Kleine AG
Lagrange Faserungen

am 14.07.2007 in Bonn

Organisatoren: Christian Lehn (clehn@students.uni-mainz.de), Sven Meinhardt (sven@math.uni-bonn.de)

1. Einleitung

Untersucht man kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten X mit verschwindender erster Chernklasse, so stößt man sehr schnell auf die sogenannten irreduziblen holomorphen symplektischen Mannigfaltigkeiten (IHS). Nach einem Satz von Bogomolov gibt es eine endliche Überlagerung $\tilde{X}$ von X, die ein Produkt von Tori, einfach zusammenhängenden Calabi-Yaus und IHS ist. Letztere sind kompakte einfach zusammenhängende Kählermannigfaltigkeiten versehen mit einer bis auf einen Skalar eindeutigen holomorphen symplektischen Form. Das differentialgeometrische Pendant zu IHS sind Hyperkählermannigfaltigkeiten.

Die Geometrie von IHS ist sehr speziell. Die Symplektizität der Form erzwingt gerade Dimension. Es gibt kaum Morphismen zwischen ihnen und man kennt nur wenige Beispiele. In Dimension 2 sind es genau die K3-Flächen. In höherer Dimension findet man bis auf Deformation lediglich Hilbertschemata von Punkten auf K3-Flächen, die sogenannten verallgemeinerten Kummervarietäten und zwei weitere exzeptionelle Beispiele gewisser Modulräume von Garben auf K3 oder abelschen Flächen.

Ein Ansatz zum besseren Verständnis dieser Objekte ist es ihre Faserungen zu studieren. Eine Faserung ist hierbei ein eigentlicher surjektiver Morphismus $X \to S$ normaler Varietäten, $0 < \dim S < \dim X = 2n$, dessen generische Fasern zusammenhängend sind. Matsushita hat gezeigt, dass, wenn X IHS ist, sehr starke Einschränkungen an die Basis gelten. So ist notwendig $\dim S = n$ und die generische Faser F ist ein Lagrangescher komplexer Torus. Lagrange bedeutet, dass die symplektische Form σ eingeschränkt auf F verschwindet. An dieser Stelle zeigt sich ein interessanter Zusammenhang zu den vollständig integrablen Systemen. Der antikanonische Divisor $-K_S$ ist ampel und die Basis hat Picardzahl $\varrho(S) = 1$. Da für glattes S auch die Hodgezahlen $h^{p,q}(S)$ mit denen von $\mathbb{P}^n$ bereinstimmen, stellt sich die Frage, ob es andere Möglichkeiten als $S = \mathbb{P}^n$ gibt. Diese Frage ist nach wie vor offen. Lässt man singuläre Basen zu, so findet man auch hier gewisse Einschränkungen: S hat höchstens $\mathbb{Q}$-faktorielle log-terminale Singularitäten. Auch hier kennt man jedoch keine anderen Beispiele als $S = \mathbb{P}^n$. Ein wichtiges Ingredienz bei den Beweisen ist die sogenannte Bogomolov-Beauville-Form, eine quadratische Form $q_X : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, die man als Verallgemeinerung der Schnittpaarung auf K3 lesen kann.

Für $n = 1$ kommt als Basis nur $\mathbb{P}^1$ in Frage und IHS, die solche Faserungen zulassen, sind genau die elliptischen K3-Flächen. Ein Kriterium dafür, dass eine projektive K3-Fläche X elliptisch ist, stellt die Existenz eines nichttrivialen Divisors D auf X mit $D^2 = 0$ dar. Jede K3 kann in eine projektive deformiert werden und somit kann man sich die folgenden Fragen stellen:

- Kann jede IHS in eine solche deformiert werden, die eine Lagrange Faserung zulässt?
- Besitzt eine IHS X eine Lagrange Faserung, wenn es einen Divisor D auf X mit $q_X(D) = 0$ gibt?

Diese Fragen sind jedoch unbeantwortet und somit wenden wir uns besser dem zu, was wir im Rahmen der kleinen AG erreichen möchten.

Zunächst wollen wir IHS und Hyperkählermannigfaltigkeiten sowie die Bogomolov-Beauville-Form kennen lernen. Danach beschäftigen wir uns mit vollständig integrablen Systemen und formulieren den Satz von Matsushita. Wir wollen verschiedene Resultate aus der Arbeit Matsushitas diskutieren und das ein oder andere beweisen ohne allzu technisch zu werden. Danach studieren wir den Fall von K3-Flächen und das Hitchin-System.

2. Programm

1. Vortrag (45 Minuten): Irreduzible holomorphe symplektische Mannigfaltigkeiten. Im ersten Vortrag sollen irreduzible holomorphe symplektische Mannigfaltigkeiten und Hyperkählermannigfaltigkeiten eingeführt und deren Beziehungen zueinander erläutert werden. ([2], Kap. 1, Abschn. 5.5 und 5.2) Im Anschluss daran schauen wir uns ein paar Beispiele an: K3, Hilbertschemata und Kummervarietäten ([2], Kap. 3, Abschn. 21.1 und 21.2). Zu guter Letzt definieren wir die Beauville-Bogomolov-Form und formulieren Cor. 23.11 sowie Prop. 23.14 aus [2].

2. Vortrag (45 Minuten): Vollständig integrable Systeme. Für den zweiten Vortrag holen wir ein bisschen aus und beschäftigen uns zunächst mit vollständig integrablen Systemen, die ihren Ursprung in der Physik haben. Als Referenz kann man die Abschnitte 7.1 und 7.4 aus dem Buch [5] empfehlen. Ausgangspunkt ist eine reelle symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) zusammen mit einer reellwertigen Funktion H, der sogenannten Hamiltonfunktion. Für die Physiker ist M der Raum aller Zustände, die ein gegebenes physikalisches System einnehmen kann, und H ordnet jedem Zustand seine Energie zu. Nun möchte der Physiker gerne wissen, wie sich der Zustand seines Systems mit der Zeit ändert. Die zeitliche Änderung wird durch einen Fluss auf M beschrieben. Das Vektorfeld X_H des Flusses wird durch die Gleichung

$$\omega(\,\cdot\,, X_H) = dH(\,\cdot\,)$$

definiert. (Die Bewegungsgleichungen nennt man dann Hamilton-Gleichungen.) Auf dieselbe Weise kann man natürlich jeder Funktion auf M ein Vektorfeld zuordnen. Durch die Formel

$$\{f, g\} := X_f(g) = dg(X_f) = \omega(X_f, X_g)$$

wird ferner eine Lie-Klammer auf der Algebra der glatten Funktionen definiert, die noch weitere schöne Eigenschaften besitzt. (Satz 6 in Abschnitt 7.4 evtl. nur formulieren)
Um die Hamilton-Gleichungen explizit zu lösen, verwendet man sogenannte Erhaltungsgrößen (=Bewegungsintegrale). Das sind Funktionen f auf M, die

$$\{H, f\} = 0$$

erfüllen und somit ihren Wert mit der Zeit nicht ändern. Von einem vollständig integrablen System spricht der Physiker, wenn er $n = \dim_{\mathbb{R}}(M)/2$ Erhaltungsgrößen $(f_i)_{i=1}^n$ hat, die den drei Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\{f_i, f_j\} = 0 \qquad \forall 1 \leq i \leq j \leq n,\\
&df_1(p), \dots, df_m(p) \text{ sind linear unabhängig für alle } p \in M,\\
&\text{der Fluss von } X_{f_i} \text{ ist auf ganz } \mathbb{R} \text{ definiert,}
\end{aligned}$$

genügen. Die ersten beiden Bedingungen bedeuten, dass man eine Submersion $f = (f_1, \dots, f_m) : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit Langrangeschen Fasern hat und die letzte Bedingung ist z.B. erfüllt, falls f eigentlich ist. Da das Bild S von f eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ sein muss, können solche vollständig integrablen Systeme auf kompakten Mannigfaltigkeiten nicht existieren. Deshalb verallgemeinern wir den Begriff des vollständig integrablen Systems auf glatte (eigentliche) Abbildungen $f : M \longrightarrow S$, die generisch, also über einer dichten offenen Teilmenge von S, submersiv sind und dort Lagrangesche Fasern haben. (Das H vergessen wir jetzt mal.) Lokal (in S) entspricht das genau obiger Situation. Die Struktur solcher vollständig integrablen Systeme wird durch den Satz von Arnold-Liouville (Satz 12 in 7.4 beweisen) beschrieben. Vollständig integrable Systeme sind in der reellen Theorie eher die Ausnahme und es scheint einen interessanten Zusammenhang zwischen diesen Systemen und der komplexen/algebraischen Geometrie zu geben.
Nun kann man den gesamten Begriffsapparat auch in der komplex analytischen Theorie entwickeln, d.h. in Zukunft wird alles holomorph sein. Alle bisherigen Aussagen gelten analog, bis auf die letzte Bemerkung über die Häufigkeit vollständig integrabler Systeme. Der Satz von Matsushita (Satz 21.11 in [2] nur formulieren) liefert nämlich die Existenz vollständig integrabler Systeme unter deutlich schwächeren Voraussetzungen als in der reellen Theorie. Für K3-Flächen z.B. genügt die Existenz eines nichttrivialen Divisors vom Quadrat Null und die Basis S ist stets der $\mathbb{P}^1$. (Beweis in Vortrag 4) Die entsprechenden Vermutungen ((i) und (ii) in [2]) für höhere Dimensionen sollten ebenfalls vorgestellt werden.

3. Vortrag (45 Minuten): Der Satz von Matsushita. In diesem Vortrag wollen wir den Satz von Matsushita für eine glatte Kählersche Basis S beweisen. Ferner werden wir zeigen, dass $-K_S$ ampel ist und S die Picardzahl $\varrho(S) = 1$ hat. Der Beweis orientiert sich am Beweis von Prop. 24.8 in [2], vermeidet aber Prop. 24.1 und findet sich im Skript [6]. Zum Abschluss sollte man erwähnen, dass auch die Hodgezahlen von S mit denen des $\mathbb{P}^n$ übereinstimmen.

4. Vortrag (45 Minuten): Der Fall von K3-Flächen. Im vierten Vortrag sollen die beiden Vermutungen (i) und (ii), die nach Satz 21.11 in [2] aufgestellt werden, im Fall von K3-Flächen bewiesen werden. Zunächst ist also zu zeigen, dass die Basis stets ein projektiver Raum ist. Diejenigen K3-Flächen, die über dem Projektiven Raum gefasert sind, heißen elliptisch. Für (ii) ist zu zeigen, dass eine projektive K3- Fläche genau dann elliptisch ist, wenn sie einen nichttrivialen Divisor D mit $D^2 = 0$ enthält (Theorem 2.2 in Abschnitt 2.1 in [3]). Hierzu soll ein Resultat aus [4] bewiesen werden, welches besagt, dass das Linearsystem eines effektiven nef Divisors mit Quadrat Null auf einer K3-Fläche einen Divisor enthält, der nur aus einer Komponente besteht (Theorem 1, Abschnitt 3 in [4]). Die weitere Argumentation kann wahlweise [3] oder [4] entnommen werden. Auf (i) und (ii) sollte das Hauptaugenmerk des Vortrages liegen.
Abschließend sollten die Aussagen von Bemerkung 2.2 und Proposition 2.3 in [3] in kondensierter Form angeschrieben werden. Elliptische K3-Flächen tauchen in 19-dimensionalen Familien im Modulraum $\mathcal{M}$ aller K3-Flächen auf und die Gesamtheit dieser Familien liegt dicht in $\mathcal{M}$.

5. Vortrag (45 Minuten): Das Hitchin-System. In diesem Beispiel sind die beteiligten Mannigfaltigkeiten zwar nicht kompakt, aber die Lagrange Faserung ist einfach sehenswert. Man betrachtet hier das Kotangentialbündel des Modulraumes gewisser Vektorbündel auf einer fixierten komplexen Kurve C. Die Punkte in diesem Kotangentialbündel kann man auf natürliche Weise als sogenannte Hitchin-Paare interpretieren. Ein Hitchin-Paar ist dabei ein Vektorbündel (aus dem Modulraum) zusammen mit einem Endomorphismus des Vektorbündels mit "Koeffizienten" im Kotangentialbündel von C. Diesem Endomorphismus kann man (für fixiertes $c \in C$) seine Eigenwerte zuorden, die alle zusammen (wenn man $c \in C$ laufen lässt) eine möglicherweise verzweigte Überlagerungskurve von C bilden, die sogenannte Spektralkurve des Hitchin-Paares. Ferner kann man die Eigenräume eines generischen Endomorphismus' durch ein Linienbündel auf der Spektralkurve kodieren. Durch die Spektralkurve und das darauf lebende Linienbündel ist das Hitchin-Paar eindeutig bestimmt. Die Hitchin-Abbildung ordnet nun jedem Hitchin-Paar seine Spektralkurve zu. Die Spektralkurve ist durch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Endomorphismus' eindeutig bestimmt. Diese Koeffizienten sind globale Schnitte der Potenzen des Kotangentialbündels von C. Die Basis der Faserung ist also ein affiner Raum (der Raum globaler Schnitte). Fixiert man die Spektralkurve eines Hitchin-Paares, so kann man nur noch das Linienbündel der Eigenräume auf der Spektralkurve variieren. Die generische Faser der Hitchin-Abbildung ist eine offene dichte Teilmenge die Picard-Varietät der jeweiligen Spektralkurve. Darüber hinaus ist die Faserung Lagrange. Als Literatur verwende man das Skript [7].

Literatur

[1] D. Matsushita: *On fibre space structures of a projective irreducibe symplectic manifold*, Topology 38 (1999), 79-83, arXiv:alg-geom/9709033.

[2] M. Gross, D. Huybrechts, D. Joyce: *Calabi-Yau Manifolds and Releated Geometries*, Springer, Berlin (2002).

[3] J. Sawon: *Abelian fibred holomorphic symplectic manifolds*, Turkish Journal of Mathematics 27 (2003), No. 1, 197-230. (Proceedings of the Ninth Gokova Geometry-Topology Conference, Turkey, 27th to 31st May 2002.), arXiv:math/0404362.

[4] I. I. Pjatecki-Sapiro, I. R. Safarevic: *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3*, Math. USSR Izvestija 5 (1971), No. 3, 547-588.

[5] I. Agricola, Th. Friedrich: *Globale Analysis*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (2001).

[6] Skript 1, erhältlich unter *sven@math.uni-bonn.de*.

[7] Skript 2, erhältlich unter *sven@math.uni-bonn.de*.