S2B1: HAUPTSEMINAR FUNKTIONALANALYSIS

ABBILDUNGSGRAD UND VARIATIONSMETHODEN

WINTERSEMESTER 2025/26

Dozenten: Herbert Koch und Jan Bohr (nachname@math.uni-bonn.de)
Vorbesprechung: Freitag 18. Juli, 13 Uhr (c.t.) im großen Hörsaal (Wegelerstraße 10)
Zeit & Raum: Donnerstags 12 Uhr (c.t.), ab 16.Oktober, SR 1.007 (Endenicher Allee)
Website: https://www.math.uni-bonn.de/ag/ana/WiSe2526/S2B1/index.htmpl?

Überblick

Gegenstand des Seminars sind Methoden der nichtlinearen Analysis und ihre Anwendung auf partielle Differentialgleichungen. Als wiederkehrendes Beispiel dient das semi-lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= f(x,u(x)) & x\in\Omega \\ u(x) &= 0 & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

auf einem Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, wobei $f\colon\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist.

Die erste Klasse von Methoden untersucht Deformationen des Problems (d.h. statt einer Funktion $f(x,u)$ betrachtet man eine Familie $f_t(x,u)$ in einem Parameter $0\le t\le 1$) und sucht Eigenschaften (z.B. die Existenz einer Lösung), die bei der Deformation unverändert bleiben. Als Analogie kann man hier Gleichungen der Form

$$F_t(x)=y, \qquad F_t\colon\mathbb{R}^2\supset\bar{B}_1\to\mathbb{R}^2$$

betrachten, deren Lösbarkeit (zu gegebenem $y\in\mathbb{R}^2$) eng mit der Windungszahl von $F_t(\partial B_1)$ um y zusammenhängt. Der *Abbildungsgrad* ist eine Verallgemeinerung der Windungszahl auf höhere Dimensionen und unendlich dimensionale Räume.

Die zweite Klasse von Methoden betrachtet Lösungen des Randwertproblems als kritische Punkte eines Funktionals $J\colon M\to\mathbb{R}$, definiert auf einem geeigneten Funktionenraum M. Im linearen Fall (d.h. $f(x,u)=f(x)$ hängt nicht von u ab) eignet sich zum Beispiel

$$J(u)=\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\,dx,$$

definiert auf dem Sobolev–Raum[1] $M=H_0^1(\Omega)$. Um Lösungen zu finden, sucht man also Extrema oder Sattelpunkte von J — eine anspruchsvolle Aufgabe in Anbetracht der Tatsache, dass M im Allgemeinen nicht kompakt und J nicht beschränkt ist.

Vortrag & Ausarbeitung

Jedes Thema sollte in einem **Vortrag** von ca. 75 Minuten vorgestellt und auf einem **Handout** (1 bis 2 Seiten, geschrieben mit LaTeX) *und* einer schriftlichen **Ausarbeitung** (8 bis 10 Seiten) zusammengefasst werden (auf Deutsch oder Englisch). Es wird empfohlen, begleitend die Vorlesung *V3B1: Partielle Differentialgleichungen und Funktionalanalysis* zu besuchen.

#	**Thema**	**Referenz**
1	Brouwerscher Abbildungsgrad und Brouwerscher Fixpunktsatz	AM 3.1 – 3.3 (26-38)
2	Ungerade Abbildungen und Borsuk–Ulam Theorem	FG 3.2 (54-64)
3	Leray–Schauder Abbildungsgrad und Schauderscher Fixpunktsatz	AM 3.4 + 3.5 (38-44)
4	Anwendungen auf elliptische Gleichungen	AM 3.6 (44-52)
5	Kritische Punkte	AM 5.1 – 5.4 (77-86)
6	Deformationen und Palais–Smale Bedingungung	AM 7.1 – 7.4 (100-109)
7	Anwendung auf das superlineare Dirichlet Problem	AM 7.5 (109-114)
8	Satz vom Gebirgspass	AM 8.1 (116-128)
9	Lusternik-Schnirelmann Theorie	AM 9.1 + 9.2 (143-155)
10	Kransnoselski Geschlecht	AM 10.1 -10.2 (157-164)
11	Gerade Funktionale und Anwendungen auf das Dirichlet Problem	AM 10.3 -10.4 (157-164)

Literatur

[AM] Ambrosetti and Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007; MR2292344

[FG] Fonseca and Gangbo, *Degree theory in analysis and applications*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications Oxford Science Publications, 2 , Oxford Univ. Press, New York, 1995; MR1373430

[1] Diesen lernern Sie in der Vorlesung *Partielle Differentialgleichungen und Funktionanalysis* kennen.