nullstellen genau in den Punkten a_n .

Man nennt $P(z)$ *kanonisches WEIERSTRASS Produkt vom Geschlecht p* .

23.7. Satz. Zu $\alpha > 0$ existiert ein $r_0 > 0$ so, dass $|P(z)| \leq \exp(\alpha|z|^{p+1})$ für $|z| \geq r_0$.

23.D. Funktionen endlicher Ordnung

23.8. $f \in \mathcal{O}(G)$ heißt Funktion endlicher Ordnung, falls es Konstanten K und α so gibt, dass

$$|f(z)| \leq K_\alpha e^{|z|^\alpha}, z \in \mathbb{C}$$

Das Infimum über alle α für die eine solche Abschätzung (mit von α abhängigem K_α) gibt, heißt *Ordnung* ($\lambda(f)$) von f ⁴¹

23.9. Satz. Mit $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ gilt für die Ordnung $\lambda(f)$ von f die Formel

$$\lambda(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

Satz 23.9 sagt, dass ein WEIERSTRASS Produkt vom Geschlecht p eine ganze Funktion der Ordnung $\leq p + 1$ erklärt.

⁴¹Es ist dem Studenten natürlich klar, dass aus der Infimum Eigenschaft eben nicht geschlossen werden kann, dass für die Ordnung auch noch obige Abschätzung gilt.

23.10. Satz. Sei f eine ganze Funktion der Ordnung λ , $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ seien ihre betragsmäßig geordneten Nullstellen $\neq 0$.⁴² Dann gilt für jedes $\varphi > \lambda$

$$\sum_n |a_n|^{-\varphi} < \infty.$$

23.11. Theorem (HADAMARD Produktsatz). Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion der Ordnung λ . Dann gilt

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} P(z)$$

mit einem Polynom $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $\leq \lambda$ und einem kanonischen WEIERSTRASS Produkt vom Geschlecht p mit $p + 1 > \lambda$.

23.12. Beispiel. Wegen $\sin(\pi z) = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$ ist $\sin(\pi z)$ eine ganze Funktion der Ordnung ≤ 1 . Folglich gilt

$$\sin(\pi z) = e^{a+bz} z \prod' n \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$$

Bleiben nur noch die Konstanten a und b zu bestimmen:

$$\left. \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \right|_{z=0} = \pi = e^a,$$

also

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = e^{bz} \prod' n \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$$

Die linke Seite ist eine gerade Funktion, also muss $b = 0$ sein.

23.13. Laurent-Entwicklung um 0. Sei $f(z) = z^m e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n)$ eine ganze Funktion der Ordnung λ , $p \leq \lambda < p + 1$, $\deg Q \leq p$. Sei

$$\zeta_f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}, \quad \Re s > \lambda$$

⁴³ die ζ -Funktion der Nullstellenfolge von f . Logarithmisches Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f}(z) &= \frac{m}{z} + Q'(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n - z} - \sum_{j=1}^p \frac{z^{j-1}}{a_n^j} \right) \\ &= \frac{m}{z} + Q'(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=p}^{\infty} \frac{z^j}{a_n^{j+1}} \\ &= \frac{m}{z} + Q'(z) - \sum_{j=p}^{\infty} \zeta_f(j+1) z^j. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $Q'(z)$ durch die LAURENT-Entwicklung von f um 0 bestimmt ist. Schließlich ist

$$Q(0) = z^{-z} f(z) \Big|_{z=0}.$$

Den wichtigen Fall kleiner Ordnungen halten wir fest als

⁴²Wir zählen die Nullstellen natürlich immer mit Vielfachheit

⁴³jedenfalls für reelle $s > \lambda$ ist $\zeta_f(s)$ konvergent und die Definition der Potenzen a_n^{-s} unproblematisch.

23.14. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda < 2$. Dann gilt

$$f(z) = z^m e^{a+bz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

mit $a = z^{-m}f(z)|_{z=0}$, $b = \frac{f'}{f}(0)$.

24. Die Riemannsche ζ -Funktion III: Produktentwicklung

Erinnerung:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \zeta'(0) = \log \sqrt{2\pi} = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$$

$$\xi(z) := z(1-z)\pi^{-z/2} \cdot \Gamma(z/2) \cdot \zeta(z).$$

24.1. Satz. $(1-z)\zeta(z)$ und $\xi(z)$ sind ganze Funktionen der Ordnung $\alpha 1$.

Wir erhalten daher

$$(z-1)\zeta(z) = e^{a+bz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2n}\right) e^{-z/2n} \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho},$$

wobei ρ die nichttrivialen Nullstellen $0 < \Re \rho < 1$ durchläuft. Es ist

$$e^a = (z-1)\zeta(z)|_{z=0} = -\zeta(0) = \frac{1}{2},$$

$$b = \frac{\partial_z(z-1)\zeta(z)}{(z-1)\zeta(z)} \Big|_{z=0} = 2\zeta(0) - 2\zeta'(0) = -1 + \log 2\pi.$$

25. Der Primzahlsatz

Wir folgen dem Aufsatz von D. ZAGIER FIXME: Ref über NEWMAN's Beweis des Primzahlsatzes. Allerdings bringen wir einige Ergänzungen.

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 = \#\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}, p \leq x\}$$

bezeichne die Zählfunktion der Primzahlen.

25.1. Theorem (Primzahlsatz). $\pi(x)$ genügt der Asymptotik

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Bem. zur Historie FIXME: Vermutet von Gauß und Legendre, bewiesen 1898 unabhängig voneinander von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN.

Wir erinnern an einige Notation⁴⁴:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \tag{25.1}$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_p \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} = \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \log p p^{-sj} \tag{25.2}$$

$$=: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{25.3}$$

$$\Theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p, \Psi(x) = \sum_{p^r \leq x} \log p \tag{25.4}$$

$$\Phi(s) := \sum_p \frac{\log p}{p^s} \tag{25.5}$$

25.A. Hilfsmittel

25.2. Lemma (Partielle Summation). Seien $g \in C^1[t_1, \infty)$, $t_1 < t_2 < \dots$, sowie $(a_j) \subset \mathbb{C}$. Dann gilt mit $\sum_{t_j \leq x} a_j =: A(x)$

$$\begin{aligned} \sum_{t_j \leq x} a_j g(t_j) &= \int_{t_1}^x g(t) dA(t) \\ &= g(x) \cdot A(x) - \int_{t_1}^x A(t) g'(t) dt. \end{aligned}$$

25.3. Beispiel. $\Theta(x) = \int_1^x \log t d\pi(t) = \pi(x) \cdot \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$, $-\zeta'/\zeta(s) = \int_2^{\infty} x^{-s} d\Psi(x) = -s \int_2^{\infty} x^{-s-1} \Psi(x) dx$.

25.4. Lemma. Für $\alpha > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ ist

$$\int_c^x t^\alpha \log^\beta t dt = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \log^\beta x + O(x^{\alpha+1} \log^{\beta-1} x) = O(x^{\alpha+1} \log^\beta x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Ist $f \in L^1\mathbb{R}_+ \cap L^\infty\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ ($f(t) = o(t)$), so ist

$$\int_c^x f(t) t^\alpha \log^\beta t dt = o(x^{\alpha+1} \log^\beta x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Falls $\beta < 0$ so muss $c > 1$ sein.

25.5. Beispiel. $\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$, $x \rightarrow \infty$.

25.B. äquivalenz von Asymptotiken

25.6. Lemma. 1. $\Theta(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$.

2. $\Theta(x) \leq \Psi(x) \leq \Theta(x) + O(x^{1/2} \log x)$, $x \rightarrow \infty$.

25.7. Satz. Für $\alpha \geq 1/2$, $\beta \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- (1) $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^\alpha \log^\beta x)$ (bzw. o),
- (2) $\Theta(x) = x + O(x^\alpha \log^{\beta+1} x)$ (bzw. o),

⁴⁴Im Folgenden bezeichnet, wenn nichts anderes gesagt wird, \prod_p, \sum_p stets Produkt bzw. Summe über alle Primzahlen

(3) $\Psi(x) = x + O(x^\alpha \log^{\beta+1} x)$ (bzw. o).

Zusatz: Der Satz bleibt richtig für das Restglied $o(1)$. Hierzu verwendet man den Zusatz zu Lemma ???FIXME.

25.C. Beweis des Primzahlsatzes

25.8. Lemma. Für $\Re s \geq 1$ ist $\zeta(s) \neq 0$ und $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ holomorph.

25.9. Satz. Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte messbare Funktion. Die Funktion $g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt$, $\Re z > 0$ besitze eine holomorphe Fortsetzung nach $\Re z \geq 0$. Dann gilt $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f = g(0)$.

25.10. Lemma. $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)-x}{x} dx$ existiert.

25.11. Lemma. $\theta(x) \sim x, x \rightarrow \infty$.

25.D. Primzahlsatz und Riemannsche Vermutung

26. Bloch, Schottky und Picard

26.A. Bloch Konstante

26.1. Satz (A. BLOCH). 1. Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ holomorph auf dem abgeschlossenen Einheitskreis. Es gelte $f'(0) = 1$. Dann enthält das Bild $f(\mathbb{E})$ einen Kreis vom Radius $> \frac{1}{12}$.

2. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$, $c \in G$ mit $f'(c) \neq 0$. Dann enthält das Bild $f(G)$ einen Kreis vom Radius $\frac{1}{12} s |f'(c)|$ für jedes $0 < s < \text{dist}(c, \partial G)$.

Man beachte, dass der Mittelpunkt des Kreises nicht 0 bzw. c zu sein braucht!

26.2. Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so, dass $f(G)$ offen ist. Sei $a \in G$ mit $s := \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| > 0$. Dann enthält $f(G)$ den Kreis $B(f(a), s)$.

Dies ist eine rein topologische Aussage, die nichts mit Funktionentheorie zu tun hat. Sie gilt genauso für eine relativ kompakte offene Teilmenge G eines lokalkompakten metrischen Raumes X

BEWEIS. $f(\overline{G})$, folglich auch $\partial f(G) \subset f(\overline{G})$ sind kompakt. Deshalb gibt es ein $w_* \in \partial f(G)$ mit $\text{dist}(\partial f(G), f(a)) = |w_* - f(a)|$. Wiederum aus Kompaktheitsgründen existiert nun eine Folge $(z_n) \subset G$ mit $f(z_n) \rightarrow w_*$ und $z_n \rightarrow z_*$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(z_*) = w_*$.

Wäre $z_* \in G$, so enthielte, da G offen, $f(G)$ einen ganzen Ball um w_* . w_* ist aber ein Randpunkt von $f(G)$, also muss auch $z_* \in \partial G$ ein Randpunkt sein. Somit ist $|w_* - f(a)| = |f(z_*) - f(a)| \geq \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| = s$. Es folgt nun $B(f(a), s) \subset f(G)$. □

26.3. Lemma. Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{B(a, r)})$, $r > 0$ eine nicht konstante Funktion und $\|f'\|_\infty \leq 2|f'(a)|$. Dann gilt $B(f(a), R) \subset f(B(a, r))$ mit $R = (3 - 2\sqrt{2})r|f'(a)|$.

Man beachte $3 - 2\sqrt{2} \geq \frac{1}{6}$.

26.4. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Die Funktion $z \mapsto |f'(z)|(1 - |z|)$ nehme in $p \in \mathbb{E}$ ihr Maximum M an. Dann enthält $f(\mathbb{E})$ den Kreis um $f(p)$ vom Radius $(\frac{3}{2} - \sqrt{2})M > \frac{1}{12}|f'(0)|$.

Dieser Satz impliziert natürlich Satz ???FIXME.

26.A.1. Anwendung: kleiner Satz von PICARD. Als Anwendung des BLOCHSchen Satzes geben wir hier einen Beweis des kleinen PICARDSchen Satzes. Den großen PICARDSchen Satz werden wir weiter unten mittels des Satzes von SCHOTTKY herleiten. Einen weiteren Beweis werden wir im Seminar mit Hilfe der elliptischen Modulfunktion kennenlernen.

26.5. Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $\pm 1 \notin f(G)$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(G)$ mit $f = \cos F$.

BEWEIS. Die Funktion $1 - f^2$ ist nullstellenfrei, also existiert eine holomorphe Wurzel, d. h. $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g^2 = 1 - f^2$, folglich $1 = g^2 + f^2 = (f + i \cdot g) \cdot (f - i \cdot g)$. Also sind auch die Funktionen $f \pm i \cdot g$ nullstellenfrei und es existiert ein $F \in \mathcal{O}(G)$, so dass $f + i \cdot g = e^{iF}$. Aus FIXME (make displayed equ) folgt $f - i \cdot g = (f + i \cdot g)^{-1} = e^{-iF}$, also $\cos F = \frac{1}{2}(e^{iF} + e^{-iF}) = f$. \square

26.6. Lemma. Sei G ein Elementargebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $0, 1 \notin f(G)$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{O}(G)$, so dass $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi \cos(\pi g)))$.

Für jede Funktion g , die diese Gleichung erfüllt enthält das Bild $g(G)$ keinen Kreis vom Radius 1.

BEWEIS. 1. Die Funktion $2f - 1$ läßt ± 1 aus, also nach Lemma ???FIXME $2f - 1 = \cos \pi F$ mit holomorphem F . Wegen $\cos \pi k = (-1)^k$ muss F alle $k \in \mathbb{Z}$, insbesondere ± 1 , auslassen. Nochmalige Anwendung von Lemma ???FIXME liefert $F = \cos \pi g$. Damit ist die Gleichung FIXME ??? gezeigt.

2. Bla \square

26.7. Satz (Kleiner Satz von PICARD). Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine nicht konstante ganze Funktion. Dann läßt f höchstens einen Wert aus.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass eine ganze Funktion, welche zwei komplexe Werte ausläßt, bereits konstant sein muss. Da \mathbb{C} unter ihrer Automorphismengruppe FIXME ref zweipunkthomogen ist, genügt es, eine ganze Funktion f zu betrachten, welche die Punkte 0 und 1 nicht annimmt. Nach Lemma ??? FIXME ist f von der Gestalt $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi \cos(\pi g)))$, wobei das Bild von g keinen Kreis vom Radius 1 enthält. Nach dem 2. Teil von Satz ??? muss g daher konstant sein. Damit ist aber auch f konstant. \square

26.B. Schottky

$$S(r) := \{f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}) \mid |f(0)| \leq r, 0, 1 \notin f(\overline{\mathbb{E}})\}.$$

$$L(\Theta, r) := \exp\left(\pi \exp \pi\left(3 + 2r + \frac{\Theta}{\beta(1 - \Theta)}\right)\right)$$

$\beta > 0$ sei irgendeine Konstante für die der Satz von BLOCH gilt, z. B. $\frac{1}{12}$.

26.8. Satz (SCHOTTKY). Sei $f \in S(r)$. Dann gilt für $0 < \Theta < 1$ die Ungleichung $|f(z)| \leq L(\Theta, r)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ mit $|z| \leq \Theta$.

26.9. Lemma. Falls $\cos \pi a = \cos \pi b$ so ist schon $b = \pm a + 2n$ für geeignetes $n \in \mathbb{Z}$.

Zu $w \in \mathbb{C}$ existiert ein $v \in \mathbb{C}$ mit $\cos \pi v = w$ und $|v| \leq 1 + |w|$.

26.10. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ mit $0, 1 \notin f(\overline{\mathbb{E}})$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ mit

(1) $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi \cos(\pi g)))$, $|g(0)| \leq 3 + 2|f(0)|$.

(2) $|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{\Theta}{\beta(1-\Theta)}$ für alle z mit $|z| \leq \Theta, 0 < \Theta < 1$.

26.B.1. Anwendung: Normale Familien. Als Anwendung bringen wir eine Verallgemeinerung des MONTELSchen Satzes, dessen Konsequenz der große Satz von PICARD ist. Für ein Gebiet G setzen wir

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(G) \mid 0, 1 \notin f(G)\}.$$

Wenn die Abhängigkeit von G hervorgehoben werden soll, schreiben wir auch $\mathcal{F}(G)$.⁴⁵

26.11. Lemma. Fixiere $w \in G, 0 < r < \infty$. Dann ist $\mathcal{F}_* = \{f \in \mathcal{F} \mid |f(w)| \leq r\}$ in einer Umgebung von w beschränkt.

26.12. Lemma. Fixiere $p \in G$. $\mathcal{F}_1 := \{f \in \mathcal{F} \mid |f(p)| \leq 1\}$. Dann ist \mathcal{F}_1 lokal beschränkt in G .

26.13. Satz (MONTEL–CARATHÉODORY). Jede Folge $(f_n) \subset \mathcal{F}$ hat eine kompakt konvergente Teilfolge. Dabei ist kompakte Konvergenz gegen die konstante Funktion ∞ zugelassen.

BEWEIS. Falls (f_n) Teilfolgen besitzt, die in \mathcal{F}_1 liegen, so folgt die Behauptung aus Lemma ??? und dem Satz von MONTEL. Liegen nur endlich viele Folgenglieder in \mathcal{F}_1 , so liegen fast alle $\frac{1}{f_n} \in \mathcal{F}_1$. Sei (g_n) eine (nach MONTEL) kompakt konvergente Teilfolge von $1/f_n, g = \lim g_n$. Ist g nullstellenfrei, so konvergiert $f_n = 1/g_n$ kompakt gegen $1/g$.

Hat hingegen g Nullstellen, so folgt aus dem Satz von HURWITZ FIXME name, dass $g = 0$. Also konvergiert f_n kompakt gegen ∞ . □

26.14. Theorem (großer Satz von PICARD). bla

27. Elliptische Funktionen

27.1. Vorüberlegung. Die Perioden einer nichtkonstanten meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ bilden eine diskrete Untergruppe

$$\text{Per}(f) = \{\omega \in \mathbb{C} \mid f(\cdot + \omega) = f\} \subset \mathbb{C}$$

der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$. Sicherlich sind mit ω_1, ω_2 auch $-\omega_1, \omega_1 + \omega_2$ Perioden von f . Hat $\text{Per}(f)$ einen Häufungspunkt, so muss f nach dem Identitätssatz 7.9 konstant sein. Folglich ist $\text{Per}(f)$ eine diskrete Untergruppe von \mathbb{C} . Die diskreten Untergruppen von \mathbb{C} kann man leicht bestimmen:

⁴⁵kommt das vor?

27.2. Satz. Sei $G \subset (\mathbb{R}^n, +)$ eine diskrete Untergruppe. Dann gibt es linear unabhängige $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{R}^n$ so, dass $G = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_r$. r heißt Rang des Gitters G .

BEWEIS. Wir machen Induktion nach n . Für $n = 0$ ist nichts zu beweisen ⁴⁶

Die Behauptung sei nun für Dimensionen $\leq n$ bewiesen und wir betrachten $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir wählen $\omega_1 \in G$ mit

$$|\omega_1| = \min\{|\omega| \mid \omega \in G \setminus \{0\}\}.$$

CLAIM. $G \cap \mathbb{R}\omega_1 = \mathbb{Z}\omega_1$.

PROOF OF THE CLAIM. $G \cap \mathbb{R}\omega_1$ ist eine diskrete Untergruppe des eindimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}\omega_1$ und ω_1 ist Element minimalen Betrages > 0 . Ist $\eta \in \mathbb{R}\omega_1$ so wähle $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$|\eta - n\omega_1| = \min\{|\eta - k\omega_1| \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist $|\eta - n\omega_1| < |\omega_1|$, also muss wegen der Minimalität des Betrages von ω_1 schon $\eta = n\omega_1$ sein. QED

Betrachte nun den Quotientenraum $V := \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\omega_1 \simeq \mathbb{R}^n$.

CLAIM. $G/\mathbb{Z}\omega_1 \subset V$ ist eine diskrete Untergruppe.

PROOF OF THE CLAIM. Sei $\bar{g}_n = g_n + \mathbb{Z}\omega_1 \in G/\mathbb{Z}\omega_1 \setminus \{0\}$ eine Folge mit

$$\|\bar{g}_n\| \rightarrow \inf\{\|g\| \mid g \in G/\mathbb{Z}\omega_1 \setminus \{0\}\}.$$

Wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\|g_n + \lambda\omega_1\| \leq \|\bar{g}_n\| + 1$. Folglich ist $\|g_n + [\lambda_n]\omega_1\| \leq \|\bar{g}_n\| + 1 + \|\omega_1\|$, also dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass die Folge (g_n) beschränkt ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge sei (g_n) konvergent gegen $g \in G$. Da G diskret ist, ist $g = g_n$ für $n \geq n_0$. Also ist $g \notin \mathbb{Z}\omega_1$ und somit

$$\inf\{\|x\| \mid x \in G \setminus \mathbb{Z}\omega_1 \setminus \{0\}\} = \|\bar{g}\| > 0$$

und es folgt die Behauptung. QED

Nach Induktionsvoraussetzung angewandt auf die diskrete Gruppe $G/\mathbb{Z}\omega_1$ gibt es nun $\bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_r \in G/\mathbb{Z}\omega_1$ so, dass

$$G/\mathbb{Z}\omega_1 = \mathbb{Z}\bar{\omega}_2 + \dots + \mathbb{Z}\bar{\omega}_r.$$

Schließlich zeigen wir

CLAIM. $G = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_r$.

PROOF OF THE CLAIM. Die Inklusion \subset ist klar. Umgekehrt sei $x \in G$. Dann ist $\bar{x} = \sum_{j=2}^r \lambda_j \bar{\omega}_j$ eine Linearkombination der \mathbb{Z} -Basis der Quotientengruppe, folglich $x - \sum \lambda_j \omega_j \in \mathbb{Z}\omega_1$ und folglich ist x eine Linearkombination der $\omega_1, \dots, \omega_r$. Diese sind aber auch linear unabhängig. Ist nämlich $\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_r \omega_r = 0$, so auch durch Übergang zum Quotienten $\lambda_2 \bar{\omega}_2 + \dots + \lambda_r \bar{\omega}_r = 0$. Da die $\bar{\omega}_j$'s eine \mathbb{Z} -Basis bilden, folgt $\lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ und schließlich dann auch $\lambda_1 = 0$. QED

⁴⁶Wem dies nicht behagt, der analysiere den nachfolgenden Induktionsschritt und wende ihn auf den Fall $n = 1$ nochmal an.

□

Im Folgenden sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in \mathbb{C} . Wir können und werden ω_1, ω_2 stets so numerieren, dass

$$\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}.$$

Mit

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}(\Gamma) = \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid 0 \leq \lambda < 1, 0 \leq \mu < 1\}$$

bezeichnen wir einen *Fundamentalebene* für Γ . Mit $\mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ bezeichnen wir den Körper der Γ -periodischen meromorphen Funktionen. Man nennt die Elemente von $\mathcal{M}(\Gamma)$ auch *elliptische Funktionen*.

Sicherlich ist die konstante Funktion $1 \in \mathcal{M}(\Gamma)$, also ist $\mathcal{M}(\Gamma)$ jedenfalls nicht leer. Die Existenz interessanter elliptischer Funktionen muss noch ein bisschen warten.

27.A. Die Liouvilleschen Sätze

27.3. Satz (Liouville). *Sei $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$. Dann gilt*

1. $\sum_{z \in \mathbb{F}} \text{Res}_z f = 0$.
2. *Die einzigen elliptischen Funktionen mit höchstens einem Pol 1. Ordnung sind die Konstanten.*
3. *Sei $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$ nicht konstant. Dann nimmt f jeden Wert in $\widehat{\mathbb{C}}$ gleich oft an.*
4. $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$. Dann ist $\sum_{z \in \mathbb{F}} z \cdot \text{ord}_z f \in \Gamma$.

BEWEIS. 1. Wir wählen $z_0 \in \mathbb{C}$ so, dass auf dem Rand des Parallelograms $\mathbb{F}_{z_0} := z_0 + \mathbb{F}$ keine Pole von f liegen. Dann liefert Integration über den Rand und der Residuensatz

$$2\pi i \sum_{z \in \mathbb{F}} \text{Res}_z(f) = \int_{\partial \mathbb{F}_{z_0}} f = 0,$$

denn wegen der Periodizität heben sich die Integrale über die Streckenpaare $[z_0, z_0 + \omega_1]$, $[z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2]$ bzw. $[z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2]$, $[z_0 + \omega_2, z_0]$ jeweils auf. ⁴⁷

2. Hat f nur einen einzigen Pol 1. Ordnung z^* , so ist nach 1. $\text{Res}_{z^*}(f) = 0$, also f holomorph. Wegen der Periodizität ist $f(\mathbb{C}) = f(\overline{\mathbb{F}})$ kompakt, also ist f beschränkt und nach dem Satz von LIOUVILLE 7.7 damit konstant.

3. Sei $w \in \mathbb{C}$. Die Funktion $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)-w}$ ist ebenfalls elliptisch. Nach dem Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral ist die Residuensumme von g über einen Fundamentalebene gerade gleich der Differenz der mit Vielfachheiten gezählten w -Stellen bzw. Polstellen von f innerhalb dieses Fundamentalebene. Da g aber elliptisch ist, liefert 1., dass die Residuensumme von g verschwindet.

4. bla. □

⁴⁷Explain Sprech bzgl. einzig usw, bezieht sich auf Fundamentalebene ...

27.B. Die \wp -Funktion

Von nun sei $\Gamma = \Gamma(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Die WEIERSTRASS'sche \wp -Funktion ist definiert durch

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Gamma} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

27.4. Satz. Die Reihe der \wp -Funktion konvergiert kompakt im Bereich

$$\{(z, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^3 \mid \omega_2 \neq 0, \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}, z \notin \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2\}.$$

Folglich ist $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ in jeder der Variablen holomorph.

BEWEIS. Sei K eine kompakte Teilmenge von FIXME ??? . Dann existiert ein $\rho > 0$ so, dass $|z| \leq \rho$ für alle $z \in K$. Wähle nun ein Kompaktum $K' \subset \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \omega_2 \neq 0, \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}\}$ mit $K \subset B(0, \rho) \times K'$.

Die stetige Funktion $(\omega_1, \omega_2, m_1, m_2) \mapsto |m_1\omega_1 + m_2\omega_2|$ nimmt auf $K \times S^1$ FIXME ⁴⁸ ihr Minimum $\alpha > 0$ an, folglich gilt für $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $(\omega_1, \omega_2) \in K$ FIXME

$$|m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \geq \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \cdot \alpha.$$

Für $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2, (m_1^2 + m_2^2)^{1/2} \geq (\rho + 1)/2$ folgt

bla viel zu umstaendlich.....

□

27.5. Satz. $\wp = \wp(\cdot; \omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}(\Gamma(\omega_1, \omega_2))$. \wp ist gerade mit Polen 2. Ordnung genau in den Gitterpunkten.

BEWEIS. Meromorphie und Lage der Polstellen ist klar mit Satz ??? FIXME . Ebenso ist $\wp(z) = \wp(-z)$. Die Ableitung

$$\wp'(z) = -2 \sum'_{\omega \in \Gamma} (z - \omega)^{-3}$$

ist sicher Γ -periodisch. Folglich ist $c_\omega = \wp - \wp(\cdot + \omega)$ konstant für $\omega \in \Gamma$. Da \wp aber eine gerade Funktion ist, folgt $c_\omega = \wp(-\omega/2) - \wp(\omega/2) = 0$. □

Für $k \geq 4$ setzen wir

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum'_{(m,n) \neq (0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-k}.$$

Diese Reihen konvergieren sicherlich kompakt auf $\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \omega_1 \neq 0, \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}\}$. Folglich sind die G_k holomorph.

Sicherlich ist aus Symmetriegründen $G_{2k+1} = 0$. Wir berechnen die LAURENT-Entwicklung von \wp um 0:

27.6. Satz.

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=2}^{\infty} (2j - 1)G_{2j}z^{2j-2} = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots$$

⁴⁸Notation fuer Kreislinie

BEWEIS. Die geometrische Reihe $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\omega^j} z^j$ liefert für $|z| < |\omega|$

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} \frac{1}{\omega^2} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{\omega^{j+1}} z^{j-1}.$$

Einsetzen in die Reihe für die \wp -Funktion liefert

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{\omega^{j+1}} z^{j-1}.$$

Die Doppelreihe konvergiert für $|z| < \min\{|\omega| \mid \omega \in \Gamma \setminus \{0\}\} =: \gamma(\Gamma)$ sicher absolut und wir können umordnen. Daher

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=2}^{\infty} j G_{j+1} z^{j-1} = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=2}^{\infty} (2j-1) G_{2j} z^{2j-1}. \quad \square$$

27.7. Satz (Differentialgleichung der \wp -Funktion).

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60G_4\wp + 140G_6, \quad g_2 := 60G_4, \quad g_3 := 140G_6$$

27.8. Satz. \wp' hat einfache Nullstellen in denjenigen $\omega \in \Gamma$ für die $\omega/2 \notin \Gamma$. Die Nullstellen in \mathbb{F} sind also $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Wir setzen $e_j := \wp(\omega_j/2), \omega_3 := \omega_1 + \omega_2$. Diese Werte werden wegen $\wp'(\omega_j/2) = 0$ doppelt angenommen. Da \wp jeden Wert genau zweimal annimmt, sind e_1, e_2, e_3 somit paarweise verschieden.

27.9. Satz. $\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$.

27.10. Satz. $\mathbb{C}(\wp) = \{f \in \mathcal{M}(\Gamma) \mid f \text{ gerade}\}, \mathcal{M}(\Gamma) = \mathbb{C}(\wp)[\wp']$. Der Grad dieser Körpererweiterung über $\mathbb{C}(\wp)$ ist 2.

28. Miscellanea

Es folgt Material, welches ich mir zwar notiert habe, welches jedoch nicht zum Vortrag gekommen ist.

29. Anhang: Die Stirling Formel

Unkommentiert aus Manuskript:

29.A. Bernoulli Polynome (periodisch)

$$\beta_0(x) = 1, \beta_1(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}, \beta'_k = k\beta_{k-1}, \beta_k(n) = B_k, k \geq 2, n \in \mathbb{Z}_+.$$

29.B. Eulersche Summenformel

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n \beta_1(x) f'(x) dx$$

29.C. Stirling direct

VERY ROUGH

Sei zunächst $z > 0$ reell, dann gilt die Funktionalgleichung des log uneingeschränkt. Mit der Eulerschen Summenformel

$$\begin{aligned} \log \frac{N!N^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+N)} &= z \log N + \sum_{n=1}^N \log n - \sum_{n=0}^N \log(z+N) \\ &= z \log N + \int_1^N \log x dx + \frac{1}{2} \log N + \\ &\quad \int_1^N \frac{\beta_1(x)}{x} dx - \int_0^N \log(z+x) dx - \frac{1}{2}(\log z + \log(z+N)) - \int_0^N \frac{\beta_1(x)}{z+x} dx \\ &= (z - \frac{1}{2}) \log z - z + 1 + \int_1^\infty \frac{\beta_1(x)}{x} dx - \int_0^\infty dx + o(1). \end{aligned}$$

Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ liefert

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + 1$$

zunächst für $z > 0$, a posteriori für alle $z \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

30. Anhang: Harmonische Funktionen

Sei $f = u + iv \in \mathcal{O}(G)$ holomorph mit Realteil u und Imaginärteil v . Dann ist u bekanntlich harmonisch. Es gilt weiter

$$f' = \frac{1}{2}(\partial_x - i - \partial_y)(u + iv) = u_x - iu_y,$$

wobei wir die CAUCHY-RIEMANN Gleichungen $v_x = -u_y, v_y = u_x$ benutzt haben. D. h. f' läßt sich alleine aus $\Re(f)$ berechnen!.

30.1. Satz. Sei G ein Elementargebiet und $u \in C^2(G)$ harmonisch. Dann existiert $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $u = \Re(f)$.

BEWEIS. $g := u_x - iu_y$ ist holomorph, denn $g \in C^2(G)$ und $\Re(g)_x = u_{xx} = -u_{yy} = \Im(g)_y, \Re(g)_y = u_{xy} = -(-u_y)_x = -\Im(g)_x$. Da G ein Elementargebiet ist, existiert $\tilde{f} \in \mathcal{O}(G)$ mit $\tilde{f}' = g$. Dann ist nach ??? $\Re \tilde{f}_x = u_x, \Re \tilde{f}_y = u_y$, also $\Re \tilde{f} - u = c \in \mathbb{C}$. Setze $f := \tilde{f} - c$. Dann ist $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $\Re f = u$. □

30.2. Korollar (Mittelwerteigenschaft). Sei $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion auf dem Gebiet G . Des Weiteren sei $B(z, r) \subset G$. Dann gilt

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta. \tag{30.1}$$

BEWEIS. Da Kreise Elementargebiete sind, ist u in einer Umgebung von $\overline{B}(z, r)$ Realteil einer holomorphen Funktion f . Also

$$\begin{aligned} u(z) &= \Re f(z) = \Re \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= \Re \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta. \quad \square \end{aligned}$$

30.3. Korollar (Maximumprinzip). Sei $u \in C^2(G)$ eine reellwertige harmonische Funktion. Nimmt u im Inneren von G Maximum oder Minimum an, so ist u bereits konstant.

Dies folgt unmittelbar aus der Mittelwerteigenschaft 30.2.

Indem man in der CAUCHYSCHEN Integralformel zum Realteil übergeht, erhält man für harmonische Funktionen die POISSONSCHEN Integralformel.

30.4. Satz (POISSON Integralformel). Sei u auf $\overline{B}(0, R)$ stetig und in $B(0, R)$ harmonisch. Dann gilt für $|z| < R$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} u(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\theta, \quad \zeta = Re^{i\theta}.$$

BEWEIS. TODO □

Literatur

- [AHL78] L. V. AHLFORS, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 510197 (80c:30001) [5](#)
- [BES062] H. BEHNKE and F. SOMMER, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.*, Zweite veränderte Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 77, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962. MR 0147622 (26 #5137) [5](#)
- [FIL80] W. FISCHER and I. LIEB, *Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course], vol. 47, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980, Aufbaukurs Mathematik. MR 554918 (81e:30001) [5](#), [54](#)
- [FIL88] ———, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course], vol. 48, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988. MR 972501 (90d:30001) [5](#)
- [FRBU93] E. FREITAG and R. BUSAM, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993. MR 1250380 (94j:30001) [5](#)
- [JÄN93] K. JÄNICH, *Funktionentheorie*, third ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993, Eine Einführung. [An introduction]. MR 1231973 [5](#), [66](#)
- [LEB72] N. N. LEBEDEV, *Special functions and their applications*, Dover Publications, Inc., New York, 1972, Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Unabridged and corrected republication. MR 0350075 (50 #2568) [46](#)
- [REM84] R. REMMERT, *Funktionentheorie. I*, Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics], vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 753290 (85h:30001) [5](#), [54](#)
- [REM91] ———, *Funktionentheorie. II*, Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics], vol. 6, Springer-Verlag, Berlin, 1991. MR 1150243 (93f:30002) [5](#)

- [RIO79] J. RIORDAN, *Combinatorial identities*, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1979, Reprint of the 1968 original. MR 554488 (80k:05001) [64](#)
- [RUD87] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k:00002) [5](#)
- [SAL11] D. A. SALAMON, *Funktionentheorie.*, Basel: Birkhäuser, 2011 (German). [5](#)
- [TIT58] E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1958, Reprint of the second (1939) edition. MR 3155290 [5](#)

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT BONN, ENDENICHER ALLEE 60, 53115 BONN,
GERMANY

E-mail address: ml@matthiaslesch.de, lesch@math.uni-bonn.de

URL: www.matthiaslesch.de, www.math.uni-bonn.de/people/lesch